ACTIVITATEA MATEMATICĂ A PROFESORULUI TIBERIU POPOVICIU

— La a 50-a aniversare a zilei de naştere —

La 16 februarie 1956 profesorul Tiberiu Popoviciu a împlinit 50 de ani. Născut la Arad în 1906, studiile superioare le-a făcut la Bucureşti şi Paris. In 1933 şi-a luat doctoratul în ştiinţele matematice la Paris. A ocupat pe rînd posturile de asistent, conferenţiar şi profesor. In 1948 a devenit membru corespondent al Academiei R.P.Romîne. Timp de mai mulţi ani a fost secretar al Filialei din Cluj a Academiei R.P.Romîne, iar începînd din anul 1951 conduce Secţia de matematică a acestei filiale. Ca profesor al Universităţii ,,V. Babeş'' din Cluj, este şi şeful catedrei de analiză matematică.

Activitatea de cercetare matematică a profesorului Tiberiu Popoviciu începe încă de pe băncile liceului. Ca elev în clasa a VII-a, editează la Arad revista litografiată ,,Jurnal matematic'', care a ajuns să fie cunoscută şi peste hotarele ţării. Pasionat şi permanent colaborator al ,,Gazetei matematice'', la al cărei concurs din 1924 obţine premiul I pe ţară, se distinge nu numai prin numărul mare de probleme rezolvate, ci şi prin probleme noi propuse şi articole conţinînd multe idei noi. Aceste preocupări ale prof. Tiberiu Popoviciu se extind asupra mai multor capitole speciale de algebră, geometrie şi analiză matematică. In multe din articolele sale din ,,Gazeta matematică'', publicate în anii studenţiei, rezolvă şi generalizează probleme propuse de Traian Lalescu, Gheorghe Ţiţeica şi Dimitrie Pompei. Aprecierea ce i se acordă din partea profesorului său Gheorghe Ţiţeica, îi dă posibilitatea să prezinte Academiei Romîne, încă în anul 1929, o lucrare asupra unei probleme de cea mai bună aproximaţie [91].

Rezultatele cele mai importante obţinute de prof. Tiberiu Popoviciu sînt axate în jurul noţiunii de funcţie convexă de ordin superior. In teza sa de doctorat ,,Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles'', ideea de bază de la care porneşte este studiul comportării funcţiilor definite pe o mulţime liniară dată, faţă de mulţimea polinoamelor de un gard dat $n \geqq 0$. Această idee este intim legată de interpolarea prin polinoame. Ea conduce la un şir de probleme centrale ale matematicii din domeniul analizei funcţionale, al teoriei constructive a funcţiilor. Este explicabil deci şi faptul că rezultatele obţinute de prof. Tiberiu Popoviciu cu ani în urmă, constituie azi un instrument de cercetare în studiul procedeelor de aproximare ale analizei, în studiul erorilor de calcul, în analiza funcțională și în studiul anumitor aspecte din teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale.

Fie $f(x)$ o funcție reală definită pe mulțimea liniară, mărginită E. Se notează cu $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ diferența divizată de ordinul n a funcției $f(x)$ pe $n+1$ puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ale mulțimii E. Prof. Tiberiu Popoviciu întroduce următoarele clase de funcții :

1°. Funcțiile de ordinul n, care au proprietatea că diferența lor divizată de ordinul $n+1$, nu schimbă semnul pe mulțimea E. Aici n poate lua valorile $-1, 0, 1, 2, \ldots$, iar mulțimea E conține cel puțin $n+2$ puncte.

2°. Funcțiile cu a n-a diferență divizată mărginită, pentru care diferența divizată de ordinul n rămîne mărginită pe mulțimea E.

3°. Funcțiile cu a n-a variație mărginită, care au proprietatea că variația

$$\sum_{i=1}^{m-n-1} \left|[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+1}; f] - [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f]\right|$$

pe orice șir ordonat de puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ ale lui E, rămîne mărginită. De aici rezultă și definiția adecuată a marginei de ordinul n și a variației totale de ordinul n, ale unei funcții $f(x)$ definite pe mulțimea E [106].

In definiția funcțiilor $f(x)$ de ordinul n, intră funcțiile convexe, neconcave, neconvexe sau concave de ordinul n pe E, după cum diferența divizată de ordinul $n+1$ este $>, \geqq, \leqq$ sau < 0 pe E. Aceasta revine la proprietatea că

$$f(x_{n+2}) - L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x_{n+2}) >, \geqq, \leqq, \text{ sau } < 0$$

pe orice sistem de $n+2$ puncte distincte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ ale lui E, $L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x)$ fiind polinomul de interpolare al lui Lagrange corespunzător funcției $f(x)$, pe punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. In felul acesta se ajunge la studiul comportării funcțiilor definite pe E, față de polinoamele de gradul n. Este un punct de vedere care tinde spre o analiză discretă a funcțiilor definite pe mulțimea E. Este deci de prevăzut că el va conduce la generalizarea în termeni finiți a multor proprietăți cunoscute în Analiză, precum și la găsirea de noi proprietăți (pentru că aspectul continuu va apare ca și caz limită al aspectului finit, în anumite condiții bine precizate). Acest punct de vedere este azi în matematică foarte important, tocmai pentru că multe probleme — de fizică, de exemplu — în care fenomenul sub toată amploarea lui este greu de studiat, se abordează prin metode care fac apel la analiza finită. Ori, pentru găsirea unui rezultat suficient de apropiat de cel exact, trebuie cunoscut bine aspectul finit al problemei (de exemplu trecerea de la ecuații diferențiale la ecuații cu diferențe).

