ASUPRA UNOR ECUAŢII FUNCŢIONALE

DE

TIBERIU POPOVICIU

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R. din 18—21 dec. 1954.

I.

1. — Să considerăm $n+1$ funcţii de o variabilă reală,

$$f_0(x),\ f_1(x),\ldots,\ f_n(x), \tag{1}$$

uniforme şi definite pe o aceeaşi mulţime liniară E.

Se zice că funcţiile (1) sînt *liniar dependente* pe E dacă se pot găsi $n+1$ numere (reale) c_i, $i=0,1,\ldots$, nu toate nule, astfel ca să avem $\sum_{i=0}^{n} c_i f_i(x) = 0$, oricare ar fi $x \in E$.

Rezultă imediat că dacă E are mai puţin de $n+1$ puncte, funcţiile (1) sînt totdeauna liniar dependente.

Să notăm cu

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\end{pmatrix} = \| f_{j-1}(x_i) \|_{i,j=1,2,\ldots,n+1} \tag{2}$$

determinantul valorilor funcţiilor (1) pe punctele $x_i \in E$, $i=1,2,\ldots,n+1$ (pentru fixarea ideilor i este indicele liniilor iar j al coloanelor). In particular

$$V\begin{pmatrix} 1, x, x^2, \ldots, x^n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\end{pmatrix} = V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) .$$

este determinantul lui Vandermonde al numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, iar

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = \frac{V\begin{pmatrix} 1, x, \ldots, x^{n-1}, f \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\end{pmatrix}}{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}$$

este diferenţa divizată a funcţiei $f(x)$ pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Acestea fiind spuse avem următoarea proprietate:

Condiția necesară și suficientă ca funcțiile (1) *să fie liniar dependente pe mulțimea* E *este că să avem*

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \end{pmatrix} = 0 \tag{3}$$

oricare ar fi $x_i \in E$, $i = 1,2, \ldots, n+1$.

Condiția este evident necesară.

Suficiența condiției o putem demonstra prin inducție completă. Pentru $n = 0$ proprietatea se verifică imediat. Va fi deci destul să arătăm că, presupunind proprietatea adevărată pentru n funcții, ea va fi adevărată și pentru $n + 1$ funcții. Trebuie să distingem acum două cazuri: 1° dacă funcțiile

$$f_i(x), \quad i = 0,1, \ldots, n-1 \tag{4}$$

sînt liniar dependente este evident că și funcțiile (1) vor fi liniar dependente, 2° dacă funcțiile (4) nu sînt liniar dependente, există n puncte $x_i \in E$, $i = 1,2, \ldots n$, astfel ca

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

Insă

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, x \end{pmatrix} = 0 \tag{6}$$

oricare ar fi $x \in E$. Dezvoltind determinantul din membrul intîi al formulei (6) după ultima linie și ținînd seamă de (5), se vede că funcțiile (1) sînt liniar dependente.

2. — Dacă funcțiile (1) nu sînt liniar dependente pe E se zice că ele sînt *liniar independente* pe E. In acest caz se pot găsi $n + 1$ puncte x_i, $i = 1,2, \ldots, n+1$ ale lui E astfel ca

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

O condiție mai restrictivă decît liniar independența se obține atunci cînd presupunem că neegalitatea (7) are loc *oricare ar fi* punctele distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ale lui E. Dacă această condiție este îndeplinită vom zice că funcțiile (1) formează un sistem de interpolare sau un *sistem* (I) pe mulțimea E. Este ușor de văzut că proprietatea sistemului (1) de a fi un sistem (I) este echivalentă cu proprietatea că pentru orice sistem de $n + 1$ puncte distincte x_i, $i = 1,2, \ldots, n+1$, și orice sistem de $n + 1$ numere y_i, $i = 1,2, \ldots, n+1$ corespunzătoare, există o combinație liniară a funcțiilor (1) și una singură care ia valorile y_i pe punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

3. — Pentru simplificare ne vom ocupa numai de cazul cînd E se reduce la un interval finit și închis $[a, b]$.

