ASUPRA PROBLEMEI POLILOCALE

DE

O. ARAMĂ

(Cluj)

În cele ce urmează vom prezenta unele rezultate obţinute la Institutul de calcul din Cluj, în studiul problemei polilocale relative la ecuaţii diferenţiale ordinare, insistînd în special asupra aspectului sub care această problemă intervine în studiul noţiunii de funcţie convexă, precum şi în studiul unor generalizări ale acestei noţiuni.

Ideea de funcţie convexă de ordinul n în accepţiunea Prof. T. Popoviciu [18] este legată de interpolarea prin polinoame de grad cel mult n şi ea conduce la studiul comportării funcţiilor faţă de mulţimea unor astfel de polinoame.

Căutînd să generalizeze rezultatele obţinute de T. Popoviciu cu privire la funcţiile convexe, E. Moldovan [9] a relativizat noţiunea de funcţie convexă, înlocuind mulţimea polinoamelor de grad cel mult n, cu o altă mulţime de funcţii, avînd proprietăţi de interpolaţie asemănătoare cu acelea ale unor astfel de polinoame. A fost necesară în acest scop introducerea noţiunii de mulţime interpolatoare de funcţii, în sensul următoarei definiţii :

DEFINIŢIA 1. *O mulţime* $Y = \{y(x)\}$ *de funcţii reale* $y(x)$ *de o variabilă reală, definite pe o mulţime liniară* $\mathcal{E}$, *se spune că are proprietatea* $I_n(\mathcal{E})$, *adică este interpolatoare de ordinul n pe mulţimea* $\mathcal{E}$, *dacă, oricare ar fi n puncte distncte* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ale mulţimii* $\mathcal{E}$ *şi oricare ar fi valorile reale* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *există în mulţimea* Y *o funcţie şi una singură* $y(x)$, *care să satisfacă condiţiile*

$$y(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

În cazul particular cînd Y reprezintă mulţimea integralelor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n,

$$y^{(n)} - F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \tag{2}$$

problema aflării funcţiei $y(x) \in Y$, care să satisfacă condiţiile date (1), poartă denumirea de problemă n-locală cu noduri simple şi ea se referă la existența și unicitatea integralei $y(x)$ care în n puncte distincte ia valori date.

O astfel de problemă implică mai multe aspecte de studiu dintre care amintim următoarele :

A) Caracterizarea ecuațiilor de forma (2) pentru care, într-un interval $\mathcal{J}$ dat, mulțimea Y a integralelor ei este de tipul $I_n(\mathcal{J})$.

B) Determinarea maximului distanței $x_n - x_1 = h$, astfel ca, dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ și $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt numere arbitrare, să fie asigurată existența și unicitatea integralei $y(x)$, care să satisfacă condițiile (1).

Sub aceste aspecte, problema polilocală a fost pusă la Institutul de calcul din Cluj de T. Popoviciu.

Referitor la primul aspect al problemei polilocale, rezultatele obținute se leagă de unele cercetări ale lui G. Pólya [17] și D. V. Widder [21], privitoare la formule de medie. Pentru o mai clară expunere a acestor rezultate, introducem următoarele definiții :

DEFINIȚIA 2. *O mulțime Y de funcții reale $y(x)$ de o variabilă reală, definite într-un interval $\mathcal{J}$, se spune că are proprietatea $I_n^*(\mathcal{J})$, dacă oricare ar fi m noduri $x_1, x_2, \ldots, x_m$ din $\mathcal{J}$ $(m \leqslant n)$, avînd respectiv multiplicitățile $p_1, p_2, \ldots, p_m$ astfel ca $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$ și oricare ar fi sistemele de numere reale*

$$\{y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(p_i-1)}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

există o funcție $y(x) \in Y$ și una singură pentru alegerea făcută, satisfăcînd condițiilor

$$y(x_i) = y_i^{(0)}, \quad y'(x_i) = y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(p_i-1)}(x_i) = y_i^{(p_i-1)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

În particular, cînd Y reprezintă mulțimea integralelor unei ecuații diferențiale (2) de ordinul n, problema aflării unei integrale $y(x) \in Y$, care să satisfacă condițiile date (3), o numim problema n-locală cu noduri confundate de tipul $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

Fie acum o ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul n

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0, \tag{4}$$

avînd coeficienții continui într-un interval $[a, b]$.

DEFINIȚIA 3. *Spunem că operatorul diferențial $L_n[y]$ din* (4) *are proprietatea $R_n(a, b)$* (adică proprietatea lui Rolle referitor la intervalul (a, b)), *dacă oricare ar fi funcția $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$, avînd în intervalul (a, b) $n + 1$ rădăcini distincte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, pentru ea există cel puțin un număr $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ astfel ca $L_n[f(\xi)] = 0$.*

DEFINIȚIA 4. *Dacă proprietatea de mai sus se menține adevărată și în cazul cînd rădăcinile funcției $f(x)$ nu sînt distincte, vom spune că operatorul diferențial liniar are proprietatea $R_n^*(a, b)$.*

Cu aceste definiții are loc următoarea teoremă care este o consecință imediată a unor rezultate obținute de G. Pólya [17]:

TEOREMA 1. *Dacă mulțimea Y a integralelor ecuației diferențiale* (4) *are proprietatea $I_n^*(a, b)$, atunci operatorul diferențial $L_n[y]$ din* (4) *are proprietatea $R_n^*(a, b)$.*

Reciproca acestei teoreme este adevărată după cum a arătat D. V. Widder în lucrarea [21] :

TEOREMA 2. *Dacă operatorul diferențial liniar și omogen $L_n[y]$ are proprietatea $R_n^*(a, b)$, atunci mulțimea Y a integralelor ecuației diferențiale corespunzătoare are proprietatea $I_n^*(a, b)$.*

Din aceste două teoreme rezultă o primă caracterizare a proprietății $I_n^*(a, b)$ a mulțimii Y a integralelor ecuației (4), prin proprietatea lui Rolle $R_n^*(a, b)$ a operatorului diferențial corespunzător.