In studiul funcțiilor convexe de ordin superior, prof. Tiberiu Popoviciu urmărește mai multe direcții de cercetare, dintre care amintim : proprietățile de descompunere a mulțimii de definiție a unei funcții de ordinul n în submulțimi consecutive [106], inegalități la care satisfac funcțiile de ordinul n, problema prelungirii funcțiilor de ordinul n, aproximarea funcțiilor de ordinul n, cea mai bună aproximație a lor în sensul lui Cebîșev, proprietăți diferențiale ale funcțiilor de ordinul n.

Dacă $f(x)$ este o funcție de ordinul $n \geqq 1$ pe mulțimea E, atunci mulțimea E se descompune în cel mult k submulțimi consecutive, astfel ca pe fiecare din ele $f(x)$ să fie de ordinul $n-k$ [106].

Orice funcție $f(x)$, cu a n-a variație mărginită, este diferența a două funcții neconcave de ordinele $-1, 0, 1, \ldots, n$, a căror variație totală de ordinul n nu întrece pe cea a funcției $f(x)$.

In cazul $n = 0$ se obține teorema clasică a lui Jordan. Unele cercetări ulterioare ale lui G. Ascoli, sînt legate de rezultatele de mai sus.

Problema prelungirii funcțiilor de ordinul n se pune în felul următor. Funcția $f(x)$, care posedă anumite proprietăți de convexitate pe mulțimea E, se zice că este prelungibilă pe mulțimea $E_1 \supset E$, dacă există o funcție $f_1(x)$, definită pe E_1, cu aceleași proprietăți de convexitate și care concide cu $f(x)$ pe E.

Prof. T. Popoviciu arată că, în general, pentru $n > 1$ problema prelungirii nu e posibilă [111]. Dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ sînt puncte ale intervalului I și $f(x)$ este de ordinul n pe mulțimea acestor puncte, atunci, pentru ca $f(x)$ să fie prelungibilă pe I, este necesar și suficent ca, oricare ar fi numerele $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, care satisfac condițiile

$$1° \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i^s = 0, \qquad s = 0, 1, \ldots, n,$$

$$2° \quad \sum_{i=1}^{r} \mu_i (x_i - x)^n \leqq 0, \quad x \in (x_r, x_{r+1}), \quad r = 1, 2, \ldots, m-1,$$

să aibă loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i f(x_i) \geqq 0.$$

Mai multe lucrări ale prof. T. Popoviciu sînt consacrate studiului local al funcțiilor de ordinul n, studiului funcțiilor de ordinul n prin segmente, și cercetării funcțiilor de ordinul n definite pe un interval. In studiul proprietăților de ordinul n pe un interval, un rol esențial îl joacă noțiunea de funcție $(n+1)$-valentă față de mulțimea polinoamelor de gradul n [128]. De această idee sînt legate diferite generalizări ulterioare făcute de alți autori, a noțiunii de funcție convexă.

In studiul inegalităților pe care le satisfac funcțiile convexe de ordin superior, prof. T. Popoviciu găsește următoarele rezultate :

Se pleacă de la inegalitatea clasică a lui Jensen

$$f\left(\frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}\right) \leqq \frac{\Sigma p_i f(x_i)}{\Sigma p_i}, \qquad p_i \geqq 0, \ \Sigma p_i > 0$$

valabilă pentru o funcție neconcavă de ordinul 1. Se caută determinarea tuturor inegalităților de forma

$$\Sigma p_i f(x_i) \geqq 0, \qquad p_i \gtreqless 0$$

valabile pentru o funcție neconcavă de ordinul n, definită pe punctele x_i sau pe un interval care conține aceste puncte, p_i fiind constante independente de $f(x)$. Condițiile necesare și suficente sînt :

$$1^\circ \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$2^\circ \quad \sum_{i=1}^{r} p_i(x_i - x_{r+1})(x_i - x_{r+2}) \ldots (x_i - x_{r+n}) \leqq 0, \quad r = 1, 2, \ldots, m-n-1,$$

dacă $f(x)$ este definită pe punctele x_i, iar dacă $f(x)$ e definită pe un interval conținînd punctele x_i, condiția 1° de mai sus și condiția

$$2^\circ \quad \sum_{i=1}^{r} p_i (x_i - x)^n \leqq 0, \quad x \in (x_r, x_{r+1}).$$

In această categorie intră inegalitatea lui K. Toda

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \geqq \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i),$$

unde $f(x)$ e neconcavă de ordinul 1 iar y_i sînt rădăcinile derivatei polinomului $\prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$.