Dacă funcțiile *continue* (1) formează un sistem (I), determinantul (2) își păstrează semnul atita timp cit punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ nu-și schimbă ordinea lor de mărime (de ex. rămîn tot timpul în ordinea $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$). Intr-adevăr, să presupunem contrarul. Putem atunci găsi punctele x_i', x_i'', $i = 1,2, \ldots, n+1$ ale lui E astfel ca

$$x_1' < x_2' < \ldots < x_{n+1}', \quad x_1'' < x_2'' < \ldots < x''_{n+1}$$

și

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}' \end{pmatrix} > 0, \qquad V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_1'', x_2'', \ldots, x_{n+1}'' \end{pmatrix} < 0.$$

Dacă punem $x_i = \lambda x_i'' + (1-\lambda) x_i'$, $i = 1,2, \ldots, n+1$, determinantul (2) este o funcție continuă de λ pentru $\lambda \in [0,1]$, este pozitiv pentru $\lambda = 0$, și negativ pentru $\lambda = 1$. Există deci un λ, $0 < \lambda < 1$ pentru care acest determinant este nul. Insă pentru un astfel de λ punctele x_i sînt distincte, ceea ce este imposibil.

4. — Să considerăm determinanții

$$\Delta_h(x; f_0, f_1, \ldots, f_n) = V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x, x+h, x+2h, \ldots, x+nh \end{pmatrix} \tag{8}$$

deci determinanții (2) relativ la puncte x_i echidistante. Acești determinanți sînt definiți pentru orice x, $x + nh \in [a, b]$.

Dacă funcțiile (1) sînt liniar dependente, determinanții (8) sînt toți nuli. Reciproca acestei proprietăți nu este adevărată chiar dacă funcțiile (1) sînt presupuse toate continue. Astfel de ex., pentru funcțiile ($n = 2$)*).

$$\begin{aligned}
&f_0(x) = (1+x)(2+x), \ f_1(x) = 1+x, \ f_2 = -x(1+x), && x \in [-2,-1] \\
&f_0(x) = f_1(x) = f_2(x) = 0, && x \in (-1,1) \\
&f_0(x) = 1-x, \ f_1(x) = -x(1-x), \ f_2(x) = (1-x)(2-x), && x \in [1,2]
\end{aligned}$$

definite pe intervalul $[-2,2]$ avem $\Delta_h(x; f_0, f_1, f_2) = 0$, oricare ar fi $-2 \leq x$, $x + 2h \leq 2$. Totuși funcțiile $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ nu sînt liniar dependente pe intervalul $[-2,2]$, ceea ce se poate verifica ușor.

5. — Dacă

$$f_i(x) = x^i, \quad i = 0,1, \ldots, n-1 \tag{9}$$

determinantul (8) devine egal cu

$$1!\,2!, \ldots, (n-1)!\, h^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_n(x+ih).$$

*) Acest exemplu mi-a fost indicat de M. Mănescu. Se pot construi evident ușor și alte exemple analoage. Articolul de față este reproducerea aproape textuală a unui manuscris mai vechi reluat cu ocazia unei discuții avute în cadrul colectivului de nomografie al secției de matematică a Filialei din Cluj.

Se știe atunci că, pe lingă ipoteze foarte generale, soluția generală a ecuației funcționale

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(x+ih) = 0, \qquad x, x+nh \in [a, b]$$

este un polinom oarecare de gradul $n-1$. Aceasta are loc, în particular dacă $f(x)$ este o funcție continuă sau dacă $f(x)$ este o funcție mărginită pe un subinterval oricît de mic al lui $[a, b]$.

Ne propunem să generalizăm aceste rezultate pentru cazul cînd funcțiile (4) sînt continue și formează un sistem (I) pe intervalul $[a, b]$.

Este vorba deci de a rezolva ecuația funcțională

$$(10) \qquad \Delta_h(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f) = 0, \qquad x, x+nh \in [a, b]$$

în acest caz.

6. — Vom stabili întîi o identitate care ne va servi și care este generalizarea unei identități analoage relativă la diferențele divizate ale unei funcții.

