CONDIŢII DE DEPENDENŢĂ LINEARĂ PENTRU TREI FUNCŢII

DE

FRANCISC RADO

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj, a Academiei R.P.R. din 18—21 decembrie 1954.

Se poate stabili uşor că funcţiile reale $F(x)$, $G(x)$ şi $H(x)$ atunci şi numai atunci sînt liniar dependente, dacă

$$\begin{vmatrix} F(x) & F(x+h) & F(x+k) \\ G(x) & G(x+h) & G(x+k) \\ H(x) & H(x+h) & H(x+k) \end{vmatrix} = 0.$$

x, h şi k fiind numere reale oarecari. Se pune întrebarea, dacă această condiţie rămîne suficientă şi în cazul particular $k=2h$.

Tov. prof. T. Popoviciu a dat un exemplu, care arată că răspunsul este negativ, chiar în cazul funcţiilor continue. D-sa a demonstrat că, punînd condiţia suplimentară

$$\begin{vmatrix} F(x) & F(x+h) \\ G(x) & G(x+h) \end{vmatrix} \neq 0 \ (x \text{ şi } h \text{ numere reale oarecari}),$$

ajungem la condiţii suficiente pentru dependenţa liniară a trei funcţii continue[1]).

Se pune problema, dacă această condiţie suplimentară nu s-ar putea înlocui cu condiţia ca un minor de ordinul întîi să fie totdeauna diferit de zero. Vom arăta mai mult: Dacă funcţiile continue $F(x)$, $G(x)$ şi $H(x)$ se anulează deodată numai în puncte izolate şi dacă condiţia de mai sus este verificată (în cazul $k=2h$), atunci aceste trei funcţii sînt liniar dependente. In demonstrarea acestei teoreme avem nevoie de proprietăţile unui anumit şir de vectori şi deaceea în punctul 1, se face un studiu preliminar, care însă poate avea interes şi în sine.

---

[1]) In lucrarea tov. T. Popoviciu, care apare în acest volum (p. 37), se tratează cazul unui număr oarecare de funcţii.

Vom da un exemplu, care arată că teorema nu este valabilă pentru funcții continue în general și nici pentru funcții măsurabile sau mărginite. Dacă luăm pentru $H(x)$ o funcție determinată, care nu se anulează pe axa reală, atunci teorema stabilită permite să scriem soluția continuă generală a unor anumite ecuații funcționale cu două funcții necunoscute.

1. — Să considerăm vectorul vertical

$$a_n = \begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\\ \gamma_n\end{pmatrix},$$

unde α_n, β_n și γ_n sînt numere reale nu toate trei nule și următorul șir

$$a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_n,\ \dots, \qquad (1)$$

care verifică condițiile:

$$|\, a_{n-k}\ a_n\ a_{n+k} \,| = \begin{vmatrix}\alpha_{n-k} & \alpha_n & \alpha_{n+k}\\ \beta_{n-k} & \beta_n & \beta_{n+k}\\ \gamma_{n-k} & \gamma_n & \gamma_{n+k}\end{vmatrix} = 0, \quad (0<k\leqslant n,\ n=1,2,\dots), \qquad (2)$$

Definiția I. In această notă șirul parțial

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \dots,\ a_{n_p},\ \dots \qquad (3)$$

extras din (1) este numit *lanț*, dacă

a) $|\, a_{n_p}\ a_{n_q}\ a_{n_r} \,| = 0$,

p, q și r fiind numere naturale oarecari.

b) adăugînd încă un vector al șirului (1) la șirul parțial (3) proprietatea a) nu mai are loc.

Definiția II. — Dacă pentru indicii șirului parțial (3) avem

$$n_1 \leqslant 1,\ n_p - n_{p-1} \leqslant 2,\quad (p=2,3,\dots),$$

atunci zicem că șirul parțial (3) are *proprietatea D* sau că este un *șir parțial D.*

Dintre doi termeni consecutivi ai șirului (1) cel puțin unul aparține șirului cu proprietatea D. Proprietatea D se referă la densitatea șirului parțial (3) în șirul (1).

Șirul finit $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n}$ se numește un *fragment* al șirului (1) de lungime n. Vom vorbi și despre proprietatea D a șirului parțial (3) relativă la un fragment: șirul parțial (3) are *proprietatea D în fragmentul* $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n}$, dacă dintre doi termeni consecutivi ai acestui fragment cel puțin unul aparține șirului parția. (3).

Vectorii a_m și a_n ai șirului (1) atunci și numai atunci vor fi considerați diferiți,dacă componentele lor nu sînt proporționale. Din punctul nostru de vedere vectorii

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix}k\alpha\\ k\beta\\ k\gamma\end{pmatrix}$$

sînt egali. Doi termeni din șirul (1), care reprezintă vectori egali în acest sens, vor fi notați în general cu aceiași literă. Vectorii distincți ai șirului (1) vor fi notați cu a, b, c, ...