Se notează $S_h^n f(\ ) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x + ih)$. Funcția $f(x)$ se numește convexă, neconcavă, neconvexă, concavă de ordinul n în sensul lui Jensen, după cum $S_h^{n+1}(f) >, \geqq, \leqq$ sau < 0, oricare ar fi $x, x+h, \ldots, x + (n+1)h$ $\in (a, b)$, $h > 0$. Prof. T. Popoviciu demonstrează că orice funcție mărginită sau măsurabilă, care este de ordinul n în sensul lui Jensen, pe intervallu (a, b), este de ordinul n în sensul definiției sale. Pentru $n = 1$ aceasăt proprietate a fost găsită de V. Jensen și de W. Sierpinski.

In general, în lucrările prof. T. Popoviciu studiul inegalităților ocupă un loc foarte important [182].

In capitolul din teză [106], privitor la derivatele funcțiilor de ordinul n, se adoptă ca definiție a derivatei de ordinul n a funcției $f(x)$, în punctul x_0, limita $f_n(x)$ (dacă există) a expresiei $n! [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$, cînd punctele x_i tind independent către x_0. Dacă $f_n(x)$ există în punctul x_0 al derivatei a n-a $E^{(n)}$ a mulțimii de definiție E, atunci derivata obișnuită de ordinul n a lui $f(x)$ în x_0 există și e egală cu $f_n(x_0)$. Această noțiune este mai generală decît cea obișnuită, ea permițînd definiția derivatei a n-a pe toate punctele mulțimii derivate a lui E. Rezultatele obținute în această direcție de prof. T. Popoviciu, sînt citate în cartea lui L. Schwartz asupra ,,Teoriei distribuțiilor''. Unele dintre ele completează rezultatele lui Stieltjes.

O funcție de ordinul $n > 1$ are derivate continue de ordinele $1, 2, \ldots, n-1$, în orice punct al mulțimii E', diferite de o extremitate a lui E. Derivata $f'(x)$,

a unei funcții mărginite de ordinul n ($n > 2$) pe intervalul $[a, b]$, satisface următoarele inegalități :

$$|f'(x)| < k \frac{n^2}{b-a} M, \quad |f'(x)\sqrt{(x-a)(b-x)}| < k_1 n. M,$$

$M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, k și k_1 sînt constante independente de n, iar

$$x \in [a+\lambda, b-\lambda], \quad \text{unde} \quad \lambda = b - a \frac{1 - \cos \frac{\pi}{24}}{1 + \cos \frac{\pi}{24}}.$$

Aceste inegalități sînt analoage cu cele ale lui V. A. Markoff și S. N. Bernstein.

La baza multor demonstrații date de prof. T. Popoviciu stau teoremele sale de medie pentru diferențe divizate obișnuite și pentru diferențe divizate suprapuse [194], precum și alte formule importante. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt m puncte distincte pe care $f(x)$ e definită, și numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sînt independente de $f(x)$, atunci are loc formula

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i [x_1, x_2, \ldots, x_i; f] + \sum_{i=1}^{m-n} \nu_i [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f],$$

unde μ_i și ν_i sînt numere ce nu depind de $f(x)$ [167]. Aceasta este formula de transformare a diferențelor divizate. Dacă $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ sînt $n+1$ dintre aceste puncte, atunci

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}; f] = \sum_{j-1}^{m-n} A_j [x_j\, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n}; f]$$

$$A_j \geqq 0, \ j = 1, 2, \ldots, m-n, \ \sum_{j=1}^{m-n} A_j = 1,$$

A_j independenți de $f(x)$ [106]. Aceasta este formula de medie a diferențelor divizate. In această direcție prof. T. Popoviciu a mai dat generalizarea în termeni finiți a formulei lui Leibnitz (care dă derivata a n-a a unui produs de două funcții), precum și generalizarea în termeni finiți a formulei care dă derivata de ordinul n a unei funcții compuse.

Unul dintre rezultatele cele mai importante care decurg din teoria funcțiilor convexe de ordin superior este următorul : dacă $A[f]$ este o funcțională liniară (aditivă și omogenă) definită pe mulțimea $C[a, b]$ a funcțiilor continue pe intervalul $[a, b]$, și

1° $A[1] = A[x] = \ldots = A[x^n] = 0$, $A[x^{n+1}] \neq 0$

2° $A[f] \neq 0$ oricare ar fi funcția $f(x) \in C[a, b]$, convexă de ordinul n pe $[a, b]$,

atunci pentru orice funcție $f(x) \in C[a, b]$, există $n+2$ puncte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$ astfel ca $A[f] = A[x^{n+1}][\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$. Această teoremă de medie joacă un rol important în clasificarea funcționalelor liniare definite pe $C[a, b]$. Pe baza ei, prof T. Popoviciu elaborează o teorie nouă a structurii restului în formulele de aproximare ale analizei [136, 190, 195]. La această teoremă se mai adaugă criterii practice care permit să se stabilească dacă o funcțională liniară $A[f]$ este sau nu de forma $K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$, unde K nu depinde de funcția $f(x)$.