Să considerăm $n+2$ puncte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ și determinantul de ordinul $2n+1$

$$\begin{vmatrix}
f_0(x_1) & f_1(x_1) & \ldots & f_{n-1}(x_1) & f(x_1) & f_0(x_1) & f_1(x_1) & \ldots & f_{n-1}(x_1) \\
f_0(x_2) & f_1(x_2) & \ldots & f_{n-1}(x_2) & f(x_2) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
f_0(x_3) & f_1(x_3) & \ldots & f_{n-1}(x_3) & f(x_3) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_0(x_{i-1}) & f_1(x_{i-1}) & \ldots & f_{n-1}(x_{i-1}) & f(x_{i-1}) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
f_0(x_i) & f_1(x_i) & \ldots & f_{n-1}(x_i) & f(x_i) & f_0(x_i) & f_1(x_i) & \ldots & f_{n-1}(x_i) \\
f_0(x_{i+1}) & f_1(x_{i+1}) & \ldots & f_{n-1}(x_{i+1}) & f(x_{i+1}) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
f_0(x_{i+2}) & f_1(x_{i+2}) & \ldots & f_{n-1}(x_{i+2}) & f(x_{i+2}) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
f_0(x_{n+1}) & f_1(x_{n+1}) & \ldots & f_{n-1}(x_{n+1}) & f(x_{n+1}) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
f_0(x_{n+2}) & f_1(x_{n+2}) & \ldots & f_{n-1}(x_{n+2}) & f(x_{n+2}) & f_0(x_{n+2}) & f_1(x_{n+2}) & \ldots & f_{n-1}(x_{n+2}) \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & f_0(x_2) & f_1(x_2) & \ldots & f_{n-1}(x_2) \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & f_0(x_3) & f_1(x_3) & \ldots & f_{n-1}(x_3) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & f_0(x_{i-1}) & f_1(x_{i-1}) & \ldots & f_{n-1}(x_{i-1}) \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & f_0(x_{i+1}) & f_1(x_{i+1}) & \ldots & f_{n-1}(x_{i+1}) \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & f_0(x_{i+2}) & f_1(x_{i+2}) & \ldots & f_{n-1}(x_{i+2}) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & f_0(x_{n+1}) & f_1(x_{n+1}) & \ldots & f_{n-1}(x_{n+1})
\end{vmatrix}$$

Aici $2 \leq i \leq n+1$ și se vede care este structura determinantului pentru $i = 2$, și $i = n+1$.

Se verifică imediat că acest determinant este egal cu 0. Dezvoltîndu-l după regula lui Laplace aplicată la primele $n+1$ coloane se găsește

$$(11) \quad V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+1} \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f \\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+2} \end{pmatrix} =$$

$$= V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+2} \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \end{pmatrix} +$$

$$+ V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+1} \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f \\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+2} \end{pmatrix}$$

și se vede cum trebuie modificată această formulă dacă $i = 2$ sau $i = n+1$.

In particular dacă avem (9) formula (11) devine formula de medie a diferențelor divizate

$$(x_{n+2}-x_1)[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+2}; f]$$
$$= (x_i - x_1)[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] + (x_{n+2}-x_i)[x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f].$$

7. — Formula (11) ne arată că

Dacă funcțiile (4) *formează un sistem* (I), *condiția necesară și suficientă pentru ca funcțiile* (1), *să fie liniar dependente pe submulțimea finită* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \geq n+1)$ *a lui* $[a, b]$ *este că să aver*

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n \\ x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-n$$

Dacă ne referim acum la ecuația (10), găsim că

Dacă funcțiile (4) *formează un sistem* (I) *și dacă funcția* $f(x)$ *verifică ecuația funcțională* (10), *avem*

$$(12) \qquad V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \end{pmatrix} = 0$$

oricare ar fi punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in [a, b]$ *care se divid rațional.*

Punctele x_i se divid rațional dacă diferențele $x_r - x_s$ sunt proporționale cu numere raționale.