Se arată ușor: Această convenție se poate face deoarece vectorul nul nu figurează în șirul (1). In cele ce urmează prin veste vom înțelege un vector din șirul (1).

Lema 1. — Dacă a și b sînt doi vectori diferiți și

$$|\, a\ b\ c \,| = 0, \qquad |\, a\ b\ d \,| = 0,$$

atunci avem

$$|\, a\ c\ d \,| = 0 \quad \text{și} \quad |\, b\ c\ d \,| = 0.$$

Lema 2. — Vectorul x aparține lanțului L, dacă pentru doi vectori diferiți a și b, conținuți în L, avem

$$|\, a\ b\ x \,| = 0.$$

Fie $c \in$ L, $d \in$ L. Trebue să arătăm că

$$|\, c\ d\ x \,| = 0.$$

Dacă $c=a$ și $d=b$, lema e trivială. Putem deci presupune că $c \neq a$ ($d \neq b$ se tratează la fel). Din $|\, a\ b\ x \,| = 0$ și $|\, a\ b\ c \,| = 0$ rezultă $|\, a\ c\ x \,| = 0$. Din $a \neq c$, $|\, a\ c\ x \,| = 0$ și $|\, a\ c\ d \,| = 0$ rezultă $|\, c\ d\ x \,| = 0$.

Lema 3. Dacă lanțurile L și L′ conțin doi vectori comuni diferiți, atunci ele coincid.

Fie a și b cei doi vectori comuni și x un vector oarecare. Dacă $|\, a\ b\ x \,| = 0$, atunci pe baza lemei *2*, $x \in$ L și $x \in$ L′. Dacă $|\, a\ b\ x \,| \neq 0$ atunci din definiția lanțului rezultă că vectorii a, b și x nu fac parte dintr-un acelaș lanț, deci $x \notin$ L și $x \notin$ L′.

Consecință. — Totdeauna există un lanț bine determinat, care conține doi vectori distincți ai șirului (1). Intr-adevăr totalitatea termenilor a_n, pentru care avem $|\, a\ b\ a_n \,| = 0$ formează acest lanț. El se numește *lanțul general de a și b*.

Lema. 4. — Orice lanț conține o infinitate de termeni din (1).

Să considerăm lanțul L generat de $a_m = a$ și $a_n = b$ ($m < n$ și $a \neq b$). Din ipoteza (2) și lema 2 rezultă că $a_{2n-m} \in$ L. Dacă $a_{2n-m} \neq b$, din $|\, a_n\ a_{2n-m}\ a_{3n-2m} \,| = 0$ rezultă că $a_{3n-2m} \in$ L, dacă $a_{2n-m} = b$, din $|\, a_m\ a_{2n-m}\ a_{4n-3m} \,| = 0$ rezultă $a_{4n-3m} \in$ L. Continuînd acest procedeu găsim un șir infinit de termeni cu indicii crescînzi care aparțin lanțului L.

Observație. — Am considerat dela început șirurile parțiale (3) infinite, pentrucă orice lanț este infinit.

Teorema I. — In șirul (1) există un lanț cu proprietatea D.

Demonstrație. — Presupunem că în șirul (1) avem doi vectori diferiți, căci în caz contrar teorema este evidentă.

Vom demonstra întîi teorema I. pentru fragmente: pentru orice fragment al șirului (1) există un lanț cu proprietatea D în acel fragment.

In baza ipotezei (2) teorema este adevărată pentru orice fragment de lungime 3.

Să presupunem că teorema este adevărată pentru fiecare fragment al şirului (1) de lungime n—1. Arătăm că ea este adevărată pentru fragmente de lungime n. Fie

$$a_{m+1}\,,\ a_{m+2}\,,\ \ldots,\ a_{m+n} \tag{4}$$

un asemenea fragment. Să considerăm fragmentul

$$a_{m+1}\,,\ a_{m+2}\,,\ \ldots,\ a_{m+n-1} \tag{5}$$

şi să notăm cu L^{*}_{n-1} un lanţ cu proprietatea D în fragmentul (5), iar cu L_{n-1} partea lanţului L^{*}_{n-1}, care aparţine fragmentului (5).

Fie b vectorul de la capătul din dreapta al lui L_{n-1}.