Acest rezultat al prof. T. Popoviciu a deschis perespective noi cercetărilor în domeniul analizei numerice. In această direcție T. Popoviciu a scris un mare număr de lucrări privind forma restului în formulele de integrare și derivare numerică. In același timp teorema de medie mai sus amintită permite pătrunderea noțiunii de convexitate de ordin superior în analiza funcțională. In domeniul teoriei aproximării funcțiilor continue prin polinoame, prof. T. Popoviciu scrie în 1937 prima monografie de matematică în limba romînă [135], avînd ca obiect cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame. In această carte sînt cuprinse un mare număr de rezultate privind cea mai bună aproximație, precum și rezultate asupra polionoamelor lui S. N. Bernstein. Funcția $f(x)$ fiind continuă pe intervalul $[0,1]$ are loc relația

$$| f(x) - B_n(x) | < \frac{3}{2}\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad x \in [0, 1]$$

unde $B_n(x)$ este polinomul lui Bernstein de gradul n relativ la $f(x)$, iar $\omega(\delta)$ este modulul de oscilație al funcției $f(x)$. Tot în [135] se arată că polinoamele lui Bernstein conservă proprietățile de convexitate ale funcției $f(x)$ și se studiază convergența derivatelor polinoamelor lui Bernstein. Lucrarea [135] mai conține și generalizarea polinomului lui Bernstein pentru funcții de două variabile. Mai multe lucrări ale prof. T. Popoviciu sînt consacrate : proprietăților funcționale ale polinoamelor, studiului pseudopolinoamelor, ecuațiilor funcționale în general, unor probleme particulare de minimum, studiului distribuției rădăcinilor ecuațiilor algebrice, generalizării noțiunii de convexitate pentru funcții de mai multe variabile, generalizării noțiunii de convexitate față de un sistem Cebîșev, studiului erorilor de calcul în interpolarea prin polinoame, justificării teoretice a aplicării în practică a unor formule de interpolare.

Nu lipsesc nici problemele foarte subtile de teoria numerelor, care constituie permanent obiectul unor pasionate cercetări ale prof. T. Popoviciu (vezi [192], [193]).

Ca profesor și conducător al Secției de matematică a Filialei din Cluj a Academiei R. P. R., T. Popoviciu a depus între anii 1946—1956 o intensă activitate de îndrumare și organizare a cercetărilor matematice la Cluj. In jurul lui s-au grupat un mare număr de tineri matematicieni care în lucrările lor aduc contribuții la : extinderea noțiunii de convexitate față de mulțimi interpolatoare de funcții, interpolare prin polinoame pentru funcții de mai multe variabile, studiul restului în formulele de integrare numerică pentru funcții de mai multe variabile, studiul problemei polilocale pentru ecuații diferențiale ordinare etc.

O parte din rezultatele obținute în această direcție formează obiectul lucrărilor cuprinse în acest volum, pe care autorii lor le oferă ca omagiu profesorului T. Popoviciu. Indrumat de prof. T. Popoviciu, un colectiv de cercetători studiază diferite aspecte ale problemelor de nomografie.

In anii 1946—1956, prof. T. Popoviciu a pus bazele școlii de analiză numerică din țara noastră. Sub îndrumarea sa se studiază aspecte diferite ale problemei aproximării funcțiilor cu aplicații la calculul numeric și grafic. Una din ideile importante care se urmăresc, este aceea a organizării calculului pentru utilizarea mașinilor rapide de calcul. Acest fapt este de o deosebită însemnătate pentru dezvoltarea în viitor a matematicii la noi în țară.

Analiză numerică cartea !

Acad. Miron Nicolescu
G. Pic
D. V. Ionescu
E. Gergely
L. Németi
L. Bal
F. Radó

LISTA LUCRĂRILOR PUBLICATE

1923

1. *Generalizarea teoremei lui Franke*, Gazeta matematică, 28, 409—410.
2. *Asupra problemei 3018*, Gazeta matematică, 29, 89.
3. *Asupra triunghiurilor în care avem* $a(b + c) = b^2 + c^2$, Revista matematică din Timișoara, 3, 102—104.
4. *Asupra problemei 3124*, Gazeta matematică, 30, 94
5. *Relațiuni între unghiurile unui triunghi*, Revista matematică din Timișoara, 4, 67—69.
6. *Asupra unor ceviene într-un triunghi*, Jurnal matematic, 1, 1—5.
7. *O demonstrație a teoremei lui Simson*, Jurnal matematic, 1, 6—7.
8. *Asupra unei probleme*, Jurnal matematic, 1, 7—11.
9. *Asupra funcțiunilor pseudo-omogene*, Jurnal matematic, 1, 13—19.
10. *Generalizarea teoremelor lui Franke și Kariya*, Jurnal matematic, 1, 25—30.
11. *O chestiune de aritmetică*, Jurnal matematic, 1, 31—33.
12. *Generalizarea teoremelor lui Franke și Kariya*, Jurnal matematic, 1, 37—39.
13. *O generalizare*, Jurnal matematic, 1, 41—43.
14. *Asupra calculului modulului sistemului de logaritmi zecimali*, Jurnal matematic, 1, 44—46.
15. *Asupra triunghiurilor speciale*, Jurnal matematic, 1, 54—56.
16. *Două cubice analagmatice*, Jurnal matematic, 1, 57.
17. *Cîteva puncte, drepte și conice remarcabile într-un triunghi*, Jurnal matematic, 1, 61—66, 73—76.
18. *Asupra ecuației de gradul II*, Jurnal matematic, 1, 66—68.
19. *Asupra progresiilor cu mai multe rații*, Jurnal matematic, 1, 68—70.
20. *O teoremă de geometrie*, Jurnal matematic, 1, 77—78.