Într-o accepțiune puțin diferită, proprietatea exprimată de teorema 1, a fost extinsă de E. Moldovan [10], [12], [13], [16] la ecuații diferențiale neliniare (2), obținîndu-se

TEOREMA 3. *Presupunem că $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale într-un domeniu definit de inegalitățile*

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < y^{(i)} < +\infty \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

și că mulțimea Y a integralelor ecuației (2) *are proprietatea $I_n[a, b]$.*

In aceste condiții, dacă $f(x) \in C^{(n)}[a, b]$ este o funcție care ia valori egale cu valorile vreunei integrale $y(x)$ a ecuației (2) *în $n + 1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ din $[a, b]$, atunci există un punct $\xi \in (x_1, x_{n+1})$, astfel ca*

$$f^{(n)}(\xi) - F[\xi, f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(n-1)}(\xi)] = 0.$$

În cazul particular al ecuațiilor diferențiale liniare și omogene, această teoremă primește următorul enunț diferit puțin de enunțul teoremei 1 (a lui G. Pólya).

TEOREMA 3*. *Dacă mulțimea Y a integralelor ecuației* (4) *are proprietatea $I_n[a, b]$, atunci operatorul diferențial $L_n[y]$ corespunzător, are proprietatea $R_n[a, b]$.*

Se poate arăta cu ușurință că din proprietatea $R_n(\mathcal{J})$ a unui operator-diferențial liniar și omogen cu coeficienții continui în $\mathcal{J}$ rezultă, pentru același operator, proprietatea $R_n^*(\mathcal{J})$, oricare ar fi intervalul $\mathcal{J}$, deschis închis sau semideschis.

Această afirmație rămîne valabilă și în cazul operatorilor diferențiali neliniari, ca de exemplu aceia care figurează în primul membru al ecuației (2).

În baza acestei observații, ținînd seamă de teorema 2, rezultă că reciproca teoremei 3* este adevărată.

Ar fi interesant de văzut dacă și reciproca teoremei **3** este adevărată, tot așa după cum sînt adevărate reciprocile teoremelor 1 și **3***; nu cunoaștem pînă în prezent nici o lucrare care să dea un răspuns complet acestei probleme. Unele indicații în acest sens sînt date în lucrările [11], [12], [13], [16].

Referindu-ne la teoremele 1 şi 3* se pune problema legăturii lor reciproce. Un răspuns la această chestiune se poate da utilizînd următoarele două teoreme stabilite în lucrarea [2] :

Teorema 4. *Dacă ecuaţia diferenţială* (4) *are coeficienţii continui într-un interval* $\mathcal{J}$ (care poate fi deschis, închis sau semideschis), *atunci proprietăţile* $I_n(\mathcal{J})$ *şi* $I_n^*(\mathcal{J})$ *ale mulţimii* Y *a integralelor ecuaţiei* (4) *sînt echivalente.*

Teorema 5. *Dacă ecuaţia diferenţială* (4) *are coeficienţii continui într-un interval* $[a, b)$, *din proprietatea* $I_n^*(a, b)$ *a mulţimii* Y_n, *referitoare la intervalul deschis* (a, b), *rezultă proprietatea* $I_n^*[a, b)$ *a aceleiaşi mulţimi, referitoare la intervalul semideschis* $[a, b)$.

În baza acestor două teoreme, rezultă echivalenţa proprietăţilor exprimate de teorema 1 şi teorema 3*.

Referitor la teoremele 4 şi 5, ar fi interesant de a se vedea dacă proprietăţile exprimate de aceste teoreme se menţin adevărate şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale neliniare. Bănuim că o cercetare în acest sens ar duce la un răspuns afirmativ.

Din teorema 3 rezultă următoarea consecinţă stabilită de E. Moldovan în lucrările [10], [12], [13], [16] :

Teorema 6. *Dacă în ipotezele teoremei* 3, *mulţimea* Y *a integralelor ecuaţiei diferenţiale* (2) *are proprietatea* $I_n[a, b]$ *şi dacă funcţia* $f(x) \in C^{(n)}[a, b]$ *satisface inegalitatea diferenţială*

$$f^{(n)}(x) - F[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)] > 0, \quad x \in [a, b],$$

atunci, oricare ar fi integrala $y(x) \in Y$, *diferenţa* $y(x) - f(x)$ *nu se anulează decît pe cel mult* n *puncte distincte din* $[a, b]$, *iar dacă* $f(x_i) - y(x_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *unde* $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$, *atunci* $f(x) - y(x) > 0$ *pentru* $x > x_n$.

În cazul cînd ecuaţia diferenţială (2) este liniară şi omogenă, folosind teoremele 4, 5 şi 1, se poate aduce o uşoară completare teoremei 6, precum urmează :

Teorema 6*. *Dacă mulţimea* Y *a integralelor ecuaţiei diferenţiale* (4) *cu coeficienţii continui în* $[a, b]$ *are proprietatea* $I_n[a, b)$ *şi dacă funcţia* $f(x) \in C^{(n)}[a, b]$ *satisface inegalitatea diferenţială* $L_n[f(x)] > 0$ *pentru* $x \in [a, b)$, *atunci :*

1° *Oricare ar fi integrala* $y(x) \in Y$, *diferenţa* $y(x) - f(x)$ *nu se anulează decît în cel mult* n *puncte din* $[a, b)$, *luîndu-se în considerare şi ordinele lor de multiplicitate.*

2° *Dacă diferenţa* $f(x) - y(x)$ *are* n *rădăcini dintre care* k *sînt distincte,* $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, *avînd ordinele de multiplicitate* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *astfel ca* $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$, *atunci au loc relaţiile :*

$$\operatorname{sgn}[f(x) - y(x)] = \begin{cases} (-1)^n \text{ dacă } x < x_1 \\ (-1)^{n+p_1+\cdots+p_i} \textit{ dacă } x \in (x_i, x_{i+1}), \ i = 1, 2, \ldots, k-1, \\ +1 \textit{ dacă } x > x_k. \end{cases}$$

Spre deosebire de teorema 6, în enunţul teoremei 6* se ia în considerare şi cazul cînd rădăcinile funcţiei $f(x) - y(x)$ sînt confundate, ţinîndu-se seama de ordinele lor de multiplicitate.

