DESPRE PRECIZIA CALCULULUI NUMERIC ÎN INTERPOLAREA PRIN POLINOMUL LUI NEWTON CU NODURI ECHIDISTANTE

DE

TIBERIU POPOVICIU
membru corespondent al Academiei R.P.R.

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R. din 18—21 decembrie 1954.

1. — Utilizarea practică a formulei de interpolare a lui Lagrange

$$f(x) \approx L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x), \tag{1}$$

unde în membrul al doilea avem polinomul lui Lagrange de gradul n care ia valorile funcției $f(x)$ pe nodurile (distincte) de interpolare x $v = 1,2, \ldots, n + 1$, depinde în mare măsură de forma sub care este pus acest polinom. Acest lucru este mai cu seamă important atunci cînd este vorba de calculul efectiv al valorilor polinomului pentru diferitele valori ale variabilei x. Aici ne ocupăm numai de cazul cînd variabila x și funcția $f(x)$ sînt reale. In acest caz pentru aflarea valorii polinomului trebuiesc efectuate un număr finit de operații elementare de adunare, scădere, înmulțire și împărțire asupra unor numere reale, deobicei fracții zecimale limitate, și într-o ordine determinată. Forma sub care se pune polinomul lui Lagrange este în legătură tocmai cu această ordine a operațiilor. In ce privește operațiile, ele se execută pe baza unor procedee cunoscute, direct sau cu mașina și care în mod practic revin la determinarea succesivă a cifrelor zecimale ale rezultatului fiecărui calcul parțial exact sau aproximativ, în parte.

Procedeul de calcul întrebuințat comportă erori inerente din cauză că calculele succesive se fac cu aproximație, de ex., din cauza limitării la un anumit număr de zecimale ale rezultatelor parțiale obținute. Aceste erori se reflectă asupra rezultatului final, determinînd o corecție care, în problema de interpolare considerată, va trebui adăugată la corecțiile provenite din erorile de care sînt afectate datele problemei (adică valorile funcției pe noduri și, eventual, nodurile și chiar punctul pe care se interpolează).

In această lucrare ne vom ocupa de delimitarea erorilor de calcul, în calculul valorilor polinomului lui Lagrange, într-un caz particular important, des utilizat în practică. Considerațiuni analoage se pot face și în alte cazuri.

2. — Vom presupune că nodurile sînt echidistante. Atunci, prin o transformare simplă, problema de interpolare se pune sub forma egalității aproximative

$$f(a+xh) \approx \sum_{n=0}^{n} \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!} \Delta_h^{\nu} f(a) \quad {}^{*)} \tag{2}$$

unde coeficienții $\Delta_h^{\nu} f(a)$ se calculează cu ajutorul tabloului de diferențe ale valorilor $f(a+\nu h)$, $\nu = 0,1,\ldots, n$ ale funcției $f(x)$ pe noduri.

Calculul valorii polinomului

$$L(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!} \Delta_h^{\nu} f(a), \tag{3}$$

pentru o valoare dată a lui x, se face pe baza schemei

$$y_{\nu+1} = \Delta_h^{n-\nu} f(a) + \frac{x-n+\nu}{n-\nu+1} y_\nu, \quad \nu=0,1,\ldots,n \quad (y_0=0). \tag{4}$$

Atunci

$$y_{n+1} = L(x). \tag{5}$$

Intr-o astfel de schemă de calcul însă, în mod practic, fiecare număr $y_{\nu+1}$ se calculează aproximativ, folosind valorile aproximative deja obținute ale numerelor precedente $y_1,\ldots, y_{\nu-1}, y_\nu$. Dacă notăm cu $\bar{y}_\nu$ valoarea aproximativă astfel calculată a lui y_ν și cu c_ν corecția respectivă, succesiunea de calcule se va face, în loc de (4), pe baza schemei

$$\bar{y}_{\nu+1} + c_{\nu+1} = \Delta_h^{n-\nu} f(a) + \frac{x-n+\nu}{n-\nu+1} \bar{y}_\nu, \quad \nu=0,1,\ldots,n \quad (\bar{y}_0=0) \tag{6}$$

Avem atunci

$$L(x) = \bar{y}_{n+1} + c, \tag{7}$$

unde corecția c este dată de formula

$$c = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!} c_{n-\nu+1}. \tag{8}$$