Mergînd în L_{n-1} de la dreapta la stînga, fie b_1 primul vector inîtlnit, diferit de b. Deoarece L_{n-1} are proprietatea D, unul din cei doi termeni ai fragmentului (4), care urmează imediat după b_1 spre dreapta, trebue să aparţină lui L_{n-1}, deci unul din ei este cu siguranţă b. Prin urmare avem următoarele două posibilităţi pentru aceşti termeni:

$$b_1\ b\ .\qquad \textit{sau}\qquad b_1\ .\ b$$

Vectorii b şi b_1 fiind diferiţi, din ipoteza (2) şi lema 2 rezultă că în locul punctului avem un vector din L^{*}_{n-1}. Dacă la prima posibilitate locul punctului ar fi ocupat de a_{m+n}, atunci am avea $a_{m+n} \in L^{*}_{n-1}$ şi teorema ar fi demonstrată pentru fragmentul (4); acest caz poate fi deci lăsat la o parte. Avînd în vedere că vectorii din L_{n-1}, situaţi la dreapta lui b_1 sînt egali cu b, rezultă că la amîndouă posibilităţile de sus în locul punctului avem vectorul b. Putem enunţa:

Dacă L_{n-1} conţine un vector diferit b, atunci în şirul finit a_{m+2}, a_{m+3}, ..., a_{m+n-1} sînt doi termeni consecutivi, fiecare egal cu b.

Din ipoteza (2) şi lema 2 rezultă deasemenea că termenul şirului (4), situat nemijlocit la stînga lui b aparţine lui L_{n-1}.

Să deosebim următoarele cazuri:

a) Toţi vectorii din L_{n-1} sînt egali cu b. Lanţul generat de b şi a_{m+n} satisface proprietatea D în (4).

b) Avem în L_{n-1} termeni diferiţi de b, dar ei nu au ca indici numere întregi consecutive. Fie iarăşi b_1 primul vector diferit de b, pe care-l întîlnim în L_{n-1} mergînd de la dreapta spre stînga. Am văzut că imediat la dreapta lui b_1 avem b, iar imediat la stînga un vector din L_{n-1}, deci tot b, pentrucă în cazul de faţă doi vectori din L_{n-1}, diferiţi de b, nu pot fi consecutivi. Rezultă că, suprimînd vectorul b_1, din L_{n-1} se obţine un şir finit, care încă mai are proprietatea D în (5). La fel putem suprima toţi vectorii din L_{n-1}, care sînt diferiţi de b şi obţinem un şir finit cu proprietatea D în (5). Exact ca şi în cazul a) lanţul generat de b şi a_{m+n} satisface proprietatea D în (4).

c) Avem în L_{n-1} doi termeni diferiţi de b cu indici numere întregi consecutive $> m + 1$. Să considerăm alături de (5) şi fragmentul

$$a_{m+2}\,,\ a_{m+3}\,,\ \ldots,\ a_{m+n}\ ; \tag{6}$$

în baza ipotezei de inducţie există un lanţ cu proprietatea D în (6); să notăm cu L'_{n-1} partea acestui lanţ cuprins în (6). S-a arătat mai sus că vectorul b din L_{n-} figurează pe două poziţii consecutive ale fragmentului (6), deci în baza proprietăţii D a lui L'_{n-1} avem $b \in L'_{n-1}$. Dintre cei doi termein diferiţi de b, avînd ca indici numere întregi consecutive $> m + 1$, cel puţin unul aparţine lui L'_{n-1}. Deci L_{n-1} şi L'_{n-1} au în comun doi vectori diferiţi; avînd în vedere lema 3, urmează că lanţurile din care fac parte L_{n-1} şi L'_{n-1} coincid. Este evident că, acest lanţ comun are proprietatea D pentru fragmentul (4).

d) $a_{m+1}, a_{m+2} \in L_{n-1}, a_{m+1} \neq b, a_{m+2} \neq b$ şi în L_{n-1} nu există alţi doi termeni consecutivi diferiţi de b.

Rezultă ca şi în cazul b) că în şirul finit a , a_{m+3}, ..., a_{m+n-1} din doi termeni consecutivi cel puţin unul este egal cu b; în particular $a_{m+3} = b$.

Putem presupune că avem verificate condiţii analoage pentru L'_{n-1} deoarece în caz contrar teorema ar rezulta pentru fragmentul (4), raţionînd în baza ipotezelor analoage cu *a)*, *b)* sau *c)* pentru L'_{n-1}. Dacă am avea $a_{m+} \in L'_{n-1}$, mulţimea L'_{n-1} ar avea proprietatea D în (4) şi teorema ar fi demonstrată pentru fragmentul (4), deci putem admite $a_{m+2} \in L'_{n-1}$. Rezultă că $a_{m+3} \in L'_{n-1}$, dar $a_{m+3} = b$, deci termenul situat la extremitatea stîngă a lui L'_{n-1} este b. Rolul lui b din L_{n-1} în L'_{n-1} tot b îl are. Prin urmare condiţiile analoage cu *d)* admise pentru L'_{n-1} sînt următoarele:

$$a_{m+n-1}\,,\ a_{m+n} \in L_{n-1}\,,\ a_{m+n-1} \neq b,\ a_{m+n} \neq b\ .$$

Deosebim două subcazuri:

1) $n = 2k$.

