SISTEME PFAFF DE GENUL II CU CARACTER REDUCTIBIL

DE

M. HAIMOVICI
membru corespondent al Academiei R.P.R.

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R. din 18—21 decembrie 1954.

În cadrul Institutului de Matematică al Filialei Iași, am întreprins studiul sistemelor de ecuații cu derivate parțiale din punctul de vedere al felului în care integrala generală depinde de funcțiile arbitrare. Aceasta implică și un studiu al posibilității de reducere a caracterelor acelor sisteme.

În această notă, considerăm un sistem Pfaff de genul II și specia I-a și studiem condiții suficiente pentru reducerea caracterului sistemului și metoda de a reduce efectiv caracterul, cînd condițiile sînt îndeplinite. În cazurile cînd acest caracter se reduce la unul, integrarea se reduce la aceia a unui sistem de ecuații diferențiale ordinare.

§ 1. *Sisteme de genul II și de specia I-a. Definiția unei matrice.*

1. Fie un sistem de ecuații Pfaff de genul al II-lea și specia I-a [1], [2].

$$\text{(S)} \qquad \theta_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s)$$

în n variabile. Vom presupune că în domeniul de definiție ecuațiile sistemului sînt independente și că coeficienții sînt funcții de variabilele $x_1, \ldots x_n$, care verifică condițiile cerute de teorema de existență [1], [2]. Fie s_1 caracterul sistemului. Avem, după cum se știe

$$(1.1) \qquad s + s_1 + 2 = n, \quad s_1 \leqslant s.$$

Diferențiind exterior primii membri ai ecuațiilor (S), putem scrie

$$(1.2) \qquad \begin{array}{ll} d\theta_\alpha = A_{\alpha ij}[\omega_i \omega_j]\ ^{1)} & (\text{mod. } \theta_1, \ldots, \theta_s) \\ i, j = 1, \ldots, s_1 + 2, & A_{\alpha ij} + A_{\alpha ji} = 0, \end{array}$$

[1]) Înțelegem, ca de obicei, că, dacă un indice se repetă într-un monom, se sumează după acel indice pentru toate valorile pe care el le poate lua.

unde pfaffienii ω_i sînt independenți între ei și de ω_α. Dintre formele

$$\varphi_\alpha = A_{\alpha ij}\, \omega_i(d)\, \omega_j(\delta)\,, \tag{1.3}$$

considerate ca forme liniare în $\omega_j(\delta)$ — și unde cu d s-au însemnat diferențialele corespunzătoare unui element integral generic*) — sînt liniar independente între ele tocmai s_1. Să presupunem, ceea ce nu micșorează generalitatea, că sînt primele s_1.

Notăm

$$A_{\alpha ij}\, \omega_i(d) = a_{\alpha j}(d), \quad A = \| a_{\alpha j} \|\,. \tag{1.4}$$

Matricea A este de rang s_1, primele ei s_1 linii sînt liniar independente între ele, celelalte linii depind liniar de primele s_1 și avem relația

$$a_{\alpha j}\, \omega_j(d) = 0\,, \tag{1.5}$$

care rezultă din simetria strîmbă a coeficienților $A_{\alpha ij}$.

§ 2. *Complexul elementelor plane integrale. Proprietate a unui element plan integral generic. Elemente liniare singulare; elemente liniare caracteristice. Varietăți conice de elemente caracteristice. Numărul de elemente liniare caracteristice dintr-un element plan integral generic.*

2. Un element plan integral este definit prin două elemente liniare integrale, fie $\omega(d)$, $\omega_i(\delta)$, așa fel încît să fie verificate relațiile

$$\varphi_\alpha = 0\,, \tag{2.1}$$

unde φ_α sînt dați de (1.3). Este evident că prin fiecare element liniar integral generic trece un singur element plan integral generic. Elementele plane integrale printr-un punct formează un complex liniar, de $\infty^{2(n-s-2)-s} = \infty^{s_1}$ elemente plane, definit de ecuațiile (2.1).