Rezultă că egalitatea (12) este verificată pe orice grup de $n+1$ puncte dintre care fiecare divide rațional intervalul $[a, b]$. Dacă în plus presupunem că funcțiile (4) și funcția $f(x)$ sunt continue pe $[a, b]$, se vede, printr-un procedeu de trecere la limită, că egalitatea (12) este verificată pe orice grup de $n+1$ puncte ale intervalului, deci

Dacă funcțiile (4) *sunt continue și formează un sistem* (I) *pe intervalul* $[a, b]$, *soluția continuă generală a ecuației (10) este de forma*

$$(13) \qquad f(x) = c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}(x),$$

unde c_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *sunt constante oarecari.*

Intr-adevăr, pe de o parte, este suficient să scriem egalitatea (12) pentru n puncte fixe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și un punct variabil $x_{n+1} = x$ și, pe de altă parte, orice funcție de forma (13) verifică ecuația (10).

8. — Particularizînd funcţiile (4) obţinem diferite enunţuri particulare. Este inutil să insistăm asupra cazului (9) care este bine cunoscut [2]. Să mai semnalăm exemplele:

1°. Funcţiile

$$f_0(x) = \sin x,\ f_1(x) = \cos x$$

sunt continue şi formează un sistem (I) pe intervalul $[a, b]$ unde $0 \leq a < b \leq \pi$, $b - a < \pi$. Intr-un astfel de interval soluţia continuă generală a ecuaţiei

$$f(x) - 2\cos h f(x+h) + f(x+2h) = 0$$

este deci de forma $c_0 \sin x + c_1 \cos x$.

2°. Funcţiile

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \cos x$$

sunt continue şi formează un sistem (I) pe intervalul $[a, b]$ unde $0 \leq a < b \leq 2\pi$, $b-a < 2\pi$. Intr-un astfel de interval soluţia continuă generală a ecuaţiei

$$f(x) - f(x+3h) = (2\cos h + 1)\,[f(x+h) - f(x+2h)]$$

este deci de forma $c_0 + c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

Este uşor să generalizăm aceste exemple luînd ca şir (4)

$$\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x, \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx$$

sau

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x, \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx.$$

9. — Ne propunem acum să demonstrăm că rezultatele de la nr. 7 rămîn valabile dacă în loc să presupunem că funcţia $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, presupunem numai că ea este mărginită pe acest interval.

Să presupunem deci că funcţiile (4) sunt continue (deci uniform continue) şi formează un sistem (I) pe $[a, b]$, că ecuaţia (10) este verificată şi să presupunem deasemenea că

$$|f(x)| < M,\ x \in [a, b].$$

Vom demonstra că atunci *funcţia $f(x)$ este continuă pe intervalul* $[a, b]$.

Fie x_0 un punct al intervalului şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, $n-1$ puncte distincte şi diferite de x_0, aparţinînd deasemenea lui $[a, b]$. Avem

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, x_0 \end{pmatrix} = \lambda \neq 0.$$

Dacă observăm că $V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$ este o funcţie uniform continuă de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, rezultă imediat că oricărui număr pozitiv ε şi oricărui număr pozitiv $\mu < |\lambda|$, putem face să corespundă un număr pozitiv δ astfel că dacă $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\alpha'_i \in (\alpha_i - \delta, \alpha_i + \delta)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, să avem

$$\left| V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1} \end{pmatrix} \right| > \mu$$

$$|f(x_0)| \left| V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1} \end{pmatrix} - V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1} \end{pmatrix} \right| < \frac{\mu\varepsilon}{2}$$

$$\left| V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x, x_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \alpha'_{i+2}, \ldots, \alpha'_{n-1} \end{pmatrix} \right| < \frac{\mu\varepsilon}{2(n-1)M},\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Pentru un $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dat se pot totdeauna alege punctele α'_i astfel ca punctele $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1}, x_0, x$ să se dividă raţional. Avem atunci

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f \\ \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1}, x_0, x \end{pmatrix} = 0$$

din care se deduce

$$[f(x_0) - f(x)]\, V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= f(x_0) \left[V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1} \end{pmatrix} - V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1} \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(\alpha'_i)\, V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \\ x, x_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{i-1}, \alpha'_{i+1}, \alpha'_{i+2}, \ldots, \alpha'_{n-1} \end{pmatrix}$$

De aici rezultă că

$$|f(x_0) - f(x)| < \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mu\varepsilon}{2} + \frac{(n-1)M}{\mu} \cdot \frac{\mu\varepsilon}{2(n-1)M} = \varepsilon$$

pentru $|x_0 - x| < \delta$, ceea ce demonstrează continuitatea funcţiei $f(x)$ pe punctul x_0.