Din cei doi termeni a_{m+k}, a_{m+n+1}, situaţi în mijlocul fragmentului (4) cel puţin unul este b. Fie $a_{m+k} = b$. Atunci din

$$|\,a_{m+1}\ a_{m+k}\ a_{m+n-1}\,| = 0,$$

$a_{m+1} \neq b$ şi $a_{m+k} = b$ pe baza lemei 2 rezultă că $a_{m+n-1} \in L_{n-1}$. Mulţimile L_{n-1} şi L'_{n-1} au în comun pe b şi pe $a_{m+n-1} \neq b$, deci din lema 3 rezultă că L_{n-1} şi L'_{n-1} coincid. Teorema rezultă pentru fragmentul (4) ca şi în cazul *c)*. Dacă am avea $a_{m+k+1} = b$, s-ar raţiona în mod analog.

2) $n = 2k—1$.

In fragmentul (4) avem un termen central: a_{m+k}.

Vectorii a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+k-1} aparţin lui L_{n-1}. Intr-adevăr unul din vectorii a_{m+2i-1} şi a_{m+2i-2} $(i = 3, 4, \ldots, k—1)$ este b; fie $a_{m+2i-1} = b$. Atunci din

$$|\,a_{m+1}\quad a_{m+i}\quad a_{m+2i-1}\,| = 0\,,$$

$a_{m+1} \neq b$ și $a_{m+2i-1} = b$ pe baza lemei 2 rezultă că $a_{m+i} \in L_{n-1}$, pentru $i = 3,4,\ldots,k-1$, iar a_{m+1}, $a_{m+2} \in L_{n-1}$ pe baza ipotezei *d)*. Dacă avem $a_{m+2i-2} = b$, atunci raționăm în mod analog.

La fel vectorii $a_{m+k+1}, a_{m+k+2}, \ldots, a_{m+n}$ aparțin lui L'_{n-1}.

Arătăm că și în acest caz lanțurile din care fac parte L_{n-1} și L'_{n-1} coincid. Să presupunem contrariul. Atunci L_{n-1} și L'_{n-1}, avînd în comun pe b, nu pot avea alt vector comun.

Vectorul central $a_{m+k} \neq b$. Intr-adevăr, dacă $a_{m+k} = b$, atunci din $|\,a_{m+1} \;\; a_{m+k} \;\; a_{m+n}\,| = 0$ și $a_{m+1} \neq b$ rezultă că $a_{m+n} \in L_{n-1}$. Dar $a_{m+n} \in L'_{n-1}$ și astfel L_{n-1} și L'_{n-1} au în comun un vector diferit de b, ceeace nu se poate.

Deoarece $a_{m+k} \neq b$, nu putem avea $a_{m+k} \in L_{n-1}$, $a_{m+k} \in L'_{n-1}$. Să presupunem pentru fixarea ideilor $a_{m+k} \in L'_{n-1}$. Fie $p = \left[\frac{k+n}{2}\right]$. Dacă $p = \frac{k+n}{2}$, atunci în virtutea ipotezei (2)

$$|\,a_{m+k} \;\; a_{m+p} \;\; a_{m+n}\,| = 0, \tag{7}$$

iar dacă $p = \frac{k+n-1}{2}$, atunci

$$|\,a_{m+k} \;\; a_{m+p} \;\; a_{m+n-1}\,| = 0. \tag{7'}$$

Din (7) rezultă $a_{m+p} = a_{m+n}$, iar din (7′) $a_{m+p} = a_{m+n-1}$, deoarece în caz contrar pe baza lemei 2 ar rezulta $a_{m+k} \in L'_{n-1}$, ceeace e imposibil. In amîndouă cazuri $a_{m+p} \neq b$, deci $a_{m+p} \bar{\in} L_{n-1}$. Fie $q = \left[\frac{p}{2}\right] + 1$; avem

$$|\,a_{m+1} \;\; a_{m+q} \;\; a_{m+p}\,| = 0 \quad \text{sau} \quad |\,a_{m\,2} \;\; a_{m+q} \;\; a_{m+p}\,| = 0;$$

urmează ca mai înainte $a_{m+q} \bar{\in} L'_{n-1}$. Fie $p' = \left[\frac{q+n}{2}\right]$, rezultă ca mai sus $a_{m+p'} \bar{\in} L_{n-1}$. Continuînd acest procedeu găsim două șiruri de vectori:

$$a_{m+p}, a_{m+p'}, \ldots, a_{m+p^{(r)}}, \ldots$$

$$a_{m+q}, a_{m+q'}, \ldots, a_{m+q^{(r)}}, \ldots,$$

pentru care avem

$$p > p' > \ldots > m+k; \; q > q' > \ldots m + \left[\frac{k+1}{2}\right]. \tag{8}$$

Termenii $a_{m+q^{(r)}}$ respectiv $a_{m+q^{(r)}}$ fiind diferiți de b, între doi termeni de acest fel se intercalează cel puțin un termen egal cu b. Din acest motiv diferența între două numere naturale oarecari ale șirurilor (8) este cel puțin 2, ceeace evident este imposibil. Ipoteza $a_{m+k} \bar{\in} L_{n-1}$ conduce în mod analog la contradicție.