21. *O proprietate remarcabilă a dreptei lui Gauss în legătură cu un triunghi*, Jurnal matematic, 1, 78—80.
22. *Asupra polului şi polarei triunghiulare*, Jurnal matematic, 1, 90.
23. *Asupra unei teoreme din geometria triunghiului*, Jurnal matematic, 1, 81.
24. *Asupra polinoamelor lui Legendre*, Jurnal matematic, 1, 97—101.
25. *Asupra unei însumări*, Jurnal matematic, 1, 102—105, 109—113.
26. *Asupra metodei lui Bernoulli pentru aproximarea rădăcinilor unei ecuaţii algebrice*, Jurnal matematic, 1, 113—116.
27. *Asupra seriilor divergente*, Jurnal matematic, 1, 121—125.
28. *Asupra curbelor de clasa a treia analagmatice în coordonate tangenţiale triliniare*, Jurnal matematic, 1, 126—129.
29. *Determinanţi pseudo-simetrici*, Jurnal matematic, 1, 129—132.
30. *Teoreme asupra poligoanelor regulate*. Jurnal matematic, 1, 135—141.

1925

31. *Asupra suprafeţelor n-dimensionale*, Jurnal matematic, 2, 3—12.
32. *Asupra sumei puterilor asemenea a termenilor unei progresii aritmetice*, Jurnal matematic, 2, 12—17.
33. *Asupra unor determinaţi*, Jurnal matematic, 2, 17—21.
34. *Asupra transformărilor ortogonale*, Jurnal matematic, 2, 21—23.
35. *O îndreptare*, Jurnal matematic, 2, 29—34.
36. *Asupra diferenţelor finite*, Jurnal matematic, 2, 34—46, 57—61.
37. *Observări asupra unei însumări*, Jurnal matematic, 2, 46—49.
38. *O teoremă asupra triunghiurilor echibrocardiene*, Jurnal matematic, 2, 49—50.
39. *Asupra diametrelor conjugate la curbele algebrice*, Jurnal matematic, 2, 50—51.
40. *Generalizarea unei relaţii asupra combinărilor*, Jurnal matematic, 2, 68—69.
41. *Asupra restului diviziunilor prin polinoame*, Jurnal matematic, 2, 69—72.
42. *Asupra unei dezvoltări polinomiale*, Jurnal matematic, 2, 72—75.
43. *O generalizare a funcţiei gamma*, Jurnal matematic, 2, 85—92, 120—129.
44. *Asupra funcţiunii exponenţiale*, Jurnal matematic, 2, 99—105.
45. *Asupra unei integrale a lui Hermite*, Jurnal matematic 2, 106—107.
46. *Asupra funcţiunei exponenţiale*, Jurnal matematic, 2, 113—120.
47. *Asupra ecuaţiei algebrice*, Jurnal matematic, 2, 129—132.
48. *Asupra formulei binomului şi a factorialei*, Curierul matematic, 1, 36—39, 51—53.
49. *Asupra conicelor circumscrise unui triunghi*, Curierul matematic, 1, 74.
50. *Asupra unei identităţi*, Curierul matematic, 1, 134—136.
51. *Asupra unor polinoame remarcabile*. Buletinul Societăţii studenţilor în matematici, 12—19.
52. *Asupra polinoamelor ultrasferice*, Buletinul Societăţii studenţilor în matematici, 32—38.
53. *Asupra unor determinaţi şi a ecuaţiilor lor caracteristice*, Revista matematică din Timişoara, 5, 19—21.
54. *Asupra calculării discriminantului ecuaţiei de gr. III*, Revista matematică din Timişoara, 5, 71.
55. *Asupra coeficienţilor binomiali*, Revista matematică din Timişoara, 5, 99—102.

1926

56. *Asupra seriei ipergeometrice*, Curierul matematic, 1, 177—182.
57. *Asupra unor puncte coliniare*, Curierul matematic, 2, 65—68.
58. *Generalizarea unui determinant funcţional*, Curierul matematic, 2, 87.
59. *Asupra unor identităţi algebrice*, Curierul matematic, 2, 113—118.
60. *Asupra unor determinanţi şi a ecuaţiilor lor caracteristice*, Curierul matematic, 2, 161—164.
61. *Câteva proprietăţi ale polinoamelor lui Laguerre*, Buletinul Societăţii studenţilor în matematici, 25—30.
62. *Teoreme de geometria triunghiului*, Buletinul Societăţii studenţilor în matematici, 4, 21—24.
63. *Discriminantul unei ecuaţii algebrice*, Buletinul Societăţii studenţilor în matematici, 4, 35—38.