Două elemente liniare, care formează un element plan integral generic, se zic „asociate" între ele.

3. Elementele liniare integrale prin un punct generic P și pentru care matricea A este de rang mai mic ca s_1, sînt *singulare* [1]. Un element plan integral ale cărui toate elementele liniare sînt singulare se va numi *singular*. Dacă un element plan integral conține și elemente liniare generice, se va numi generic.

Elementele liniare integrale singulare situate pe elemente plane integrale generice, se vor numi elemente *caracteristice*.

Vom zice că un element liniar integral generic sau un element plan integral generic are o anume proprietate (P), dacă toate elementele integrale liniare resp. plane generice dintr-un domeniu *$(n-s-1)$* dimensional de elemente liniare integrale, resp *$2(n-s-2)$* $s_1 = s_1$ dimensional de elemente

*) Dacă nu se specifică contrarul, înseamnă că elementul liniar integral este presupus generic.

plane integrale, prin fiecare punct al unui domeniu de puncte cu n dimensiuni, în care ecuațiile (S) sînt independente — au proprietatea (P).

4. Elementele liniare integrale singulare prin P formează un număr de varietăți conice algebrice. Fie V o astfel de varietate, care însă are proprietatea că un element plan integral generic o intersectează într-un număr de elemente liniare.

Vom zice că V este o varietate de elemente liniare caracteristice.

Pe un element plan integral generic se găsesc cel mult s_1 elemente liniare caracteristice.

Să considerăm în adevăr elementul plan integral (presupus generic) E_2 determinat de elementele liniare integrale $E_1^{(1)}(d)$ și $E_1^{(2)}(\delta)$. Cum acestea sînt distincte, putem presupune că pentru doi anumie indici, fie s_1+1, s_1+2 — ceea ce nu micșorează generalitatea

$$\begin{vmatrix} \omega_{s_1+1}(d) & \omega_{s_1+2}(d) \\ \omega_{s_1+1}(\delta) & \omega_{s_1+2}(\delta) \end{vmatrix} \neq 0$$

și atunci, putem înlocui cele două elemente liniare prin combinații liniare ale lor așa ca

$$\omega_{s_1+1}(d) = \omega_{s_1+2}(\delta) = 0, \quad \omega_{s_1+1}(\delta) \neq 0, \quad \omega_{s_1+2}(d) \neq 0. \tag{2.2}$$

Să considerăm elementul liniar cuprins în E_2 și definit de sistemele de valori ale pfaffienilor

$$\omega_i(\Delta) = \lambda\, \omega_i(d) + \mu\, \omega_i(\delta)\,.$$

Vom avea evident

$$\begin{cases} A_{\alpha ij}\ \omega_i(\Delta)\, \omega_j(\delta) = 0\,, \\ A_{\alpha ij}\ \omega_i(\Delta)\, \omega_j(d) = 0\,. \end{cases} \tag{2.3}$$

Egalînd cu zero determinantul D al primilor s_1 coloane și primelor s_1 linii din matricea $A(\Delta)$ considerată pentru creșterile Δ, căpătăm o ecuație de gradul s_1 în λ și μ (omogenă). Dacă λ și μ verifică această ecuație determinantul D este nul. Pe de altă parte, din (2.3), urmează că elementele coloanelor K_{s_1+1} și K_{s_1+2} din $A(\Delta)$ se exprimă cu ajutorul elementelor primelor s_1 coloane $K_1 \dots, K_{s_1}$ din A, adică

$$\begin{aligned} \frac{-\omega_r(\delta)\, A_{\alpha ir}\, \omega_i(\Delta)}{\omega_{s_1+1}(\delta)} &= A_{\alpha i s_1+1}\, \omega_i(\Delta) \\ \frac{-\omega_r(d)\, A_{\alpha ir}\, \omega_i(\Delta)}{\omega_{s_1+2}(d)} &= A_{\alpha i s_1+2}\, \omega_i(\Delta)\,. \end{aligned} \qquad (r = 1, 2, \dots, s_1)$$

Deci, cum primele s_1 coloane din matricea B a primelor s_1 linii din $A(\Delta)$ sînt liniar dependente, urmează că rangul acestei matrice B, a primelor s_1 linii, este mai mic ca s_1.