Avem deci următoarea proprietate

Dacă funcţiile (4) *sunt continue şi formează un sistem* (I) *pe intervalul* $[a, b]$, *soluţia mărginită generală a ecuaţiei (10) este de forma (13) unde* c_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *sunt constante oarecari.*

Din demonstraţia precedentă se vede că este destul chiar să presupunem numai că $f(x)$ este mărginit numai pe un subinterval oricît de mic al lui $[a, b]$. Acest lucru are loc, în particular, dacă $f(x)$ este continuu pe un singur punct.

II

10. — Vom zice că o funcţie $F(x, y)$ de două variabile reale x şi y este un *cuasi-polinom* dacă ea este suma unui număr finit de funcţii de forma $f(x)\, g(x)$, deci suma unui număr finit de produse de o funcţie numai de x şi o funcţie numai de y. Un cuasi-polinom este deci de forma

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\, g_i(y). \tag{14}$$

Dacă $F(x, y)$ are un număr suficient de derivate parțiale, condiția necesară și suficientă pentru ca să fie de forma (14) este ca să avem [3]

$$\left\| \frac{\partial^{i+j} F}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{i, j = 0, 1, \dots, m} = 0$$

In cele ce urmează nu vom face ipoteze atît de restrictive asupra lui $F(x, y)$.

11. — Vom presupune că $F(x, y)$ este definit pe o mulțime convenabilă. In general pe o mulțime E de puncte (x, y) din plan astfel că x aparține unei mulțimi liniare E_x, și y unei mulțimi liniare E_y (deci pe produsul cartezian al mulțimilor E_x și E_y).

Vom zice că m este *gradul* cuasi-polinomului (14). Este clar că orice cuasi-polinom de gradul m este deasemenea un cuasi-polinom de orice grad $m_1 > m$.

Vom zice că cuasi-polinomul (14) este de *gradul efectiv* m dacă funcțiile

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x) \tag{15}$$

sînt liniar independente pe E_x iar funcțiile

$$g_1(y), g_2(y), \dots, g \ (y) \tag{16}$$

sînt liniar independente pe E_y.

Pentru ca o funcție să fie un cuasi-polinom de gradul efectiv 1 este necesar și suficient ca ea să nu fie identic nulă și să fie produsul unei funcții numai de x cu o funcție numai de y. Funcțiile identic nule sunt singurele cuasi-polinoame de gradul efectiv 0.

Dacă cuasi-polinomul (14) nu este de gradul efectiv m, cel puțin unul din sistemele de funcții (15), (16) este format din funcții liniar dependente. De aici rezultă că

Dacă cuasi-polinomul (14) *nu este de gradul efectiv m, el este un cuasi-polinom de gradul $r < m$.*

Să presupunem, de exemplu, că funcțiile (15) nu sunt liniar independente. Atunci se poate găsi un număr r mai mic decît m și r funcții $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)$ astfel ca

$$f_i(x) = c_{i,1}\varphi_1(x) + c_{i,2}\varphi_2(x) + \cdots + c_{i,r}\varphi_r(x), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

unde $c_{i,j}$ sunt constante. Avem atunci

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x)\, \psi_i(y)$$

unde

$$\psi_i(y) = c_{1,i}g_1(y) + c_{2,i}g_2(y) + \cdots + c_{m,i}g_m(y), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Mai jos vom preciza încă noțiunea de grad efectiv al unui cuasi-polinom.

12. — Să punem

$$D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{m+1} \end{pmatrix}; F\Big) = \| F(x_i, y_j) \|_{i, j = 1, 2, \dots, m+1}$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ sînt $m + 1$ puncte ale lui E_x iar $y_1, y_2, \dots, y_{m+1}$ $m + 1$ puncte ale lui E_y.