64. *Prima notă asupra seriilor lui Bertrand*, Buletinul Societăţii studenţilor în matematici, 2, 12—21.
65. *A doua notă asupra seriilor lui Bertrand*, Buletinul Societăţii studenţilor în matematici, 2, 2—7.
66. *Geometrie şi Mecanică*, Foaia matematică, 3, 151—153.
67. *Generalizarea unei proprietăţi a seriei lui „e"*. Revista matematică din Timişoara, 6, 83—85.
68. *Funcţii pseudo-simetrice*, Gazeta matematică, 31, 455.

1927

69. *Asupra unui determinant*, Curierul matematic, 2, 202—203.
70. *Asupra funcţiilor eliptice*, Curierul matematic, 3, 9—10.
71. *Asupra curbelor plane*, Curierul matematic, 3, 33—41.
72. *Asupra unor operaţii funcţionale*, Curierul matematic, 3, 69—70.
73. *Substituţiile liniare şi un sistem de ecuaţii funcţionale*, Curierul matematic, 3, 97—102.
74. *Asupra unei formule diferenţiale*, Curierul matematic, 3, 119—122.
75. *Asupra unor polinoame care formează un şir Appell*, Curierul matematic, 3, 145—152.
76. *Asupra unor polinoame remarcabile*, Arad, 93 pag. (editura autorului).
77. *Asupra formulei binomului*, Arad, 7 pag. (editura autorului).
78. *Generalizarea unui determinant*, Revista matematică din Timişoara, 7, 59—60.
79. *Asupra funcţiilor pseudo-omogene*, Revista matematică din Timişoara, 7, 109.
80. *Geometrie şi Mecanică*, Revista matematică din Timişoara, 7, 109.
81. *Asupra unui articol*, Revista matematică din Timişoara, 7, 109.
82. *Asupra unui articol*, Revista matematică din Timişoara, 7, 128.

1928

83. *Asupra unei probleme de algebră*, Curierul matematic, 3, 162—165.
84. *Asupra descompunerii unui trinom cu coeficienţii raţionali*, Revista matematică din Timişoara, 7, 195—198.
85. *Asupra geometriei unui triunghi deformabil în echilibru*, Gazeta matematică, 33, 284—289.

1929

86. *Asupra unei probleme de algebră*, Revista matematică din Timişoara, 9, 37—39.
87. *Asupra problemei 85*, Revista matematică din Timişoara, 9, 52.
88. *Asupra unei teoreme de aritmetică*, Revista matematică din Timişoara, 9, 99—101.
89. *O problemă asupra indicatorilor*, Revista matematică din Timişoara, 9, 101.
90. *Asupra unei ecuaţiuni diferentiale*, Gazeta matematică, 34, 417—420.
91. *Sur certaines polynômes minimisants*, Bull. de la Sect. sci. de L'Acad. Roumaine, 12, 133—136.

1930

92. *Asupra unei note matematice*, Revista matematică din Timişoara, 9, 128.
93. *Asupra unei probleme de aritmetică*, Revista matematică din Timişoara, 9, 128.
94. *Asupra numărului indicatorilor unui număr dat*, Gazeta matematică, 36, 86—90.
95. *Sur les indicateurs*, Bull. de l'Ecole Polytechnique de Timişoara, 3, 72—80.
96. *Remarques sur les polynômes de meuilleure approximation*, Buletinul Soc. de ştiinţe din Cluj, 5, 279—286.
97. *Sur les fonctions convexes d'une variable réelle*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris, 190, 1481—1483.

1931

98. *Asupra indicilor*, Gazeta matematică, 36, 259.
99. *Asupra unui determinant*, Gazeta matematică, 35, 405—408.
100. *Sur les suites de polynômes*, Buletinul Soc. de ştiinţe din Cluj, 5, 192—503.

1932

101. *Remarques sur les polynômes binomiaux*, Buletinul Soc. de științe din Cluj, 6, 146–148.
102. *Asupra notei 10 din Gazeta matematică, vol. 37, p. 92.*, Gazeta matematică, 38, 88.
103. *Asupra problemei 2308 și asupra notei 3 din Gazeta matematică, vol. 21, p. 17.* Gazeta matematică, 38, 131–133.
104. *Asupra polinoamelor care formează un șir Appell*, Bull. Mathematique de la Soc. Roumaine des Sciences, 33/34, 22–27.

1933

105. *Asupra notei 40 din Gazeta matematică, vol. 37, p. 446*, Gazeta matematică, 38,174–175.
106. *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Thèse, Paris, 1933; și Mathematica, 8, 1–85.