3. — Dacă eroarea absolută maximă în calculul valorilor aproximative ale numerelor y_ν este $\leqq \varepsilon$, deci dacă

$$|c_\nu| \leqq \varepsilon, \quad \nu = 1,2,\ldots,n+1 \tag{9}$$

*). Expresia $\frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!}$ nu are sens pentru $\nu = 0$. In suma considerată această expresie este înlocuită cu 1 pentru $\nu = 0$. O convenție analoagă se face și pentru formulele (3), (8), (11), (19), 29).

avem

$$|c| \leqq \varepsilon K_1(x), \tag{10}$$

unde

$$K_1(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left| \frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\nu!} \right|. \tag{11}$$

Formula de interpolare (2) este avantajoasă în special cînd x este aproape de 0. Această afirmație este justificată, de ex., de cercetările noastre anterioare asupra utilizării practice a formulelor de interpolare [1].

Este deci suficient să studiem aici cazul cînd $0 < x < 1$. Avem atunci

$$K_1(x) = 2 - \frac{(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{n!}, \quad x \in (0,1) \tag{12}$$

și se vede că $K_1(x)$ este crescător în intervalul (0,1). Rezultă că

$$1 = K_1(0) < K_1(x) < K_1(1) = 2, \quad x \in (0,1), \tag{13}$$

deci

$$|c| < 2\varepsilon. \tag{14}$$

Un tablou al valorilor lui $K_1(x)$ poate fi utilizat în practică pentru obținerea unei delimitări mai bune.

Dăm mai jos tabloul valorilor lui $K_1(x)$ pentru $x = v.10^{-1}$ $v = 1,2,\ldots,9$ și $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Tabloul 1

$x \backslash n$	2	3	4	5	6
0,1	145	1735	1941625	21027925	2234412625
0,2	28	328	3616	387136	4075648
0,3	405	4645	5046625	53438275	5576636125
0,4	52	584	6256	655552	6785152
0,5	625	6975	7265625	75390625	7744140625
0,6	72	776	8096	832448	8492032
0,7	805	8505	8766625	89392975	9063046125
0,8	88	912	9296	940864	9487488
0,9	945	9615	9701625	97553325	9792032625

In acest tablou valorile sînt calculate exact și nu figurează decît partea lor zecimală. Partea întreagă este evident 1 peste tot. Pentru o valoare a lui x care nu figurează în tablou, se delimitează superior $K_1(x)$ prin valoarea sa pentru valoarea imediat superioară a lui x care figurează în tablou. Este clar că pentru $0{,}9 < x < 1$, nu putem obține pe această cale o delimitare mai bună decît (14). In practică este suficient să luăm niște valori aproximative convenabile ale valorilor care figurează în tablou.

4. — Formula (10) dă pentru c delimitarea

$$-\varepsilon\,\mathrm{K}_1(x) \leqq c \leqq \varepsilon\,\mathrm{K}_1(x) \tag{15}$$

inferioară și superioară. Cînd natura calculului indică anumite condiții suplimentare verificate de corecțiile c_ν, o analiză mai amănunțită permite să precizăm aceste delimitări.

Să presupunem că sîntem în cazul în care $0 < x < 1$ și, ceea ce se întîmplă des în practică, că numerele y_ν sînt pozitive. Aceasta va avea loc aproape totdeauna cînd $\Delta_h^\nu f(a)$, $\nu = 0,1,\ldots,n$ sînt numere pozitive. Pentru a calcula produsul

$$\frac{x-n+\nu}{n-\nu+1}\,\bar{y} \tag{16}$$

se calculează întotdeauna întîi o valoare aproximativă, de ex. prin lipsă, a valorii sale absolute, care în cazul nostru este

$$\left|\frac{x-n+\nu}{n-\nu+1}\right|\bar{y}_\nu . \tag{17}$$

Acest caz are loc, de ex., dacă se calculează numerele (17) cu un număr oarecare de zecimale exacte.

Dacă presupunem că $c_1 = 0$, ceea ce practic este acceptabil deoarece presupunem aici că valorile funcției pe noduri nu sînt afectate de erori vedem că în condițiile de mai sus corecțiile $c_2, c_3, \ldots, c_n$ sînt $\leqq 0$ (și $\geqq -\varepsilon$ iar $c_{n+1} \geqq 0$ (și $\leqq \varepsilon$).