Reciproca teoremei 6 este adevărată în sensul pe care-l precizăm mai jos.

Definiţia 5. *Spunem că operatorul diferenţial liniar şi omogen* $L_n[y]$ *din* (4) *are proprietatea* $T_n^*[a, b)$ (a lui Ciaplîghin) *dacă din inegalitatea diferenţială* $L_n[f(x)] > 0$, $x \in [a, b)$, *pe care o satisface o funcţie* $f(x) \in C^{(n)}[a, b)$ *rezultă concluziile* 1° *şi* 2° *ale teoremei* 6*.

Teorema 7. *Dacă operatorul* $L_n[y]$ *din* (4), *avînd coeficienţii continui în* $[a, b)$, *are proprietatea* $T_n^*[a, b)$, *atunci mulţimea* Y *a integralelor ecuaţiei diferenţiale* $L_n[y] = 0$ *are proprietatea* $I_n^*[a, b)$, *şi deci şi proprietatea* $I_n[a, b)$.

Demonstraţia acestei teoreme se face observînd că, din proprietatea $T_n^*[a, b)$ a operatorului $L_n[y]$, rezultă îndată proprietatea $R_n^*[a, b)$ şi apoi, ţinînd seamă de teorema 2 (a lui D. V. Widder) precum şi de teoremele 4 şi 5.

Din teoremele 6* şi 7 rezultă o caracterizare a proprietăţii $I_n[a, b)$ a mulţimii Y a integralelor unei ecuaţii diferenţiale liniare, prin proprietatea $T_n^*[a, b)$ a operatorului diferenţial corespunzător.

Rămîne deschisă problema decă o astfel de caracterizare a proprietăţii $I_n[a, b)$ se poate transpune şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale neliniare.

Pentru o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul al 2-lea

$$L_2[y] = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{5}$$

cu coeficienţi continui în $[a, b)$, proprietatea $I_2[a, b)$ a mulţimii integralelor ei poate fi caracterizată şi prin următoarea proprietate T_2 a operatorului $L_2(y)$, mai slabă decît proprietatea T_2^* :

Definiţia 6. *Spunem că operatorul diferenţial* $L_2[y]$ *din* (5) *are proprietatea* $T_2[a, b)$, *dacă din relaţiile :*

1° $L_2[f(x)] > 0, \quad x \in [a, b)$,

2° $f(x) \in C^{(2)}[a, b)$,

3° $f(x_0) = y(x_0), \ f'(x_0) = y'(x_0)$,

unde $y(x)$ *este o integrală a ecuaţiei* (5), *iar* x_0 *este un punct din* $[a, b)$, *rezultă inegalitatea* $f(x) \geqslant y(x)$ *pentru orice* $x \in [a, b)$, *semnul egal avînd loc numai pentru* $x = x_0$.

Subliniem faptul că proprietatea $T_2[a, b)$, definită mai sus, se referă la un singur nod (dublu) x_0 şi ea intervine în teorema inegalităţilor diferenţiale a lui Ciaplîghin cu un nod dublu.

În lucrarea [1] s-a demonstrat următoarea teoremă :

Teorema 8. *In ipoteza că ecuaţia* (5) *are coeficienţii continui în intervalul* $[a, b)$, *condiţia necesară şi suficientă ca mulţimea* Y *a integralelor ei să aibă proprietatea* $I_2[a, b)$ *este ca operatorul diferenţial* $L_2[y]$ *corespunzător să aibă proprietatea* $T_2[a, b)$.

Din această teoremă, ca o aplicație, s-a obținut la lucrarea [2] următoarea caracterizare a proprietății $T_2[a, b)$:

TEOREMA 9. *Condiția necesară și suficientă ca operatorul diferențial* $L_2[y]$ *din* (5), *avînd coeficienți continui în* $[a, b)$, *să aibă proprietatea* $T_2[a, b)$ *este ca ecuația lui Riccati*

$$\sigma' + \sigma^2 + a_1(x)\sigma + a_2(x) = 0$$

să admită cel puțin o integrală continuă în intervalul deschis (a, b).

Teorema 8 nu poate fi în general extinsă la ecuații diferențiale de ordinul $n > 2$, fără o mărire convenabilă a numărului de noduri distincte care intervin în definiția proprietății lui Ciaplîghin.

*

Teoremele enunțate mai sus pun în evidență importanta idee de a concepe studiul problemei polilocale în paralel cu studiul inegalităților diferențiale. În acest cerc de idei se situiază unele rezultate obținute de E. Moldovan [13], [14], [16]. Dintre acestea cităm următoarele:

TEOREMA 10. *Fie* $\mathfrak{M}_n$ *mulțimea tuturor combinațiilor liniare cu coeficienți constanți ale unor funcții* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ $(n > 2)$, *presupuse continue, liniar independente în* $[a, b]$ *și neanulîndu-se identic în niciun subinterval. Din existența unei funcții* $f(x)$ *continue pe* $[a, b]$, *pozitive pentru orice* $x \in (a, b)$, *negativ n-valente față de mulțimea* $\mathfrak{M}_n$ *pe* $[a, b]$ *și satisfăcînd condiția* $f(a) = 0$, *rezultă proprietatea* $I_n[a, b]$ *a mulțimii* $\mathfrak{M}_n$.

Aici prin *negativ n-valență* a funcției $f(x)$ față de mulțimea $\mathfrak{M}_n$ pe $[a, b]$ se înțelege următoarea proprietate:

Oricare ar fi funcția $\varphi(x) \in \mathfrak{M}_n$, diferența $f(x) - \varphi(x)$ nu se anulează decît pe cel mult n puncte din intervalul $[a, b]$, iar dacă $f(x_i) - \varphi(x_i) = 0$ pentru punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ astfel ca $x_n < b$, atunci $f(x) - \varphi(x) < 0$ pentru $x > x_n$.