Teorema este demonstrată pentru orice fragment finit al șirului (1). Deocamdată nu este exclus ca lanțul cu proprietatea D în fragmentul a_0 $a_1, \ldots, a_n$ să varieze, atunci cînd n crește.

In demonstrarea teoremei pentru întregul șir (1) considerăm două cazuri:

a) In fiecare fragment $a_0, a_1, \ldots, a$ al șirului (1) există un șir parțial D, format din repetarea aceluiași vector.

Acest vector, pentru n suficient de mare e independent de n, dacă șirul (1) nu e de forma $b, c, b, c, \ldots b, c, \ldots$ Există deci în orice caz un șir parțial D în (1) cu toți termenii egali cu un vector fix b. Lanțul generat de b și un vector diferit de b are proprietatea D în șirul (1).

b) In șirul (1) există fragmentul

$$a_0, a_1, \ldots, a_N, \tag{9}$$

astfel ca fiecare șir parțial cuprinzînd numai vectori egali nu are proprietatea D în (9).

Am demonstrat că există un lanț cu proprietatea D în (9). Nu avem decît un număr finit de asemenea lanțuri. Intr-adevăr un astfel de lanț conține doi vectori diferiți din (9). Avînd în vedere că doi vectori determină în mod unic lanțul care îi conține, rezultă că numărul lanțurilor distincte cu proprietatea D în (9) este cel mult egal cu numărul perechilor care se pot forma din elementele fragmentului (9), adică este cel mult $\binom{n}{2}$. Să notăm aceste lanțuri cu $L_1, L_2, \ldots, L_k$ (se poate vedea ușor că în realitate $k \leq 4$).

Arătăm că printre lanțurile L_i $(i = 1,2,\ldots k)$ există unul cu proprietatea D în fragmentul $a_0, a_1, \ldots, a_n$, oricare ar fi n. Să presupunem contrariul; pentru fiecare L_i putem găsi un indice $n_i > N$ astfel ca L_i să nu aibă proprietatea D în $(a_0, a_1, \ldots, a_{n_i})$. Fie $m > n_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$. Există un lanț L^*, care are proprietatea D în fragmentul $F = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$. Evident lanțul L^* are proprietatea D și în orice fragment al fragmentului F, deci și în $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$; *rezultă* că L^* coincide cu un L_i $(i = 1,2,\ldots,k)$; dar niciun L nu are proprietatea D în F, deoarece nu o are într-un anumit fragment al lui F. Am ajuns la contradicție, deci există un lanț L, care are proprietatea D în fragmentul $a_0, a_1, \ldots, a_n$, oricare ar fi numărul natural n.

Lanțul L are evident proprietatea D în șirul (1). Teorema I este complet demonstrată.

Dacă șirul (1) se înlocuiește cu un șir infinit în amîndouă direcții

$$\ldots, a_{-r}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \tag{1'}$$

cu proprietatea

$$|\,a_{n-k} \;\; a_n \;\; a_{n+k}\,| = 0 \tag{2'}$$

verificată pentru n și k numere întregi oarecari atunci teorema I. este încă valabilă.

Intr-adevăr, pentru

$$a_{-r}, \ldots, a_{-1}, a_0, \ldots, a_n, \ldots \tag{10}$$

există un lanț cu proprietatea D și se poate arăta ca mai sus și mai mult: există un lanț cu proprietatea D în șirul (10), care nu depinde de r. Acest lanț are proprietatea D în (1′). Putem enunța:

Teorema I'. — *Dacă şirul (1') de vectori verticali diferiţi de vectorul nul verifică condiţiile (2'), atunci există un şir parţial*

$$\ldots, a_{n_{-q}}, \ldots, a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots, a_{n_p}, \ldots, \tag{11}$$

care are următoarele proprietăţi:

a) $$| \, a_{n_p} \quad a_{n_q} \quad a_{n_r} \, | = 0,$$

pentru p, q şi r numere întregi oarecari;

b) *dintre doi termeni consecutivi ai şirului (1') cel puţin unul aparţine şirului parţial (11).*

2. — Următoarea teoremă a fost demonstrată pentru cazul a n funcţii de tov. prof. T. Popoviciu, stabilind o formulă de medie relativă la determinantul $| \, f \; (x_1) \; f \; (x_2) \ldots f_i \; (x_n) \, |$. Dăm mai jos o altă demonstraţie. În această notă ne ocupăm numai cu trei funcţii, dar se vede că demonstraţia de mai jos se extinde imediat pentru un număr oarecare de funcţii.