Orice cuasi-polinom de gradul m verifică identic ecuația

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{m+1} \end{matrix}; F\right) = 0 \tag{17}$$

pe E.

Putem stabili și reciproca acestei proprietăți

Orice funcție $F(x, y)$ care verifică pe E ecuația funcțională (17) *este un cuasi-polinom de gradul m.*

Demonstrația este imediată căci dacă (17) este verificat, sau funcția $F(x, y)$ este identic nulă, sau se poate găsi un număr natural r, $1 \leq r \leq m$, r puncte $x_1, x_2, \dots, x_r \in E_x$ și r puncte $y_1, y_2, \dots, y_r \in E_y$ astfel ca

$$D = D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_r \\ y_1, y_2, \dots, y_r \end{matrix}; F\right) \neq 0 \tag{18}$$

și

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_r, x \\ y_1, y_2, \dots, y_r, y \end{matrix}; F\right) = 0 \tag{19}$$

oricare ar fi $(x, y) \in E$. Dacă se calculează valoarea lui $F(x, y)$ din (19), se obține proprietatea enunțată.

Dacă r este numărul determinat mai sus putem afirma că *funcția este un cuasi-polinom de gradul efectiv r.* Intr-adevăr, fie $A_{i,j}$ minorii determinantului din membrul întîi al neegalității (18), deci ai determinantului D. Identitatea (19) ne dă

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x)\, g_i(y)$$

unde, de exemplu,

$$f_i(x) = F(x, y_i), \quad g_i(y) = \frac{1}{D} \sum_{s=1}^{r} (-1)^{s+r-i} F(x_s, y) A_{s,i}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

și liniar independența funcțiilor $f_i(x)$ și a funcțiilor $g_i(y)$ se verifică imediat cu ajutorul neegalității (18) și a unei proprietăți bine cunoscute a determinantului adjunct.

Dacă E_x are mai puțin de $m + 1$ puncte sau dacă E_y are mai puțin de $m + 1$ puncte, orice funcție $F(x,y)$ definită pe E este un cuasi-polinom de gradul m.

13. — Putem acum pune în evidență proprietatea caracteristică a gradului efectiv al unui cuasi-polinom

Un cuasi-polinom de gradul efectiv m nu este un cuasi-polinom de gradul $m_1 < m$.

Este evident suficient să demonstrăm că cuasi-polinomul (14) de gradul efectiv m nu poate fi un cuasi-polinom de gradul $m-1$. Demonstraţia rezultă imediat din formula

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{matrix}; F\right) = V\left(\begin{matrix} f_1, f_2, \ldots, f_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \end{matrix}\right) V\left(\begin{matrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{matrix}\right).$$

Intr-adevăr dacă funcţiile (15) şi funcţiile (16) sunt liniar independente putem alege punctele x_i şi punctele y_i astfel ca membrul al doilea să fie diferit de zero.

Gradul efectiv se mai poate defini şi ca numărul minimum de termeni ai unei reprezentări de forma (14). Cu această definiţie avem proprietatea:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca cuasi-polimonul (14) să fie de grad efectiv m este ca funcţiile (15) să fie liniar independente pe E_x şi funcţiile (16) liniar independente pe E_y.

14. — Pentru simplificare să presupunem că E se reduce la dreptunghiul închis $R(a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d)$.

Putem considera funcţii $F(x, y)$ pentru care avem

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{matrix}; F\right) \neq 0 \tag{20}$$

oricare ar fi punctele $x_1, x_2, \ldots, x_m \in [a, b]$ distincte şi punctele $y_1, y_2, \ldots, y \in [c, d]$ distincte. O astfel de funcţie generalizează sistemele (1) de funcţii de o variabilă. Se vede uşor că dacă în plus $F(x, y)$ este o funcţie continuă separat în raport cu x şi în raport cu y şi dacă se presupune, de exemplu, că avem tot timpul $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, primul membru din (20) păstrează un semn constant. Pentru aceasta este destul să observăm că pentru y_i, $i = 1,2, \ldots, m$ fixe determinantul nu schimbă de semn şi că este astfel şi pentru x_i, $i = 1,2, \ldots, m$ fixe.