Vom avea atunci

$$-\varepsilon[\mathrm{K}_1(x)-\mathrm{K}_2(x)] \leqq c \leqq \varepsilon\,\mathrm{K}_2(x) \tag{18}$$

unde

$$\mathrm{K}_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{x(1-x)(2-x)\ldots(2\nu-1-x)}{(2\nu)!} \tag{19}$$

5. Pentru delimitarea lui $\mathrm{K}_2(x)$ observăm că pentru $n = 2$ avem $\mathrm{K}_2(x) = 1$ iar pentru $n > 2$ putem scrie

$$\mathrm{K}_2(x) = 1 + x\mathrm{K}_3(x) \tag{20}$$

unde

$$\mathrm{K}_3(x) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(1-x)(2-x)\ldots(2\nu-1-x)}{(2\nu)!} \tag{21}$$

Funcția $\mathrm{K}_3(x)$ este descrescătoare în intervalul (0,1) și vom putea utiliza un tablou de valori ale funcției $\mathrm{K}_3(x)$ pentru delimitarea lui $\mathrm{K}_2(x)$ cu ajutorul formulei (20).

Dacă formăm un tablou al valorilor lui $\mathrm{K}_3(x)$, pentru valorile ξ_ν $\nu = 0,1,\ldots, m-1$ $(m > 1)$ ale variabilei, unde

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{m-1} < 1, \quad \xi_m = 1 \tag{22}$$

și dacă x nu figurează în acest tablou, formula (20) ne dă delimitarea

$$\mathrm{K}_2(x) < 1 + x\mathrm{K}_3(\xi_i) \tag{23}$$

presupunînd că $\xi_i < x < \xi_{i+1}$.

Trebuie să observăm că din (13) și din faptul că $\mathrm{K}_1(x) - \mathrm{K}_2(x) > 0$ rezultă că

$$\mathrm{K}_2(x) < 2, \tag{24}$$

așa că pentru $\xi_i < x < \xi_{i+1}$, delimitarea (23) nu ne va da o delimitare mai bună decît delimitarea imediată (24) decît dacă $x\mathrm{K}_3(\xi_i) < 1$. Deci pentru ca tabloul construit să dea o delimitare mai bună decît (24), pentru orice $0 < x < 1$, este necesar și suficient ca să avem

$$\xi_{i+1}\,\mathrm{K}_3(\xi_i) < 1, \quad i = 0,1,\ldots, m-1 \tag{25}$$

În particular, prima condiție (25) se scrie

$$\xi_1 \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{1}{2\nu} < 1 \tag{26}$$

care, din cauza divergenței seriei armonice, nu este verificată pentru n destul de mare. Dacă deci numerele ξ_ν, $\nu = 0,1,\ldots, m-1$ sînt date, pentru n destul de mare, condițiile (25) nu sînt toate verificate. Aceste condiții sînt însă verificate dacă, de ex., ξ_ν sînt punctele care împart intervalul (0,1) în 10 părți egale și dacă $n \leqq 8$. Pentru aceste valori ale lui ξ_ν și n avem următorul tablou de valori ale funcției $\mathrm{K}_3(x)$:

Tabloul 2

x \ n	3,5	5,6	7,8
0,0	5	75	$91\overline{6}$
0,1	45	656625	788245125
0,2	4	568	670144
0,3	35	483875	561477875
0,4	3	404	461408
0,5	25	328125	369140625
0,6	2	256	$283925\overline{3}$
0,7	15	187375	205053375
0,8	1	122	131856
0,9	05	059625	$063702791\overline{6}$

In acest tablou valorile sînt calculate exact și nu figurează decît partea lor zecimală. Partea întreagă este peste tot egală cu 0. Pentru a delimita pe $\mathrm{K}_2(x)$ cu ajutorul formulei (20), pentru o valoare a lui x care nu figurează în tablou, se ia din tablou valoarea lui $\mathrm{K}_3(x)$ pentru valoarea lui x imediat inferioară și care figurează în tablou. Se verifică că condițiile (25) sînt satisfăcute în aceste cazuri. In practică se pot lua, bineînțeles și aici niște valori aproximative prin adaos convenabile ale valorilor din tablou.