Pentru ca să existe în adevăr s_1 elemente liniare integrale caracteristice în E_2, mai trebuie ca rădăcinile ecuației în λ, μ să fie distincte.

Dacă, în același caz, ecuația în λ, μ are rădăcini multiple, vom zice că ele determină elemente caracteristice multiple.

În cazul cînd $s_1 < s$, pentru ca o rădăcină (λ, μ) de ordin h să determine un element liniar integral caracteristic, va trebui ca să fie rădăcină a ecuațiilor obținute egalînd cu zero toți determinanții de ordin s_1 ai matricei primelor s_1 coloane din A.

Așa se și întîmplă, Fie E_1 *(d)* un element liniar integral cu proprietățile: a) matricea primelor s_1 linii din $A(d)$ este de rang s_1-σ; b) Prin $E_1(d)$ trec ∞^σ elemente plane E_2, generice (așa ca, pentru un element liniar conținut în E_2, matricea B să fie de rang s_1), pentru care primele s_1 ecuații $\varphi_\alpha = 0$ sînt verificate. Pentru perechile de elemente liniare conținute în E_2, vor fi deci verificate și ecuațiile $\varphi_{s_1+1} = 0, \ldots, \varphi_s = 0$. Deci E_2 sînt elemente plane integrale și E_1(d) un element liniar caracteristic al sistemului (S).

(Aceasta nu înseamnă însă că toate elementele liniare integrale care anulează determinații de ord. s_1 ai matricei B, sînt elemente liniare integrale singulare).

§ 3. *Varietăți formate din elemente liniare caracteristice. Proprietățile elementelor integrale în legătură cu acestea.*

5. Să presupunem că printr-un punct generic P există un element plan II cu σ dimensiuni, pe care se găsește o varietate V formată din elemente liniare integrale caracteristice. Un element plan integral generic E_2 taie V, deci II după un element liniar caracteristic.

Făcînd o transformare liniară asupra formelor ω putem presupune că elementul plan II este reprezentat de ecuațiile

$$\omega_{\sigma+1} = 0, \ldots, \omega_{s_1+2} = 0 . \tag{3.1}$$

6. Să considerăm un element plan integral generic E_2 definit de două elemente liniare $E_1^{(1)}$ (d) $E_1^{(2)}(\delta)$ și fie $E'_1(\lambda\,\delta + \mu\, d)$ elementul liniar situat în E_2 și în II. Coeficienții λ, μ depind de elementele liniare $E_1^{(1)}$ și $E_1^{(2)}$ dar nu de indicele i. Pentru $i > \sigma$, avînd in vedere ecuațiile (3.1), va rezulta

$$\frac{\omega_i(\delta)}{\omega_i(d)} = -\frac{\lambda}{\mu} \qquad (i > \sigma) . \tag{3.2}$$

Presupunînd că una din formele $\omega_i (i > \sigma)$ nu este identic nulă pe E_2, — de exemplu $\omega_{\sigma+1}$ — vom avea pentru orice element liniar situat pe E_2

$$\omega_{\sigma+2} = \rho_{\sigma+2}\, \omega_{\sigma+1}, \ldots, \omega_{s_1+2} = \rho_{s_1+2}\, \omega_{\sigma+1} , \tag{3.3}$$

unde coeficienții ρ depind numai de elementul plan E_2.

Mai sistematic, putem scrie

$$\omega_i = \lambda_i\, \chi \qquad (i > \sigma) \tag{3.4}$$

valabil pe un element plan generic, λ_i depinzînd numai de E_2 și χ fiind o anume formă liniară diferențială.

Dacă E_2 e situat în II, atunci λ, μ sînt nedeterminați, ca și, dealtfel, coeficienții λ_i.