Teorema II. — *Dacă funcţiile reale continiue $F(x)$, $G(z)$ şi $H(x)$ verifică condiţiile*

$$\begin{vmatrix} F(x) & F(x+h) & F(x+2h) \\ G(x) & G(x+h) & G(x+2h) \\ H(x) & H(x+h) & H(x+2h) \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

şi

$$\begin{vmatrix} F(x) & F(x+h) \\ G(x) & G(x+h) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{13}$$

pentru x şi h numere reale oarecari, atunci funcţiile $F(x)$, $G(x)$ şi $H(x)$ sînt liniar dependente.

Pentru orice x şi h sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} A\,F(x) &+ B\,G(x) &= H(x) \\ A\,F(x+h) &+ B\,G(x+h) &= H(x+h) \\ A\,F(x+2h) &+ B\,G(x+2h) &= H(x+2h) \end{aligned}$$

determină în mod unic necunoscutele A şi B, care sînt funcţii continue de x şi h:

$$B = B(x,h)$$
$$A = A(x,h)$$

Avînd în vedere condiţia (13), A şi B pot fi determinaţi fie din primele două ecuaţii, fie din ultimele două ecuaţii ale sistemului de mai sus, deci

$$A(x,h) = A(x+h,h).$$

La fel putem determina pe A şi B din prima şi a treia ecuaţie a sistemului, deci

$$A(x,h) = A(x,2h).$$

Iterind aceste două relaţii, găsim

$$A(x,h) = A(x+mh,h)$$
$$A(x,h) = A(x,2^n h),$$

unde m şi n sînt numere întregi oarecari. De aici se deduce:

$$A(x,h) = A\left(x, \frac{h}{2^n}\right) = A\left(x + \frac{m}{2^n} h, \frac{h}{2^n}\right) = A\left(x + \frac{m}{2^n} h, h\right).$$

Să fixăm pe h. Numerele $\frac{m}{2^n}$ formează o mulţime densă pe axa reală. Funcţia continuă $A(x,h)$ are o valoare constantă pe această mulţime, deci nu depinde de x. Putem nota $A(x,h) = A(h)$ şi la fel $B(x,h) = B(h)$.

Avem

$$A(h) \,.\, F(x) + B(h) \,.\, G(x) = H(x)$$

pentru orice x şi h. Punînd $h = h_0$, găsim că $H(x)$ este o combinaţie lineară a funcţiilor $F(x)$ şi $G(x)$. Teorema este demonstrată.

3. — *Teorema III.* — *Dacă funcţiile continue $F(x)$, $G(x)$ şi $H(x)$ verifică condiţia (12) pentru x şi h numere reale oarecari şi dacă ele nu se anulează deodată, atunci sînt liniar dependente.*

Presupunem că funcţiile $G(x)$ şi $H(x)$ sînt liniar independente, deci există x_1 şi x_2 astfel:

$$\begin{vmatrix} G(x_1) & G(x_2) \\ H(x_1) & H(x_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Fără a restrînge generalitatea putem admite

$$\begin{vmatrix} G(0) & G(1) \\ H(0) & H(1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

căci, dacă această relaţie nu are loc, aplicăm substituţia de variabilă independentă

$$\xi = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

care păstrează forma condiţiei (12).

Să notăm

$$a_n = \begin{pmatrix} F(x+nh) \\ G(x+nh) \\ H(x+nh) \end{pmatrix} \quad (n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).$$

Şirul de vectori, diferiţi de vectorul nul,

$$\ldots, a_{-r}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

verifică condiţia (2'). Aplicînd teorema I', găsim

$$\begin{vmatrix} F(x+ph) & F(x+qh) & F(x+mh) \\ G(x+ph) & G(x+qh) & G(x+mh) \\ H(x+ph) & H(x+qh) & H(x+mh) \end{vmatrix} = 0,$$

pentru x și h numere reale oarecari, iar $p, q, m \in M_{x, h}$, unde $M_{x, h}$ este o mulțime de numere întregi, care conține cel puțin unul dintre două numere întregi consecutive. Mulțimea $M_{x, h}$ poate să varieze odată cu x și h.

Alegem

$$x = 0$$

$$h = \frac{1}{n}$$

și notăm mulțimea $M_{0, \frac{1}{n}}$ mai scurt cu M_n; pentru $p \in M_n$ și $q \in M_n$ alegem $p = \delta_n = 0$ sau 1 (dacă $0 \in M$, atunci $\delta_n = 0$, în caz contrar $\delta_n = 1$) și $q = n + \delta_n' = n$ sau $n+1$ (dacă $n \in M_n$, $\delta_n' = 0$; dacă $n \bar{\in} M_n$ $\delta_n' = 1$). Atunci avem

$$A_n F\left(\frac{m}{n}\right) + B_n G\left(\frac{m}{n}\right) + C_n H\left(\frac{m}{n}\right) = 0, \quad m \in M_n, \tag{15}$$

unde

$$A_n = G\left(\frac{\delta_n}{n}\right) H\left(1+\frac{\delta_n'}{n}\right) - H\left(\frac{\delta_n}{n}\right) G\left(1+\frac{\delta_n'}{n}\right)$$

$$B_n = H\left(\frac{\delta_n}{n}\right) F\left(1+\frac{\delta_n'}{n}\right) - F\left(\frac{\delta_n}{n}\right) H\left(1+\frac{\delta_n'}{n}\right)$$

$$C_n = F\left(\frac{\delta_n}{n}\right) G\left(1+\frac{\delta_n'}{n}\right) - G\left(\frac{\delta_n}{n}\right) F\left(1+\frac{\delta_n'}{n}\right).$$