1934

107. *Asupra unei probleme din culegerea de probleme de algebră*, Gazeta matematică, 39, 351–353.
108. *Asupra mediilor aritmetice și geometrice*, Gazeta matematică, 40,155–160.
109. *Despre calculul rădăcinilor patrate*, Știință și progres, 1, 134–138.
110. *Sur un théorème de Laguerre*, Buletinul Soc. de științe din Cluj, 8, 1–4.
111. *Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Bull. Mathematique de la Soc. Roumaine des Sciences, 36, 75–108.
112. *Sur la distribution des zeros de certains polynômes minimisants*, Bul. de la Sect. Sci. de l'Acad. Roumaine, 16, 214–217.

1935

113. *Despre extragerea rădăcinii dintr-un polinom de o variabilă independentă*, Revista matematică din Timișoara, 15, 49–51.
114. *Despre funcțiile alternate de mai multe variabile independente*, Revista matematică din Timișoara, 15, 73–76.
115. *Observații asupra ecuațiilor algebrice avînd toate rădăcinile reale*, Gazeta matematică, 41, 67–68.
116. *Despre determinarea unor funcții de mai multe variabile*, Știință și progres, 1, 217–221.
117. *Remarques sur les équations algebriques dont les équations derivées ont toutes leurs racines réelles*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. de Paris, 200, 184–186.
118. *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Mathematica, 10, 49–54.
119. *Sur certaines équations fonctionnelles definissant des polynômes*, Mathematica, 10, 194–208.
120. *Quelques propriétés des équations algebriques dont les équations derivées ont toutes leurs racines réelles*, Mathematica, 11, 205–221.
121. *Sur une condition suffisante pour qu'un polynôme soit positif*, Mathematica, 11, 247–256.

1936

122. *Asupra problemei 457 din Gazeta matematică, vol. 7, pag. 84*, Gazeta matematică, 41, 285–288.
123. *Asupra curbelor plane*, Gazeta matematică, 41, 613–619.
124. *Despre o inegalitate a lui Wolstenholme*, Gazeta matematică, 42, 135–138.
125. *Sur les équations algebriques ayant toutes leurs racines réelles*, Mathematica, 9, 129–145.
126. *Remarques sur la definition fonctionnelle d'un polynôme d'une variable réelle*, Mathematica, 12, 5–12.
127. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (I)*, Mathematica, 12, 81–92.
128. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (II)*, Mathematica, 12, 227–233.
129. *Sur un problème de maximum de Stieltjes*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. de Paris, 202, 1645–1647.

130. *Sur certaines problèmes de maximum de Stieltjes*, Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sci., 38, 73–96.
131. *Sur les directions d'indetermination complète d'une fonction elliptique*, Bull. de Soc. Math. (2), 60, 196–198.

1937

132. *Asupra problemei 1058*, Gazeta matematică, 42, 248.
133. *Despre rădăcinile comune la mai multe ecuații multinoame*, Gazeta matematică, 42, 569–576.
134. *Remarques sur le maximum d'un determinant dont tout les éléments sont non-negatifs*, Bul. Soc. de șt. din Cluj, 8, 572–582.
135. *Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame*, Cluj, Ardealul, 66 pag.

1938

136. *Asupra unei metode de cuadratură aproximativă*, Gazeta matematică, 43, 246–248.
137. *Asupra notei 16 din Gazeta matematică, vol. 40, pag. 117*, Gazeta matematică, 44, 301.
138. *Sur les solutions bornées et les solutions mesurables de certaines équations fonctionnelles*, Mathematica, 14, 47–106.
139. *Sur les différences des fonctions d'une variable réelle*, Comptes Rendus de l'Inst. de Sci. de Roum., 2, 112–114.
140. *Sur quelques inegalités entre les fonctions convexes (première note)*, Comptes Rendus de l'Inst. de Sci. de Roum., 2, 449–454.
141. *Sur quelques inegalités entre les fonctions convexes (deuxième note)*, Comptes Rendus de l'Inst. de Sci. de Roum., 2, 454–458.
142. *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. de la Sect. sci. de l'Acad. Roum., 20, 45–49.
143. *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Bull. de la Sect. sci. de l'Acad. Roum., 20, 50–53.
144. *Sur le prolongement des fonctions monotones et des fonctions convexes definies sur un nombre fini de points*, Bull. de la Sect. sci de l'Acad. Roum., 20, 54–56.

1939

145. *Asupra unei probleme din teoria ecuațiilor algebrice*, Gazeta matematică, 44, 362–364.
146. *Sur quelques inegalités entre les fonctions convexes (troisième note)*, Comptes Rendus de l'Inst. des Sci. de Roumanie, 3, 396–402.
147. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (VI)*, Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique, 2, 31–40.
148. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (VII)*, Bull. de la Sect. Sci. de l'Acad. Roum., 22, 29–33.
149. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur, (VIII)*, Bull. de la Sect. Sci. de l'Acad. Roum., 22, 34–41.

1940

150. *Asupra problemei 4567*, Gazeta matematică, 45, 232–238.
151. *Asupra problemei 4258*, Gazeta matematică, 45, 302.
152. *Asupra problemei 3354*, Gazeta matematică, 45, 472–475.
153. *Incă ceva despre problema 3911*, Gazeta matematică, 45, 578–579.
154. *Asupra formelor hermitiene*, Gazeta matematică, 46, 29–31.
155. *Observație asupra problemei 3365*, Gazeta matematică, 46, 140–141.
156. *Asupra problemei 3209*, Gazeta matematică, 46, 122–130, 179–185.
157. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (III)*, Mathematica, 16, 74–86.
158. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (V)*, Bull. de la Sect. Sci. de l'Acad. Roum., 22, 351–356.