Rezultatul de mai sus este valabil în particular dacă V coincide cu II

7. Reciproc, să presupunem că pe un element plan integral generic E_2, un număr de $s_1 + 2 - \sigma$ $(\sigma \leqslant s_1)$ pfaffieni $\omega_{\sigma+1}, \ldots, \omega_{s_1+2}$ sînt proporționali între ei. Rezultă că elementul plan, de ecuații

$$\omega_{\sigma+1} = 0, \ldots, \omega_{s_1+2} = 0 \tag{3.5}$$

conține o varietate V formată din elemente liniare caracteristice.

În adevăr, din ipoteză, urmează că, pe un element plan integral generic, sint verificate relații de forma (3.3) și deci acest element plan integral intersectează planul II. Fie V varietatea din II formată din elementele liniare de intersecție; ea are

$$\tau \leqslant \sigma \tag{3.6}$$

dimensiuni.

Fie varietatea Ω umplută de elementele plane integrale care trec printr-un element liniar al lui V și să presupunem că Ω are τ' dimensiuni.

Deci toate aceste elemente plane integrale umplu o varietate cu cel mult $\tau + \tau'$ —1 dimensiuni și, avînd în vedere că un element plan integral generic taie pe V, urmează

$$\tau + \tau' - 1 \geqslant s_1 + 2 ,$$

adică

$$\tau' \geqslant s_1 + 3 - \tau$$

și, după (3.6)

$$\tau' \geqslant s_1 + 3 - \sigma ,$$

adică

$$\tau' \geqslant 3 . \tag{3.7}$$

Deci V este formată din elemente liniare caracteristice.

8. Să considerăm matricea A' formată din primele σ coloane ale matricei $A = \| a_{\alpha i} \|$. Această matrice este — în ipoteza din numerele precedente — de rang σ —1 pentru un element liniar integral generic.

În adevăr, din (3,2) urmează

$$\lambda\, \omega_i(d) + \mu\, \omega_i(\delta) = 0 \tag{3.8}$$

pentru $i > \sigma$ atunci cînd $\omega_i(d)$ și $\omega_i(\delta)$ reprezintă două elemente liniare asociate. Elementul liniar $\omega_i(\Delta) = \lambda\, \omega_i(d) + \mu\, \omega_i(\delta)$ fiind asociat fiecăruia din elementele $E_1^{(1)}(d), E_1^{(2)}(\delta)$, avem

$$a_{\alpha i}\, \omega_i(\Delta) = \sum_{i=1}^{\sigma} a_{\alpha i}\, \omega_i(\Delta) = 0 ; \tag{3.9}$$

cum $\sigma \leqslant s_1$, rezultă că rangul r al matricei A' este mai mic ca σ. Acest rang nu poate fi mai mic ca σ —1, dacă cel puțin unul din pfaffienii $\omega_{\sigma+1}(d), \ldots, \omega_{s_1+2}(d)$ e diferit de zero, căci altfel, din cauza relației (1.5), ar urma că există mai mult de două relații liniar independente de forma $a_\alpha{}^i \lambda_i = 0$ și deci rangul matricei A ar fi mai mic ca s_1.

9. Să presupunem că am stabilit între pfaffienii $\omega_{\sigma+1},\ldots,\omega_{s_1+2}$ un număr de $\rho < s_1+2-\sigma$ relații liniare cu coeficienții funcții de punct. Fără a micșora generalitatea, putem presupune că aceste relații sînt:

$$\omega_{s_1+3-\rho}=0,\ldots,\omega_{s_1+2}=0. \tag{3.10}$$

Rangul matricei analoage cu A, construite pentru sistemul căpătat în acest fel, devine, în baza acestor relații, $s_1-\rho$.

Fie, în adevăr, un element liniar generic $E_1(d)$ verificînd (3.10). Matricea primelor σ coloane din A este de rang $\sigma-1$, deci între elementele acestor coloane există o relație liniară. Dacă cel puțin una din cantitățile $\omega_{\sigma+1}(d),\ldots,\omega_{s_1+2-\rho}(d)$ este nenulă, atunci relația dedusă din (1.5) și (3.10)

$$\sum_{i=1}^{s_1+2-\rho} a_{\alpha i}\,\omega_i(d)=0 \tag{3.11}$$

este distinctă de aceia dintre primele σ coloane, deci există două relații distincte între primele $s_1+2-\rho$ coloane, ceea ce demonstrează afirmația noastră.