Pentru $n = 3,4$, în multe cazuri, se poate obține direct delimitarea lui $\mathrm{K}_2(x)$ destul de ușor cu ajutorul formulei

$$\mathrm{K}_2(x) = 1 + \frac{x(1-x)}{2} = \frac{(1+x)(2-x)}{2}. \tag{27}$$

6. Pentru delimitarea numărului $K_1(x) - K_2(x)$ observăm că el este egal cu x pentru $n = 2,3$ iar pentru $n > 3$ se poate scrie

$$K_1(x) - K_2(x) = xK_4(x), \tag{28}$$

unde

$$K_4(x) = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(1-x)(2-x)\ldots(2\nu-x)}{(2\nu+1)!} \tag{29}$$

este o funcție descrescătoare în intervalul $(0,1)$. Se pot face observații analoage, cu cele de mai sus, relativ la utilizarea unui tablou al valorilor lui $K_4(x)$ pentru delimitarea lui $K_1(x) - K_2(x)$ prin formula (28). Din formula (13) și din $K_2(x) > 1$ rezultă

$$K_1(x) - K_2(x) < 1, x \in (0,1) \tag{30}$$

și condițiile pentru ca tabloul să dea o delimitare mai bună decît (30), pentru $\xi_i < x < \xi_{i+1}$ sînt ca $xK_4(\xi_i) < 1$. Aici ξ_ν sînt numerele (22). Dacă $i = m - 1$ această condiție cu siguranță nu este verificată pentru orice x deoarece $K_4(\xi_{m-1}) > 1$. În cazul acesta nu poate fi deci vorba decît ca tabloul să dea o delimitare mai bună decît (30) pentru orice $0 < x \leq \xi_{m-1}$ și orice $\xi_{m-1} \leq x < \dfrac{1}{K_4(\xi_{m-1})}$. Condițiile necesare și suficiente pentru ca să fie astfel se scriu

$$\xi_{i+1} K_4(\xi_i) < 1, \ i = 0, 1, \ldots, m-2. \tag{31}$$

Dăm mai jos, în tabloul 3, valorile lui $K_4(x)$ pentru valorile lui x care împart intervalul $(0,1)$ în 10 părți egale și pentru $4 \leq n \leq 9$.

Tabloul 3

x \ n	4,5	6,7	8,9
0,0	$\overline{3}$	$5\overline{3}$	$\overline{6761804}$
0,1	285	4461675	5571044625
0,2	24	38288	4675136
0,3	$198\overline{3}$	$2974008\overline{3}$	$3605917458\overline{3}$
0,4	16	23488	2808064
0,5	125	1796875	2119140625
0,6	$0\overline{93}$	$13141\overline{3}$	$1529557\overline{3}$
0,7	065	0896675	$103052555\overline{3571428}$
0,8	04	05408	0614016
0,9	$018\overline{3}$	$0243008\overline{3}$	$0272717958\overline{3}$

În acest tablou figurează părțile zecimale exacte ale valorilor funcției $K_4(x)$. Partea întreagă este peste tot egală cu 1. Delimitarea lui $K_1(x) -$

$-K_2(x)$ cu ajutorul lui (28) utilizînd acest tablou, se face în acelaș fel cum s-a procedat la delimitarea lui $K_2(x)$ cu ajutorul tabloului 2.

Condițiile (31) sînt îndeplinite în aceste cazuri. In felul arătat mai sus tabloul 3 dă o delimitare mai bună decît (30) pentru

$$\begin{cases} 0 < x < 0{,}981996\ldots & (n = 4,5) \\ 0 < x < 0{,}976275\ldots & (n = 6,7) \\ 0 < x < 0{,}973452\ldots & (n = 8,9) \end{cases} \tag{32}$$

respectiv.

7. Vom da și un exemplu numeric. Să calculăm prin interpolare o valoare aproximativă a lui f (24,4584), funcția $f(x)$ avînd valorile din tabloul 4 de mai jos, tablou care conține și diferențele succesive ale acestor valori

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^4	Δ^5
24,4	0,216198561343				
		168272307			
24,5	0,216366833650		745715		
		169018022		768	
24,6	0,216535851672		746483		5
		169764505		773	
24,7	0,216705616177		747256		
		170511761			
24,8	0,216876127938				