Fracțiile $\frac{\delta_n}{n}$ și $\frac{\delta_n'}{n} \to 0$, cînd $n \to \infty$. Folosind continuitatea funcțiilor $F(x)$, $G(x)$ *și* $H(x)$, avem

$$\lim_{n \to \infty} A_n = G(0)\, H(1) - H(0)\, G(1) = A_0$$

$$\lim_{n \to \infty} B_n = H(0)\, F(1) - F(0)\, H(1) = B_0$$

$$\lim_{n \to \infty} C_n = F(0)\, G(1) - G(0)\, F(1) = C_0$$

și

$$A_0 \neq 0. \tag{16}$$

Fie x un număr real oarecare. Considerăm următorul șir de numere raționale, care tinde către către x:

$$\frac{m_1}{1}, \frac{m_2}{2}, \ldots, \frac{m_k}{k}, \ldots \to x.$$

Fie $\varepsilon_k = 0$, dacă $m_k \in M_k$ și $\varepsilon_k = 1$ în caz contrar. Avem $m_k + \varepsilon_k \in M_k$ și

$$\lim_{k \to \infty} \frac{m_k + \varepsilon_k}{k} = x.$$

Aplicînd (15)

$$A_k F\left(\frac{m_k+\varepsilon_k}{k}\right) + B_k G\left(\frac{m_k+\varepsilon_k}{k}\right) + C_k H\left(\frac{m_k+\varepsilon_k}{k}\right) = 0,$$

și cînd $k \to \infty$, obținem

$$A_0 F(x) + B_0 G(x) + C_0 H(x) = 0,$$

care împreună cu (16) arată că, funcțiile $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ sînt liniar dependente. Teorema III este demonstrată.

4. — Extindem teorema III pentru cazul cînd funcțiile $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ au zerouri comune, dar aceștia formează o mulțime de puncte izolate.

Teorema III este valabilă și în cazul cînd mulțimea comună de definiție a funcțiilor $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ este un interval (α, β), (în loc de întreaga axă reală). Intr-adevăr în demonstrație trebuie să facem o singură schimbare: șirul de vectori (14) se reduce la un fragment al lui și teorema I' se aplică fără modificare.

Putem admite că funcțiile $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ se anulează simultan intr-un număr finit de puncte ale intervalului (α, β). Deci:

Să presupunem că funcțiile continue $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ sînt definite în intervalul (α, β), $-\infty \leqslant \alpha, \beta \leqslant +\infty$, se anulează simultan numai într-un număr finit de puncte ale intervalului (α, β) și satisfac condiția (12) pentru $\alpha < x < x\ 2\ h < \beta$. Atunci funcțiile $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ sînt liniar dependente.

Intr-adevăr, fie $N-1$ numărul zerourilor comune ale funcțiilor $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ în intervalul (α, β). Oricare ar fi x și h în șirul (14) cel mult $N-1$ termeni sînt egali cu vectorul nul. Descompunem șirul (14) în N șiruri parțiale fiecare format din termeni cu indici în progresie aritmetică de rație N. Intre aceste șiruri parțiale există cu siguranță unul în care nu intervine vectorul nul. Acest șir parțial satisface condițiile teoremei I', deci, relația (15) este valabilă, dacă acum prin M_n se înțelege o mulțime de numere întregi, care din N numere constructive conține cel puțin unul. In restul demonstrației teoremei III n-avem decît să modificăm definiția numerelor δ, δ_n' și ε_k în așa fel ca ele să fie susceptibile de valorile $0, 1, \ldots, N-1$.

Teorema IV. — Fie $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ trei funcții continue, definite pe întreaga axă reală, care verifică condiția (12) pentru x și h numere reale oarecari și care se anulează numai în puncte izolate. Atunci funcțiile $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ sînt liniar dependente.