10. Dacă $\rho=s_1+1-\sigma$, rangul matricei primelor $\sigma+1$ coloane este $\sigma-1$. În baza continuității putem deduce că și dacă $\rho=s_1+2-\sigma$, adică dacă toți $\omega_{\sigma+1},\ldots,\omega_{s_1+2}$ sînt nuli, orice matrice obținută din $\sigma-1$ dintre primele σ coloane și una din următoarele este nulă. Deci în acest caz, dacă matricea primelor σ coloane e de rang $\sigma-1$, urmează că rangul matricei A este σ-1 adică elementele liniare verificînd $\omega_{\sigma+1}(d)=\cdots=\omega_{s_1+2}(d)=0$ sînt singulare.

Dacă însă — aceste relații σ fiind satisfăcute — matricea primelor σ coloane e de rang mai mic ca $\sigma-1$, atunci s-ar putea ca elementul liniar respectiv să fie generic, dar astfel rangul matricei A a sistemului Pfaff obținut impunînd sistemului (S) condiția $\omega_{\sigma+1}=\cdots=\omega_{s_1+2}=0$ s-a redus la $\sigma-2$, adică tot $s_1-\rho$. Dealtfel, elementul plan integral, printr-un element liniar integral conținut în Π este, în acest caz, conținut în Π.

§ 4. *Proprietăți ale suprafețelor integrale generice.*

11. Fie o suprafață integrală generică V_2 (ale cărei elemente plane tangente sînt elemente plane integrale generice).

$$x_i=x_i(u_1,u_2)$$

Din cele de mai sus urmează că și pe V_2 vor fi verificate (3.3) și deci (3.4). În acestea din urmă, ω devin niște pfaffieni în două variabile u_1, u_2, iar $\lambda_{\sigma+1},\ldots$ niște funcții de u_1, u_2.

De altfel dacă pe V_2 nu toți $\omega_{\sigma+1},\ldots,\omega_{s_1+1}$ sînt nuli, putem întotdeauna presupune că am luat formele ω, așa încît pe varietatea V_2 ele să fie diferențialele unor funcțiuni g

$$\omega_i=dg_i \tag{4.1}$$

și χ să fie o diferențială exactă, $d\Upsilon$, arbitrară.

Astfel, pe aceea varietate

$$\left\{\begin{array}{l} dg_{\sigma+1}-\lambda_{\sigma+1}\,d\Upsilon=0\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ dg_{s_1+2}-\lambda_{s_1+2}\,d\Upsilon=0\end{array}\right. \tag{4.2}$$

și deci

$$\left\{\begin{array}{ll} g_{\sigma+1}=G_{\sigma+1}(\Upsilon), & \lambda_{\sigma+1}=G'_{\sigma+2}(\Upsilon)\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ g_{s_1+2}=G_{s_1+2}(\Upsilon), & \lambda_{s_1+2}=G'_{s_1+2}(\Upsilon).\end{array}\right. \tag{4,3}$$

§ 5. *Combinații liniare integrabile ale pfaffienilor ω, θ. Reducerea caracterului sistemului (S).*

12. Să presupunem că între formele $\omega_{\sigma+1},\ldots,\omega_{s_1+2}$ și θ_α există un număr de combinații liniare integrabile

$$df_\mu=h_{\mu\sigma+1}\,\omega_{\sigma+1}+\cdots+h_{\mu s_1+2}\,\omega_{s_1+2}+k'_\alpha\theta_\alpha \tag{5.1}$$
$$(\mu=s_1+3-q,\ldots,s_1+2)$$

independente în $\omega_{\sigma+1},\ldots,\omega_{s_1+2}$.