În acest tablou, pentru simplificare, valorile de pe coloanele diferențelor sînt înmulțite cu 10^{12}. În calcule vom lua deci și valorile funcției înmulțite cu 10^{12}. Aplicăm formula (2) luînd, $n = 4$, $a = 24{,}4$, $h = 0{,}1$, $x = 0{,}584$. Se vede ușor că în acest caz numerele y_ν sînt pozitive. Dacă calculăm numerele (17) corespunzătoare cu 1 zecimală exactă, avem

$$\bar{y}_1 = 5$$
$$768 - 0{,}604 \times 5 = 768 - 3{,}0\ldots; \quad \bar{y}_2 = 765{,}0$$
$$745715 - 0{,}472 \times 765{,}0 = 745715 - 361{,}0\ldots;$$
$$\bar{y}_3 = 745354{,}0$$
$$168272307 - 0{,}208 \times 745354{,}0 = 168272307 - 155033{,}6\ldots$$
$$\bar{y}_4 = 168117273{,}4$$
$$216198561343 + 0{,}584 \times 168117273{,}4 =$$
$$= 216198561343 + 98180487{,}6\ldots;$$
$$\bar{y}_5 = 216296741830{,}6$$

Avem deci

$$L(0{,}584) \approx 0{,}216\,296\,741\,830\,6 \tag{33}$$

Dacă aplicăm delimitarea (10) a corecției c, avem în acest caz $\varepsilon = 0{,}1$ și folosind tabloul 1, deducem

$$|c| < 0{,}1 \times 1{,}8096 < 0{,}181 \tag{34}$$

Avem deci

(35) 0,216 296 741 830 419 < L (0,584) < 0,216 296 741 830 781

prin urmare

(36) L (0,584) = 0,216 296 741 830 ...

cu 12 zecimale exacte.

Observăm că sîntem aici în cazul cînd putem aplica delimitarea (18) cu $\varepsilon = 0{,}1$. Folosind tablourile 2 şi 3 deducem

(37) K_2 (0,584) < 1 + 0,584 × 0,25 = 1,146

(38) K_1 (0,584) — K_2 (0,584) < 0,584 × 1,125 = 0,657

prin urmare

(39) — 0,0657 < c < 0,1146

şi se deduce

(40) 0,216 296 741 830 534 3 < L (0,584) < 0,216 296 741 830 714 6

care dă o delimitare mai bună şi totodată ne arată că valoarea lui L (0,584) prescurtată la 12 zecimale este

(41) 0,216 296 741 831,

aproximaţie care, faţă de datele problemei, este practic suficientă.

B I B L I O G R A F I E

1. Tiberiu Popoviciu, *Consideraţii teoretice asupra utilizării practice a unor formule de interpolare*, Bul. Şt. Sec. şt. mat. şi fiz., T. III, 441—449 (1951).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

О точности числового вычисления в интерполяции при помощи многочлена Ньютона с разноотстоящими узлами

Т. ПОПОВИЧ, член академии Р. Н. Р.

В этой работе показано как можно ограничить ошибки вычисления в вычислении значения многочлена Ньютона (3). Вычисление производится при помощи алгоритма указанного формулами (4), (5). В эффективное вычисление входят приблизительные значения $\overline{y}_\nu$ чисел y_ν, ведущие к приблизительному значению $\overline{y}_{n+1}$ значения многочлена (3), с исправлением c данным формулой (8), где c_ν являются исправлениями чисел y_ν. Потом показано, в важных частных случаях, что если x находится между 0, и 1, ограничение ошибок вычисления может быть облегчено составлением таблиц значений (Таблицы 1, 2, 3) функций $K_1(x)$, $K_3(x)$, $K_4(x)$ данных формулами (11), (21), (29). Дается и один числовой пример.

RÉSUMÉ

Sur la précision du calcul numérique dans l'interpolation par le polynome Newton à noeuds équidistantes

par

TIBERIU POPOVICIU

Dans ce travail on montre comment on peut délimiter les erreurs de calcul dans le calcul des valeurs du polynome de Newton (3). Les calculs sont effectués à l'aide de l'algorithme donné par les formules (4), (5). Dans les calculs interviennent des valeurs approximatives $\overline{y}_\nu$ des nombres y_ν et nous obtenons ainsi la valeur approximative $\overline{y}_{n+1}$ de la valeur du polynome (3) avec la correction c donnée par la formule (8), où c_ν sont les corrections des nombres y_ν. On montre ensuite, dans des cas particuliers importants, que si x est compris entre 0 et 1, la délimitation des erreurs de calcul peut être facilitée par la construction de tableaux (les tableaux 1, 2, 3) des valeurs des fonctions $K_1(x)$, $K_3(x)$, $K_4(x)$ données par les formules (11), (21), (29). On donne aussi un exemple numérique.