TEOREMA 11. *Fie dată ecuația diferențială liniară și omogenă* (4) *de ordinul* $n \geqslant 2$, *avînd coeficienții continui într-un interval* $[a, b]$. *Pentru ca mulțimea* Y_L *a integralelor ei să aibă proprietatea* $I_n[a, b]$, *este necesar și suficient să existe o ecuație diferențială de forma* (2), *satisfăcînd următoarele condiții*:

1° *Mulțimea* Y_F *a integralelor ecuației* (2) *are proprietatea* $I_n[a, b]$.
2° *Oricare ar fi integrala* $y(x) \in Y_L$, *are loc inegalitatea*

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)} \leqslant y^{(n)} - F[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)], \quad x \in [a, b].$$

3° *Ecuația* (2) *posedă o integrală* $u(x)$ *pozitivă în intervalul deschis* (a, b) *și astfel ca pentru* $n > 2$ *să avem* $u(a) = 0$.

Această teoremă precum și teorema 6, după cum s-a arătat de către E. Moldovan [13], [16], permite stabilirea unor criterii cu ajutorul cărora se poate studia proprietatea interpolatoare a unei ecuații de forma (4). Dintre acestea amintim următoarele două:

CRITERIUL 1. *Dacă*

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} < y^{(n)} - F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

pentru orice punct al domeniului

$$D: a \leqslant x \leqslant b, \ -\infty < y < +\infty, \ -\infty < y^{(i)} < \infty, \ i = 1, 2, \ldots, n-1$$

și dacă ecuația (2) *are proprietățile* 1° *și* 3° *din enunțul teoremei* 11, *atunci mulțimea* Y_L *a integralelor ecuației* (4) *are proprietatea* $I_n[a, b]$.

CRITERIUL 2. *Dacă există o funcție* $u(x)$ *care se anulează în punctele* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ *din* $[a, b]$, *schimbînd semnul în punctele* x_i *interioare intervalului* $[a, b]$ *și astfel ca* $u(x) < 0$ *pentru* $x \in (x_{n-1}, x_n)$, *atunci din inegalitatea* $L(u) < 0$ *rezultă că* Y_L *nu are proprietatea* $I_n[a, b]$.

În sfîrșit, ținem să amintim că, prin aplicarea metodei inegalităților diferențiale la ecuații diferențiale neliniare, s-au obținut de către E. Moldovan [13], [16] teoreme de unicitate referitoare la problema n-locală cu noduri simple. Dintre acestea cităm următoarea teoremă:

TEOREMA 12. *Dacă* Y *este o mulțime liniară de funcții continue într-un interval* $[a, b]$, *satisfăcînd condițiile*:

1° *pentru orice sistem de n puncte distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > 2)$ *din intervalul* $[a, b]$ *și pentru orice sisteme de numere reale* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *există în* Y *o funcție* $y(x)$ (nu se presupune unicitatea ei), *astfel ca* $y(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

2° *două funcții distincte din* Y *nu pot să coincidă pe nici un subinterval al intervalului* $[a, b]$;

3°. *Există o funcție* $\varphi(x)$ *continuă în* $[a, b]$, *negativ n-valentă față de mulțimea* Y, *astfel ca*

$$\varphi(a) = 0 \text{ și } \varphi(x) > 0 \text{ pentru } x \in (a, b),$$

atunci mulțimea Y *are propriatatea* $I_n[a, b]$.

Studiul proprietăților interpolatoare ale unei mulțimi Y, formată din integralele unei ecuații diferențiale liniare (4), se poate face și cu ajutorul unor anumite sisteme fundamentale.

Rezultatele în această direcție se bazează pe următoarele două teoreme date de G. Pólya [17]:

TEOREMA 13. *Dacă ecuația diferențială* (4) *cu coeficienți continui în* $[a, b]$ *admite un sistem de* $n - 1$ *integrale* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ *satisfăcînd în intervalul* (a, b) *relațiile*:

$$y_1(x) > 0, \ W(y_1, y_2) > 0, \ \ldots, \ W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) > 0, \ x \in (a, b), \tag{6}$$

atunci mulțimea Y *a integralelor ecuației diferențiale* (4) *are proprietatea* $I_n^*(a, b)$ (în intervalul deschis (a, b)).

TEOREMA 14. *Dacă mulțimea* Y *a integralelor ecuației* (4) *cu coeficienți continui în* $[a, b]$ *are proprietatea* $I_n^*[a, b)$ (în intervalul semiînchis

$[a, b))$, *atunci există pentru ea un sistem de* $n - 1$ *integrale, satisfăcînd în intervalul deschis* (a, b) *condițiile* (6).

Referitor la teorema 13, menționăm faptul că în aceleași ipoteze este adevărată proprietatea $I_n[a, b)$ referitoare la intervalul semiînchis $[a, b)$, conținînd nodul $x = a$. Această precizare, foarte utilă în expunerea ce va urma, nu rezultă însă din demonstrația dată de G. Pólya teoremei 13. O astfel de completare necesită, după cum s-a arătat în [2], anumite demonstrații suplimentare.

Din această cauză, teoremele 13 și 14 ale lui G. Pólya nu reușesc să dea o caracterizare a proprietății $I_n^*[a, b)$ a mulțimii Y, prin relațiile (6) (și nici a proprietății $I_n^*(a, b)$).

Acest neajuns, se remediază după cum s-a arătat în lucrarea [2], cu ajutorul teoremelor 4 și 5, obținîndu-se astfel următoarea

TEOREMA 15. *In ipoteza că ecuația diferențială* (4) *are coeficienții continui în* $[a, b)$, *fie* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ *un sistem de* $n - 1$ *integrale ale ei, satisfăcînd în punctul* $x = a$ *următoarele condiții ale lui Cauchy*:

$$\begin{aligned}
&y_1(a) = y_1'(a) = \ldots = y_1^{(n-3)}(a) = y_1^{(n-2)}(a) = 0, \ y_1^{(n-1)}(a) = 1,\\
&y_2(a) = y_2'(a) = \ldots = y_2^{(n-3)}(a) = 0, \ y_2^{(n-2)}(a) = 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&y_{n-2}(a) = y_{n-2}'(a) = 0, \quad y_{n-2}''(a) = 1,\\
&y_{n-1}(a) = 0, \quad y_{n-1}'(a) = 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Condiția necesară și suficientă ca mulțimea Y *a integralelor ecuației* (4) *să aibă proprietatea* $I_n[a, b)$ (deci și $I_n^*[a, b)$) *este ca să fie satisfăcute, pentru orice* $x \in (a, b)$, *relațiile*

$$y_1(x) \neq 0, \ W(y_1, y_2) \neq 0, \ldots, W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \neq 0, \ x \in (a, b) \tag{8}$$