159. *Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur (I)*, Disquisitiones mathematicae et physicae, 1, 35—42.
160. *Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur, (II)*, Bull. de la Sect. Sci. de l'Acad. Roum, 22, 473—477.
161. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IV)*, Disquisitiones mathematicae et physicae, 1, 162—171.
162. *Despre șirurile monotone*, Pozitiva, 1, 41—45.

1941

163. *Asupra problemei 4385*, Gazeta matematică, 46, 237—241.
164. *Soluția și generalizarea problemei 1876*, Gazeta matematică, 46, 345—350, 512—519.
165. *Asupra problemei 2337*, Gazeta matematică, 46, 356—358.
166. *Asupra problemei 2552*, Gazeta matematică, 46, 637—638.
167. *Introduction à la théorie des différences divisées*, Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sci., 42, 65—78.
168. *Quelques remarques sur une théorème de M. D. Pompeiu*, Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sci., 43, 27—44.,
169. *Asupra poligoanelor regulate*, Pozitiva, 2, 92—97.
170. *Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur (III)*, Bull. de la Sect. sci. de l'Acad. Roum., 24, 409—416.

1942

171. *Asupra problemei 1885*, Gazeta matematică, 47, 411—413.
172. *Asupra problemei 2469*, Gazeta matematică, 48, 109—112.
173. *Notes sur les généralisations des fonctions convexes d'ordre supérieur, (IV)*, Disquisitiones mathematicae et physicae, 2, 127—148.
174. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (IX)*, Bull. Math. de la Soc. Roum. des Sci., 43, 85—141.
175. *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur (X)*, Ann. Sci. Univ. Iassy, 28, 161—207.
176. *Sur l'approximations des fonctions continues*, Ann. Sci. Univ. Iassy, 28, 208.

1944

177. *Asupra notei 14 din Gazeta matematică, XLIX, p. 239*, Gazeta matematică, 49, 343—344.

1945

178. *Asupra distribuției numerelor prime*, Gazeta matematică, 50, 241—245.
179. *Asupra unui articol*, Gazeta matematică, 50, 425—426.
180. *Asupra unor inegalități*, Gazeta matematică, 51, 81—85.
181. *Asupra indicatorilor*, Gazeta matematică, 51, 306—313.

1946

182. *Les fonctions convexes*, Actualités scientifiques et industrielles, fasc. 992, 75 pag., Paris.

1948

183. *Sur la formule des accroissements finis*, Mathematica, 23, 123—126.
184. *Sur une inegalité*, Mathematica, 23, 127—128.
185. *Sur certaines inegalités entre les zeros, supposés tous réels, d'un polynôme et ceux de sa derivée*, Ann. Sci. Univ. Iassy, 30, 191—218.

1950

186. *Asupra funcțiilor de o variabilă reală a căror mulțime de definiție este reunirea a două submulțimi de monotonie opusă*, Analele Acad. R. P. R., t. III, Mem. 1, 1—16.
187. *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei*, Lucrările ses. generale științifice a Acad. R. P. R., 183—186.
188. *Asupra demonstrației teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare*, Lucrările ses. generale a Acad. R. P. R., 1664—1667.

1951

189. *Considerațiuni teoretice asupra utilizării practice a unor formule de interpolare*, Bul. șt. Acad. R. P. R., 3, 441—449.

1952

190. *Asupra polinoamelor cu toate rădăcinile reale*, Studii și cerc. științifice, Cluj, 3, nr. 1—2, 7—10.
191. *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*, Studii și cerc. matematice, 3, nr. 1—2, 53—122.

1953

192. *Asupra unei probleme de partiție a numerelor*, Studii și cerc. științifice, Cluj, 4, nr. 1—2, 7—58.
193. *Asupra aplicării algoritmului lui Euclid pentru aflarea c. m. m. d. c. a două numere*, Studii și cerc. științifice, Cluj, 4, nr. 1—2, 59—63.

1954

194. *Folytonos függvények középértéktételeiről*, (Despre teoremele de medii ale funcțiilor continue), Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közleményei, 4, 353—356.
195. *Les polynômes de S. N. Bernstein et le problème de l'interpolation*, Congresul internațional al matematicienilor, Amsterdam.

1955

196. *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*, Studii și cerc. șt. Iași, 6, nr. 1—2, 29—58.
197. *Despre precizia calculului numeric în interpolarea prin polinoame*, Bul. științific, 7, 953—962.
198. *Despre precizia calculului numeric în interpolarea prin polinomul lui Newton cu noduri echidistante*, Studii și cerc. științifice, Cluj, 6, nr. 3—4, 20—36.
199. *Asupra unor ecuații funcționale*. Studii și cerc. științifice, Cluj, 6, nr. 3—4, 37—50.