Demonstrația. — In virtutea teoremei intermediare de mai sus în fiecare interval al axei reale funcțiile $F(x)$, $G(x)$ și $H(x)$ sînt liniar dependente. Deosebim două cazuri:

a) Există un interval (α_0, β_0) în care coeficienții A, B și C ai relației

$$A\, F(x) + B\, G(x) + C\, H(x) = 0 \quad (\alpha_0 \leq x \leq \beta_0) \tag{17}$$

sînt determinați în mod unic (făcînd abstracție de o constantă multipli_ cativă). Fie (α, β) un interval oarecare, care conţine intervalul (α_0, β_0). Relaţia de dependenţă liniară între $F(x)$, $G(x)$ şi $H(x)$ în acest interval nu poate fi decît (17), deoarece aceasta din urmă e singura posibilă în (α_0, β_0). Rezultă că (17) este valabil în orice interval, deci în orice punct al axei reale.

b) In fiecare interval (α, β) sînt verificate simultan două relaţii de dependenţă liniară (avînd coeficienţi neproporţionali). Atunci în orice punct x al intervalului (α, β) $F(x)$, $G(x)$ şi $H(x)$ sînt proporţionale cu trei numere reale fixe a, b şi c. Rezultă ca şi în cazul $a)$ că numerele a, b şi c nu depind de intervalul (α, β). In acest caz avem deci două relaţii de dependenţă liniară, verificate de orice x real.

Teorema IV este demonstrată.

5. — Exemplul următor arată că teorema III nu poate fi extinsă pentru funcţii discontinue în general.

Fie $F(x) \equiv 1$,

$$G(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \text{ este raţional} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ e iraţional} \end{cases} \qquad H(x) = \begin{cases} 1+\sin, & x \text{ raţ.} \\ 1, & x \text{ iraţ.} \end{cases}$$

Aceste funcţii verifică condiţia (12). Intr-adevăr dintre punctele x, $x+h$, $x+2h$ sau 3 sînt raţionale sau cel puţin 2 iraţionale. Pe mulţimea punctelor raţionale funcţiile noastre sînt liniar dependente, deci în cazul intîi condiţia (12) este verificată. In cazul al 2-lea determinantul (12) are două coloane egale, deci e iarăş nul. In acelaş timp funcţiile noastre sînt liniar independente.

Funcţiile $F(x)$ şi $H(x)$ fiind măsurabile şi mărginite, teorema nu se poate extinde pentru asemenea funcţii.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Условия линейной зависимости для трёх функций

ФРАНЦИСК РАДО

В этой заметке устанавливается, что следующих два условия достаточно для того, чтобы непрерывные функции $F(x)$, $G(x)$ и $H(x)$, определённые для $\infty < x < +\infty$ были бы линейно зависимыми:

а) Данные функции анулируются одновременно только в изолированных точках.

в)
$$\begin{vmatrix} F(x) & F(x+h) & F(x+2h) \\ G(x) & G(x+h) & G(x+2h) \\ H(x) & H(x+h) & H(x+2h) \end{vmatrix} = 0,$$

x и h будучи двумя какими либо реальными числами.

В демонстрации автор пользуется следующей теоремой установленной в заметке:

$$a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} \qquad (n=0,1,\ldots)$$

являются рядом вертикальных векторов, α_n, β_n и γ_n, будучи реальными числами не все три нулевых, проверяющие условие: определитель

$$| a_{n-k}\, a_n\, a_{n+k} | = 0 \qquad (0 < k \leqslant n,\ n=1,2,\ldots)$$

Тогда в ряду $\{a_n\}$ существует частичный ряд со следующими двумя свойствами:

а) Определитель образованный из трёх каких либо векторов частичного ряда является нулевым.

в) из двух последовательных терменов ряда $\{a_n\}$ хотя бы один находится в частичном ряду.

RÉSUMÉ

Conditions de dépendance linéaire pour trois fonctions

par

FR. RADO

Dans cette note l'auteur établit que les deux conditions suivantes sont suffisantes pour que les fonctions continues $F(x)$, $G(x)$ et $H(x)$, définies pour $-\infty < x < +\infty$, soient linéairement dépendantes:

a) Les fonctions données ne s'annulent simultanément que dans des points isolés.

b)
$$\begin{vmatrix} F(x) & F(x+h) & F(x+2h) \\ G(x) & G(x+h) & G(x+2h) \\ H(x) & H(x+h) & H(x+2h) \end{vmatrix} = 0,$$

x et h étant deux nombres réels quelconques.

Dans la démonstration l'auteur utilise le théorème suivant: soit

$$a_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} \qquad (n=0,1,\ldots)$$

une suite de vecteurs verticaux, α_n, β_n et γ_n, étant des nombres réels, pas nuls tous les trois, qui vérifient la condition: le déterminant

$$| a_{n+k}\, a_n\, a_{n+k} | = 0 \qquad (0 < k \leqslant n,\ n=1,2,\ldots).$$

Alors dans la suite $\{a\}$ il existe une suite partielle ayant les deux propriétés suivantes:

a) le déterminant formé de trois vecteurs quelconques de la suite partielle est nul.

b) des deux termes consécutifs de la suite $\{a_n\}$ au moins un se trouve dans la suite partielle.