Să considerăm ecuaţia funcţională

$$D\left(\begin{matrix} x, x+h, x+2h, \ldots, x+mh \\ y, y+k, y+2k, \ldots, y+mk \end{matrix}; F\right) = 0 \tag{21}$$

unde x, y, h, k iau toate valorile astfel ca $a \leq x, x+mh \leq b$, $c \leq y, y+mk \leq d$ şi m este un număr natural fix.

Putem atunci demonstra proprietatea

Dacă funcţia $F(x, y)$ este continuă în raport cu fiecare din variabilele x, y şi dacă ea verifică pe R proprietatea (20) şi ecuaţia (21), atunci ea este un cuasi-polinom de gradul efectiv m.

Dacă lăsăm fixe pe y şi k, din rezultatele din partea I a acestei lucrări, deducem că

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y, y+k, \ldots, y+mk \end{matrix}; F\right) = 0$$

oricare ar fi $x_i \in [a, b]$, $i = 1,2, \ldots, m+1$. Pentru aceasta este destul să

punem $f_i(x) = F(x, y+ik)$, $i = 1,2, \ldots, m$, $f(x) = F(x, y)$. Dacă apoi fixăm punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ şi punem $f_i(y) = F(x_i, y)$, $i = 1,2, \ldots, m$, $f(y) = F(x, y)$, deducem

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{m+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{m+1} \end{matrix}; F\right) = 0$$

oricare ar fi $x_i \in [a, b]$, $y_i \in [c, d]$, $i = 1,2, \ldots, m+1$.

15. — Ne propunem să determinăm funcţiile (15) şi (16) astfel ca cuasi-polinomul (14) să fie o funcţie simetrică de x şi y.

Intr-o lucrare mai veche L. J. Magnus [1] a arătat, folosind calculul diferenţial, că în acest caz

$$f_i(x) = a_{i,1} g_1(x) + a_{i,2} g_2(x) + \cdots + a_{i,m} g_m(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{22}$$

unde $a_{i,j}$ sînt constante astfel ca $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Vom relua problema fără a face ipoteza de derivabilitate asupra funcţiilor considerate.

Vom presupune că funcţiile (15) şi (16) sunt definite pe o aceeaşi mulţime liniară e (deci că $E_x = E_y = e$), avînd cel puţin m puncte. Rezultatele lui L. J. Magnus sunt atunci generale.

Intîi este clar că dacă (22) sunt verificate (cu $a_{i,j} = a_{j,i}$) cuasi-polinomul (14) este simetric. Rămîne să examinăm reciproca acestei proprietăţi.

Să presupunem întîi că funcţiile (16) sînt liniar independente pe e. Putem atunci găsi m puncte $x_1, x_2, \ldots, x \in e$ astfel ca

$$V^* = V\left(\begin{matrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \end{matrix}\right) \neq 0.$$

Simetria lui (14) permite să scriem

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) g_i(x_k) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k) g_i(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

care ne arată că funcţiile $f_i(x)$ sunt de forma (22). Rămîne să arătăm că $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Ţinînd seamă de (22), simetria cuasi-polinomului se exprimă prin identitatea

$$\sum_{i \neq j}^{1,2,\ldots,m} (a_{i,j} - a_{j,i}) [g_j(x) g_i(y) - g_i(x) g_j(y)] = 0.$$

Dînd lui x şi y valorile x_r şi x_l respectiv deducem un sistem de $\binom{m}{2}$ ecuaţii liniare cu $\binom{m}{2}$ necunoscute $a_{i,j} - a_{j,i}$. Determinantul acestui sistem este format cu minorii de ordinul 2 ai determinantului V^*. Se ştie atunci că acest determinant este o putere a lui V^* (afară de semn, este egal cu V^{*m+1}). Rezultă că $a_{i,j} - a_{j,i} = 0$, $i, j = 1,2, \ldots, m$.