Referitor la aceste rezultate se pune problema elaborării unui studiu comparativ privind existența și unicitatea soluțiilor diverselor tipuri de probleme polilocale pentru o aceeași ecuație diferențială, numărul nodurilor de interpolare fiind presupus constant. În această direcție un prim rezultat îl constituie teorema 4 enunțată anterior. Din această teoremă rezultă că dacă pentru o ecuație diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți continui într-un interval $[a, b)$, are soluție (unică) orice problemă n-locală cu n noduri simple, atunci pentru aceeași ecuație are soluție (unică) orice problemă n-locală referitoare la k $(k \leqslant n)$ noduri, de multiplicități respectiv $p_1, p_2, \ldots, p_k$, astfel ca $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$, interpolarea pe aceste noduri fiind înțeleasă în sensul lui Hermite.

Este interesant de relevat faptul că reciproca acestei afirmații este de asemenea adevărată, după cum rezultă din următoarea teoremă stabilită în lucrarea [3]:

TEOREMA 16. *Se consideră următoarele condiții bilocale*:

$$\begin{aligned}
&y(a) = y_a^{(0)}, \ y'(a) = y_a^{(1)}, \ldots, y^{(i-1)}(a) = y_a^{(i-1)}\\
&y(\xi) = y_\xi^{(0)}, \ y'(\xi) = y_\xi^{(1)}, \ldots, y^{(n-i-1)}(\xi) = y_\xi^{(n-i-1)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Condiția necesară și suficientă ca mulțimea Y *a integralelor ecuației diferențiale* (4) *cu coeficienți continui în* $[a, b)$ *să aibă proprietatea* $I_n[a, b)$ *este ca această ecuație să aibă o integrală* $y(x)$ *și una singură, satisfăcînd condițiile* (9), *oricare ar fi numărul natural* i $(i \leqslant n - 1)$, *oricare ar fi nodul* $\xi \in (a, b)$ *și oricare ar fi sistemele de numere reale*

$$\{y_a^{(0)}, y_a^{(1)}, \ldots, y_a^{(i-1)}\}, \quad \{y_\xi^{(0)}, y_\xi^{(1)}, \ldots, y_\xi^{(n-i-1)}\}.$$

Această teoremă dă o caracterizare a proprietății $I_n[a, b)$ a familiei Y prin existența soluțiilor problemelor bilocale (9) de tip Lagrange-Hermite. O consecință (imediată) a teoremei 16, consecință pe care o vom folosi în cele ce urmează, este dată de următoarea teoremă stabilită în lucrarea [3]:

TEOREMA 17. *Fie* $Y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ *submulțimea integralelor* $y(x)$ *ale ecuației diferențiale* (4), *care satisfac în punctul* $x = a$, *condițiile*.

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(i-1)}(a) = 0, \quad y^{(i)}(a) \neq 0.$$

Condiția necesară și suficientă ca familia Y (*formată din toate integralele ecuației* (4)) *să aibă proprietatea* $I_n[a, b)$ *este ca, oricare ar fi numărul natural* i $(i \leqslant n - 1)$, *submulțimea corespunzătoare* $Y^{(i)}$ *să nu conțină nici o integrală* $y(x)$ *care să aibă în intervalul deschis* (a, b) *vreo rădăcină* x_0, *multiplă de ordin* $\geqslant n - i$.

*

Trecem acuma la prezentarea celui de al doilea aspect al problemei polilocale, anume acela al găsirii intervalelor maximale de forma $[a, a + h)$, cu extremitatea stîngă dată, în care familia Y a integralelor unei ecuații diferențiale de ordinul n este interpolatoare.

Referindu-ne la notațiile introduse cu ocazia teoremei 17, pentru integralele $y(x)$ aparținînd submulțimii $Y^{(i)}$ definim funcționala $\rho_i[y]$ precum urmează:

1°. Dacă integrala $y(x) \in Y^{(i)}$ admite în intervalul deschis (a, b) cel puțin o rădăcină ξ, avînd un ordin de multiplicitate $\geqslant n - i$, atunci

$$\rho_i[y] = \min_{(\xi)} \xi, \tag{10}$$

unde minimul se ia relativ la mulțimea $\{\xi\}$ a tuturor rădăcinilor de ordin $\geqslant n - i$ din intervalul (a, b) ale integralei $y(x)$ considerate.

2°. Dacă integrala $y(x) \in Y^{(i)}$ nu admite în (a, b) nici o rădăcină de ordin $\geqslant n - i$, atunci

$$\rho_i[y] = b. \tag{11}$$

Fie în continuare numerele ρ_i și ρ definite precum urmează:

$$\rho_i = \inf_{y \in Y^{(i)}} \rho_i[y], \quad \rho = \min\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}\}. \tag{12}$$

Cu aceste notații, are loc următoarea teoremă stabilită în lucrarea [3], teoremă care în unele cazuri furnizează o metodă de calcul al intervalului maximal de interpolare.

TEOREMA 18. *Dacă ecuația diferențială (4) are coeficienții continui în $[a, b)$, atunci numărul maxim posibil ρ $(a < \rho \leqslant b)$, pentru care are loc proprietatea $I_n[a, \rho)$ a familiei Y, este numărul ρ definit de relațiile (10), (11) și (12). Marginea inferioară* (triplă) *care definește numărul ρ prin aceste relații, este atinsă.*

În lucrarea [3] s-a aplicat această teoremă la ecuații de forma $y^{(n)} + P(x)y = 0$ $(n = 3, 4)$, unde $P(x)$ este o funcție continuă și pozitivă într-un interval $[a, b)$. S-a obținut astfel o caracterizare a proprietății I_n a integralelor unei astfel de ecuații, prin proprietatea de neanulare a funcției lui Cauchy $\varphi(x, a)$ corespunzătoare nodului $x = a$. Cu aceeași ocazie a fost studiat și cazul $P(x) < 0$ în $[a, b)$. Teorema 18 a mai fost aplicată (tot în lucrarea [3]) la ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordinul 4, regăsindu-se un rezultat stabilit anterior, pe altă cale, în lucrarea [6]. Aceste cercetări au condus (în conformitate cu teorema 18) la studiul unei probleme bilocale cu noduri duble [7], [19] și [20].