Facem atunci o transformare asupra formelor $\omega_{\sigma+1},\ldots\theta_\alpha$ așa încît să luăm drept q noi forme ω tocmai df_μ — ceea ce nu schimbă cu nimic matricea redusă. Astfel ajungem la

$$df_\mu=\omega_\mu,\qquad(\mu=s_1+3-q,\ldots,s_1+2). \tag{5.2}$$

13. După cele de mai sus (§ 4), pe orice varietate integrală generică sau vom avea $df_\mu=0$, adică f_μ = const sau toți f_μ vor fi funcții de o singură funcție γ de u_1, u_2

$$f_\mu=F_\mu(\Upsilon) \tag{5.3}$$

(Cazul precedent este particular al acestuia din urmă).

Dată fiind o curbă integrală generică *(C)* a sistemului *(S)*, dacă pe această curbă se anulează toate diferențialele df_μ, atunci și pe suprafața integrală V_2 prin *(C)* aceste diferențiale se vor anula, ceiace rezultă din considerațiile din § 4, nr. 11.

Dacă însă una diferențiale, fie df_{s_1+2} nu se anulează, atunci funcțiunile F_μ pot fi găsite din (5.3) înlocuind în f_μ și γ variabilele în funcție de parametrul curbei.

14. Să presupunem acum cunoscute funcțiile f_μ și să adăugăm sistemului *(S)* ecuațiile (5.3) unde F_μ sînt arbitrare și γ o variabilă auxiliară. În baza acestor ecuații, sistemul nostru devine un sistem *(S')* în n—q+1 variabile.

Dată fiind o integrală generică V_2 a lui *(S)*, după cele stabilite în n.-rele precedente, vom putea găsi funcțiile F_μ și γ *(u_1u_2)* așa ca (5.3) să fie verificate. Reciproc, dată o integrală V_2 generică a lui *(S')*, ea este evident integrală a lui (S).

15. Un element liniar integral generic, $E_1(d)$ al sistemului (S') verifică, pe lingă ecuaţiile (S), şi ecuaţiile

$$df_\mu = F'_\mu(\Upsilon)\, d\Upsilon \tag{5.4}$$

şi un element liniar $E_1(\delta)$ asociat cu el, verifică relaţiile (S) şi

$$\delta f_\mu = F'_\mu(\Upsilon)\, \delta\Upsilon \tag{5.5}$$

şi (1.3). Însă în baza lui (S), (5.4) şi (5.5), avind în vedere cele stabilite la nr. 10 § 3, sistemul (1.3) devine un sistem de s_1-q+1 ecuaţii liniare independente în necunoscutele $\omega, (\delta), \delta\Upsilon$ sau — dacă F_μ sint toţi nuli şi dacă există varietăţi integrale generice cu această condiţie — un sistem de $s-q$ ecuaţii liniare în necunoscutele $\omega(\delta)$.

În cazul general, deci (cind F_μ nu sint toţi constanţi) caracterul sistemului s-a redus cu $q-1$ unităţi.

Sistemul depinde de $q-1$ funcţii arbitrare, deoarece pe o varietate integrală pe care una din funcţiile f_μ nu este constantă, putem egala acea funcţie cu Υ (astfel că pentru acea valoare a lui μ să avem $F_\mu = \Upsilon$)

16. *Observaţii.* Operaţia de mai sus se poate repeta pentru toate varietăţile plane care conţin varietăţi de elemente caracteristice şi obţinem astfel reducerea maximă a caracterului sistemului. Dacă acest caracter se reduce la unitate, atunci sistemul căpătat admite caracteristice de tip Cauchy. Găsirea acestuia reclamă integrarea ununi sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare, în care intră s_1-1 funcţii arbitrare, după care ne rămîne un sistem de s ecuaţii în $s+2$ variabile, a cărui integrare reclamă din nou integrarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale şi introduce încă o funcţie arbitrară.

B I B L I O G R A F I E

1. E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Paris 1945.
2. S. Finicoff, *Metod vneşnîh form Cartana*, Moscova 1948

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Система Пфаффа второго жанра с приведенным характером

М. ХАИМОВИЧ, член кoресп. академии Р. Н. Р.