Funcţiile (22) sunt liniar independente dacă şi numai dacă determinantul coeficienţilor $a_{i,j}$ este diferit de 0. Putem dar enunţa proprietatea

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca cuasi-polinomul (14) *de gradul efectiv m, să fie simetric este ca să avem* (22) *cu determinantul* $\| a_{i,j} \|$ *simetric şi diferit| de* 0.

Dacă funcţiile (16) nu sunt liniar independente rezultatele precedente nu mai au loc.

Ştim că atunci (14) este un cuasi-polinom de un anumit grad efectiv $r < m$ şi proprietatea se aplică cuasi-polimonului pus sub forma unei sume de r produse de o funcţie numai de x cu o funcţie numai de y.

In definitiv se va deduce următoarea proprietate

Pentru ca un cuasi-polinom de două variabile x, y, să fie simetric, este necesar şi suficient ca el să fie o formă biliniară simetrică, în raport cu $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_r(x), \varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots, \varphi_r'y)$, *unde r şi funcţiile* $\varphi_i(x)$ *sunt alese convenabil.*

BIBLIOGRAFIE

1. L. J. Magnus, *„Über die Relationen der Functionen welche der Gleichung* $F_1 y \varphi_1 x + F_2 y \varphi_2 x + \cdots + F_n y \varphi_n x = F_1 x \varphi_1 y + F_2 x \varphi_2 y + \cdots + F_n x \varphi_n y$ *genugthung"*, Journal f. die Reine u. angew. Math., 5, 365—373 (1830).
2. Tiberiu Popoviciu, *„Sur les solutions bornées et les solutions mesurables de certaines, équations fonctionnelles"*, Mathematica, 14, 47—106 (1938).
3. C. Stephanos, *„Sur une catégorie d'équations fonctionnelles"* Rendic. Cric, Mat, Palermo, 18, 360—363 (1904).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

О функциональных уравнениях

Т. ПОПОВИЧ

В первой части работы показано, что если функции (4) непрерывны и проверяют неравенство (5) для всякой системы различных точек x_i интервала $[a, b]$, общее ограниченное разрешение, функционального уравнения (10) имеет форму (13), где c_i являются константами. Определитель (5) определён формулой (2), а первый член уравнения (10) формулой (8).

Во второй части работы берём функции формы (14). Эту функцию мы называем quasi многочленом степени m, степень будучи названа эффективной если функции (15), с одной стороны и функции (16), с другой стороны линейно независимы. Quasi многочлен степени охарактеризован функциональным уравнением (17), где первый член определен вначале 12-го номера.

Линейная независимость функций (15) и (16) необходима и достаточна для того чтобы m был бы эффективной степенью. Если F (x, y) непрерывен в отношении с x и y (отдельно) и проверяет идентично отношения (20) с точками x_i различными и точками y_i различными и (21), он является quasi-многочленом эффективной степени m.

В конце делаем применение определяя симметричные quasi-многочлены.

RÉSUMÉ

Sur quelques équations fonctionnelles

par

TIBERIU POPOVICIU

Dans la première partie de ce travail on démontre que si les fonctions (4) sont continues et vérifient l'inégalité (5) pour tout systéme de points distincts x_i du intervalle $[a, b]$, la solution bornée générale de l'équation fonctionnelle (10) est de la forme (13), où c_i sont des constantes. Le déterminant (5) est défini par la formule (2) et le premier membre de l'équation (10) par la formule (8).

Dans la seconde partie du travail nous considérons des fonctions de la forme (14). Nous appelons une telle fonction un quasi-polynome du degré m, et nous disons que le degré est effectf si les fonctions (15), d'une part, et les fonctions (16), d'autre part, sont linèairement indépendentes. Un quasi-polynome du degré m est caractérisé par l'équation fonctionelle (17), où le premier membru est défini au début du nr. 12. La linéaire indépendence des fonctions (15) et (16) est nécessaire et suffisante pour que m soit le degré effectif. Si $F(x, y)$ est continu par rapport x et par rapport à y (séparément), s'il vérifie identiquement les relations (20) (avec des points x distincts et des points y. distincts) et s'il vérifie aussi l'équation (21), il est un quasipolyname du degré effectif m.

Puis nous faisons une application en déterminant les quasi-polynomes symétriques.