Tot referitor la aspectul *B*) al problemei polilocale, amintim și unele cercetări privind delimitarea lungimilor intervalelor maximale de interpolare la ecuații diferențiale liniare. În lucrarea [4] s-au obținut astfel de delimitări cu ajutorul intervalelor de interpolare ale unor ecuații diferențiale de ordin mai mic. Vom aminti în continuare cîteva din aceste rezultate.

Fie $\mathscr{L}_N[y] = 0$ o ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul N, avînd coeficienții continui într-un interval $[a, b)$. Să presupunem că această ecuație se poate scrie sub forma

$$\mathscr{L}_N[y] = L_{k_n} L_{k_{n-1}} \dots L_{k_1}[y] + A_1(x) L_{k_{n-1}} \dots L_{k_1}[y] + \dots +$$
$$+ A_{n-1}(x) L_{k_1}[y] + A_n(x) y = 0 \quad (N = k_1 + k_2 + \dots + k_n), \tag{13}$$

unde $L_{k_1}, L_{k_2}, \dots, L_{k_n}$ reprezintă operații diferențiale liniare avînd respectiv ordinele $k_1, k_2, \dots, k_n$ și ai căror coeficienți sînt funcții derivabile în intervalul $[a, b)$ de un număr suficient de ori, astfel încît expresia $\mathscr{L}_N[y]$ din (13) să aibă sens. Să mai presupunem că aceste operații au respectiv proprietățile de interpolație $I_{k_1}[a, b), \dots, I_{k_n}[a, b)$, iar funcțiile $A_1(x), \dots, A_n(x)$ sînt continue în $[a, b)$. În aceste ipoteze, în lucrarea [4] se stabilește o teoremă de interpolare referitoare la integralele ecuației diferențiale (13), analoagă teoremei de interpolație a lui De la Vallée Poussin. Enunțul teoremei noastre este următorul:

TEOREMA 19. *In condițiile de mai sus, mulțimea integralelor ecuației (13) are prorpietatea $I_N[a, a + h_0)$, numărul h_0 reprezentînd rădăcina pozitivă* (dacă există) *a următoarei ecuații în necunoscuta h:*

$$\mathscr{F}(h) = G(h)[\lambda_n(h) M_1(h) + \lambda_{n-1}(h) M_2(h) + \dots +$$
$$+ \lambda_2(h) M_{n-1}(h)] + \lambda_1(h) \cdot \mathscr{G}(h) - 1 = 0. \tag{14}$$

Aici s-a notat cu $\lambda_i(h) = \sup\limits_{x \in [a, a+h]} |A_i(x)|$, iar numerele $M_i(h)$ $(i = 1, \dots, n - 1)$, $G(h)$ și $\mathscr{G}(h)$ se definesc astfel:

Fie h un număr oarecare, satisfăcînd inegalitățile $0 < h < b - a$ și fie i unul din numerele $1, 2, \dots, n - 1$. Se consideră ecuația diferențială neomogenă

$$L_{k_{n-1}} L_{k_{n-2}} \dots L_{k_i}[y] = 1. \tag{15}$$

Fie $y_i(x)$ o soluție a ei, care se anulează în $\sigma_i = k_{n-1} + k_{n-2} + \dots + k_i$ valori (nu neapărat distincte) din $[a, a + h]$. Se arată în lucrarea citată [4] că, în ipotezele adoptate mai sus, astfel de integrale există pentru orice distribuție a rădăcinilor. Se definește

$$M_i(h) = \sup_{\{y_i(x)\}} \int_a^{a+h} |y_i(x)|\, dx,$$

marginea superioară fiind considerată relativ la toate soluțiile $y_i(x)$ ale ecuației diferențiale (15), soluții care se anulează în cîte σ_i puncte din $[a, a + h]$.

În continuare, funcția $G(x)$ se definește astfel:

Fie ecuația diferențială liniară, neomogenă $L_{k_n}[y] = f(x)$, cu condițiile polilocale

$$y(x_1) = y(x_2) = \dots = y(x_{k_n}) = 0, \tag{16}$$

unde nodurile $x_1, \dots, x_{k_n}$ aparțin intervalului $[a, a + h]$ $(0 < h < b - a)$. Se știe că soluția căutată admite o reprezentare de forma

$$y(x) = \int_a^{a+h} G(x, s; x_1, x_2, \dots, x_{k_n}) f(s)\, ds,$$

unde $G(x, s; x_1, \dots, x_{k_n})$ reprezintă funcția lui Green corespunzătoare operatorului L_{k_n} și condițiilor polilocale (16). Se definește

$$G(h) = \sup_{x, s, x_1, \dots, x_{k_n} \in [a, a+h]} |G(x, s; x_1, x_2, \dots, x_{k_n})|$$

și

$$\mathscr{G}(h) = \sup_{x, x_1, \dots, x_{k_n} \in [a, a+h]} \int_a^{a+h} |G(x, s; x_1, \dots, x_{k_n})|\, ds.$$

În lucrarea [4] arătăm că oricare ar fi indicele $i = 1, 2, \dots, n - 1$, funcțiile $M_i(h)$, $G(h)$ și $\mathscr{G}(h)$ sînt funcții continue și crescătoare în raport cu h în intervalul $[0, b - a)$. Cu aceste precizări, se arată tot în lucrarea [4] că ecuația (14) în necunoscuta h nu poate avea de cît cel mult o rădăcină în intervalul $[0, b - a)$. În caz afirmativ, numărul h_0 care intervine în enunțul teoremei 19 reprezintă tocmai această rădăcină, iar în caz contrar, h_0 reprezintă numărul $b - a$.