Даётся система Пфаффа (S) второго жанра и первого рода с n переменными. Если в каждой точке дается плоскостный элемент П (3,1), содержащий многообразие V, образованное интегральными линейными характеристическими элементами (особые элементы, лежащие в этих плоскостях), тогда на одном плоскостном интегральном элементе, формы $\omega_{\sigma+1}$ являются пропорциональными, т. е. имеет (3.3), или (3,4) где χ форма Пфаффа и обратно.

Устанавливая несколько линейных соотношении между формами $\omega_{\sigma+1}$, характер системы внешных квадратичних форм (1.2) уменьшается на столько же единиц.

Матрица A' первых σ столбцов матрицы A (1.4) имеет ранг σ-1 и это условие достаточно чтобы вышесказанное свойство имело место.

На общем интегральном многообразии V_2 можем предположить (4.1) $\omega_i = dg_i$, $\chi = dg$ для $i > \sigma$, откуда следует (4.2) и (4.3) с g_i, g функции точки многообразия. Если между формами $\omega_{\sigma+1}, \ldots$ и θ_α существует несколька интегральных линейных комбинаций (5.1), то сможем взять (5.2) и тогда имеем $df_\mu = 0$ или (5.3). Присоединяя к системе (S) уравнеия (5.3) с произвольными функциями и Υ вспомогательная переменная, наша система остается с $n-q+1$ переменными и обозначается с (S').

Системы (S) и (S') имеют одинаковый общий интеграл. В общем случае характер системы (S') менше на $q-1$ единиц чем характер системы (S (когда не все F_μ являются постоянными). После одной операции приведения возможно, что полученная система будет снова приводима этим — же методом. Если нам удалось уменьшить характер на s_1-1 единицу это, означает, что мы можем интегрировать (S) при помощи дифференциальных уравнений.

Sistèmes Pfaff du II-e genre, à caractère réductible

par

M. HAIMOVICI, m. corresp. de l'Acad. R.P.R.

Soit le système (S) du II-e genre et de I-ère espèce, à n variables.

Si, par chaque point générique, il y a un élément plan П (3.1), contenant une variété V formée d'éléments linéaires intégraux caractéristiques, (éléments singuliers situés sur des éléments plans intégraux génériques), alors, sur un élément plan intégral générique, les formes $\omega_{\sigma+1}\ldots$ sont proportionnelles, c.-à.-d. (3.3) ou (3.4) χ étant une forme de Pfaff — et réciproquement.

Dans le même cas, en établissant un nombre quelconque de relations linéaires entre les formes $\omega_{\sigma+1}\ldots$, le caractère du système de formes quadratiques extérieures (1.2) diminue d'autant d'unités.

La matrice A' des premières σ colonnes de la matrice A (1.4) est, dans la même hypothèse, de rang $\sigma-1$ et inversement; cette condition suffit pour assurer les propriétés énoncées plus haut.

Sur une variété intégrale V_2 générique on peut supposer (4.1) $\omega_i = dg_i$, $\chi = dg$ pour $i > \sigma$ et on a (4,2) et (4.3) avec g_i, g fonctions du point de la variété.

S'il y a entre les formes $\omega_{\sigma+1}\ldots$, et θ_α un nombre de combinaisons linéaires différentielles exactes (5.1), alors on pourra poser (5.2) et on aura $df_\mu = 0$ ou (5.3). En ajoutant au système (S) les équations (5.3), avec F_μ fonctions arbitraires et γ une variable auxiliaire, il reste un système à $n-q+1$ variables (désignons-le par (S')). (S) et (S') ont la même intégrale générale.

Le caractère de système (S') est plus petit que celui de (S), de $q-1$ unités, dans le cas général (quand les F_μ ne sont pas toutes constantes).

Après avoir effectué une réduction de la nature de celle décrite plus haut, il est possible que le système trouvé soit encore réductible par la même méthode. Si on a réussi à réduire le caractère de s_1-1 unités, alors le système (S) est intégrable par des équations différentielles.