Teorema 19 permite, în anumite condiţii, o delimitare mai bună a intervalului de interpolaţie pentru integralele ecuaţiei diferenţiale (13), decît cunoscuta teoremă a lui De la Vallée Poussin.

În cazul particular cînd $k_n = 1$ şi cînd $L_{k_n} = \frac{d}{dx}$, teorema 19 primeşte un enunţ întrucîtva diferit. Nu vom insista aici asupra acestui caz particular, pentru a trece şi la alte chestiuni.

Tot referitor la aspectul *B)* al problemei polilocale, amintim şi următorul rezultat obţinut de noi, rezultat care dealtfel face obiectul unei comunicări prezentate la acest colocviu.

TEOREMA 20. *Fie dat un şir de n funcţii definite într-un interval* $[a, b)$

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x) \tag{17}$$

şi fie

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_k(x) \qquad (k < n) \tag{18}$$

o secţiune a sa. Presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiţii :

1°. *funcţiile din şirul* (17) *sînt liniar independente şi aparţin clasei* $C^{(k)}[a, b)$;

2°. $W(y_1, y_2, \ldots, y_k) \neq 0$ *pentru* $x \in [a, b)$;

3°. *funcţiile din şirul* (18) *formează un sistem Cebîşev de ordinul k în* $[a, b)$;

4°. *funcţiile din şirul*

$$W(y_{k+1}),\quad W(y_{k+2}),\ \ldots,\ W(y_n),$$

unde $W(f) = W(y_1, y_2, \ldots, y_k, f)$, *formează un sistem Cebîşev de ordinul* $n - k$ *în* $[a, b)$.

In aceste condiţii funcţiile din şirul (17) *formează un sistem Cebîşev de ordinul n în* $[a, b)$.

Aplicînd această teoremă la ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi (reali), s-au obţinut următoarele consecinţe :

I. Presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiţii :

1°. Funcţiile (17) sînt liniar independente în $[a, b)$.

2°. Funcţiile (18) reprezintă un sistem fundamental real al unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene de ordinul k, cu coeficienţi constanţi reali.

3°. Funcţiile $y_{k+1}(x), y_{k+2}(x), \ldots, y_n(x)$ reprezintă un sistem fundamental real al unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene de ordinul $n - k$, de asemenea cu coeficienţi constanţi reali.

Notînd cu $L(y_1, y_2, \ldots y_n)$, respectiv $L(y_1, \ldots, y_k)$, lungimile intervalelor maximale în care funcţiile (17), respectiv (18), formează un sistem Cebîşev de ordinul n, respectiv k, are loc inegalitatea

$$L(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqslant \min\{L(y_1, \ldots, y_k),\ L(y_{k+1}, \ldots y_n)\}. \tag{19}$$

II. Iterînd convenabil această inegalitate, se obţine

$$L(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geqslant \pi \cdot (\max_{(i)} |\beta_i|)^{-1}, \tag{20}$$

unde β_i reprezintă părţile imaginare ale rădăcinilor complexe ale polinomului caracteristic asociat ecuaţiei diferenţiale care admite funcţiile (17) ca sistem fundamental.

III. Folosind relaţia (19), precum şi unele rezultate obţinute în lucrările [5] şi [6], s-au obţinut în lucrare diverse delimitări (mai bune decît (20)) ale lungimilor intervalelor maximale de neoscilaţie, în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, de ordinele 5, 6, 7 şi 8.

Ca încheiere, mai amintim unele rezultate obţinute de D. Ripianu într-o problemă înrudită, anume aceea a oscilaţiei şi a neoscilaţiei într-un interval infinit a integralelor ecuaţiei diferenţiale

$$y'' + p(x)y = 0. \tag{21}$$

Utilizînd metoda de lucru a lui V. A. Kondratiev [8], s-au obţinut mai multe criterii de oscilaţie şi de neoscilaţie dintre care citām următoarele trei :

CRITERIUL 1. *Dacă există trei funcţii* $\beta(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ *şi două constante C şi K, astfel încît pentru* $x > x_0$ *să aibă loc inegalităţile* $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ *şi*

$$\varphi_1(x) \leqslant K + \int_{x_0}^{x} \Bigg\{ \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(x)\exp\left(-2\int_{x_0}^{x}\beta(s)\,ds\right)}{C + \int_{x_0}^{x}(\varphi_1(s)+\varphi_2(s))\cdot\exp\left(-2\int_{x_0}^{s}\beta(t)\,dt\right)ds} -$$

$$-[\beta'(x) + \beta^2(x) + p(x)]\exp\left(2\int_{x_0}^{x}\beta(s)\,ds\right)\Bigg[C + \int_{x_0}^{x}(\varphi_1(s) +$$

$$+\varphi_2(s))\exp\left(-2\int_{x_0}^{s}\beta(t)\,dt\right)ds\Bigg]\Bigg\}\,dx \leqslant \varphi_2(x)$$

atunci integralele ecuaţiei (21) *sînt neoscilatorii în* $(x_0, +\infty)$.

CRITERIUL 2. *Dacă există două constante* K_1 *şi* K_2 $(K_1 < K_2)$ *astfel încît pentru* $x > x_0$ *să aibă loc inegalitatea*

$$K_1 - \frac{1}{4}(K_2 - K_1)^2 x \leqslant \int_{x_0}^{x} p(s)\,ds \leqslant K_2 - \frac{1}{4}(K_2 - K_1)^2 x,$$

atunci integralele ecuaţiei (17) *sînt neoscilatorii în* $(x_0, +\infty)$.

CRITERIUL 3. *Dacă există două funcţii derivabile $\varphi(x)$ şi $\beta(x)$ astfel încît pentru $x > x_0$, să aibă loc simultan relaţiile*

$$\varphi(x) > 0, \quad \beta(x) \geqq 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x_0}^{x}\left\{p(x) - \left[\beta'(x) - \beta(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{\varphi'^2(x)}{4\varphi^2(x)}\right]\right\}\frac{dx}{\varphi(x)} = \infty,$$

atunci integralele ecuaţiei (21) *sînt oscilatorii în* (x_0, ∞).

În sfîrşit, ţinem să ridicăm următoarea problemă privind legătura dintre proprietatea de neoscilaţie într-un interval finit J şi proprietatea de neoscilaţie într-un interval infinit a integralelor unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene. Presupunînd că ecuaţia diferenţială (4) are coeficienţii continui într-un interval infinit $[a, \infty)$, considerăm următoarele definiţii :

DEFINIŢIA 7. *Se spune că familia* Y *a integralelor ecuaţiei diferenţiale* (4) *are în intervalul finit* $[\alpha, \beta)$ $(\alpha > a)$ *proprietatea* $N_k[\alpha, \beta)$, *dacă oricare ar fi integrala neidentic nulă* $y(x) \in Y$, *ea nu se anulează în intervalul* $[\alpha, \beta)$, *decît cel mult de* $k - 1$ *ori. În această definiţie* β *poate fi şi* ∞.

DEFINIŢIA 8. *Se spune că familia* Y *are proprietatea* $\tilde{N}$ *dacă există un număr real* λ *astfel încît în intervalul infinit* (λ, ∞) *orice integrală neidentic nulă* $y(x) \in Y$, *are un număr finit de rădăcini, număr ce depinde în general de integrala considerată.*

Se ştie că dacă $k = n$ (n fiind ordinul ecuaţiei diferenţiale considerate), atunci proprietatea $N_n[\alpha, \beta)$ este echivalentă cu proprietatea $I_n[\alpha, \beta)$ a familiei Y. Cu aceste definiţii şi precizare, problema pe care intenţionăm să o punem este următoarea :

1°. Să se demonstreze, sau să se infirme printr-un exemplu, că în ipoteza continuităţii în $[a, \infty)$ a coeficienţilor ecuaţiei (4), proprietatea $\tilde{N}$ a familiei Y implică existenţa unui număr α $(\alpha > a)$ şi a unui număr k, astfel încît în intervalul $[\alpha, \infty)$ familia Y să aibe proprietatea $N_k[\alpha, \infty)$.

2°. În caz afirmativ, să se demonstreze (sau să se infirme printr-un exemplu) că numărul k, ce intervine în afirmaţia 1°, satisface egalitatea $k = n$.

Afirmaţia 1° se referă deci la caracterul uniform al neoscilaţiei integralelor într-un interval infinit; afirmaţia 2° se referă la caracterul interpolator în vecinătatea punctului $x = \infty$, al familiei Y, atunci cînd se presupune că această familie are proprietatea $\tilde{N}$.

Rezolvarea acestei probleme ar prezenta interes, întrucît în cazul cînd afirmaţia 2° este adevărată, ţinînd seamă de observaţia că proprietăţile $N_n[\alpha, \infty)$ şi $I_n[\alpha, \infty)$ ale familiei Y sînt echivalente, precum şi de teorema 15, s-ar obţine îndată o caracterizare (condiţie necesară şi suficientă) a proprietăţii de neoscilaţie $\tilde{N}$, prin proprietăţi referitoare la comportarea în vecinătatea punctului $x = \infty$ a şirului de wronskieni (8).

BIBLIOGRAFIE

1. A r a m ă O., *Problema bilocală şi teorema inegalităţilor diferenţiale cu noduri confundate a lui S. A. Ciaplîghin pentru ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **IX**, 7—38 (1958).
2. — *Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **X**, 207—257 (1959).
3. — *Cercetări asupra distribuţiei rădăcinilor reale ale integralelor ecuaţiilor diferenţiale în legătură cu unele probleme la limită polilocale*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XI**, 241—259 (1960).
4. — *Intervale de neoscilaţie referitoare la integralele ecuaţiilor diferenţiale liniare*. Studii şi cercet. de matem. (Cluj), **XIII**, *2*, 213—239 (1962).
5. A r a m ă O., R i p i a n u D., *Asupra problemei polilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi* (*I*). Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **VIII**, 37—74 (1957).
6. — *Asupra problemei polilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi* (*II*). Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **VIII**, 211—265 (1957).
7. — *Asupra problemei polilocale cu noduri confundate pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi*. Studia Univ. Babeş-Bolyai, **III**, *3*, Ser. 1, 95—116 (1958).
8. К о н д р а т ь е в В. А., *Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнений* $y'' + p(x)y = 0$. Докл. Акад. Наук СССР, **113**, № *4*, 742—745 (1957).
9. M o l d o v a n E., *Asupra unei generalizări a noţiuni de convexitate*. Studii şi cercetări ştiinţifice, Ser. I, **VI**, *3—4* (1955).
10. — *Asupra unor teoreme de medie*. Comunicările Acad. R.P.R., **VI**, *1*, 7—12 (1956).
11. — *Proprietăţi ale mulţimilor de funcţii imterpolatoare*. Bul. Univ. V. Babeş-Bolyai Cluj, Ser. Şt. nat. **I**, 31—42 (1957).
12. — *Proprietăţi ale funcţiilor convexe generalizate*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **VIII**, 21—35 (1957).
13. — *Asupra noţiunii de funcţie convexă faţă de o mulţime de funcţii interpolatoare*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **IX**, 161—224 (1958).
14. — *Некоторые замечания относительно одного признака неколеблемости для линейных дифференциальных уравнений*. Mathematica, **1(24)**, fasc. *1*, 45—48 (1959).
15. — *Sur une généralisation des fonctions convexes*. Mathematica, **1**(**24**), *1*, 49—80 (1959)
16. — *Aplications des fonctions convexes généralisées*. Mathematica, **1**(**24**), *2*, 281—286 (1959).
17. P ó l y a G., *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation*. Amer. Math. S. Bull., **24**, 312—324 (1922).
18. P o p o v i c i u T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou deux variables réelles*. Mathematica, **VIII**, 1—86 (1934).
19. R i p i a n u D., *Asupra problemei multilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **IX**, 321—341 (1958)
20. — *О краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*. Mathematica, 2 (25), 171—194 (1960).
21. W i d d e r D. V., *A general mean-value theorem*. Amer. Mat. Soc. Trans. **26**, 385—394 (1924).