ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A NOȚIUNII DE CONVEXITATE

DE

ELENA MOLDOVAN

Comunicare prezentată la sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R. din 18—21 decembrie 1954

1. Problema celei mai bune aproximații a funcțiilor continue într-un interval dat, prin funcții aparținînd unei mulțimi de funcții dinainte date, a luat în ultimul timp cele mai variate aspecte (vezi spre exemplu [1]) In cele ce urmează ne preocupă studiul anumitor proprietăți legate de cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin funcții depinzînd de un număr finit dat de parametri.

Fie

$$y = F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{1}$$

o funcție de variabila reală x și de n parametri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$, definită pentru $a \leq x \leq b$, $-\infty < a_i < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Asupra funcției (1) se fac următoarele ipoteze:

1° este continuă în raport cu totalitatea argumentelor sale în întreg domeniul său de definiție.

2° dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt n puncte distincte ale intervalului $[a, b]$, iar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt n numere arbitrare aparținînd domeniului valorilor funcției (1), atunci sistemul de ecuații

$$F(x_i; a_1, a_2, \ldots, a_n) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

cu necunoscutele $a_1, a_2, \ldots, a_n$, are soluție și această soluție este unică.

Funcția (1) supusă condițiilor 1° și 2°, definește o mulțime de funcții continue pentru $x = [a, b]$, fiecare dintre ele corespunzînd unui sistem determinat de valori ale parametrilor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Vom nota această mulțime de funcții cu $\mathcal{F}$.

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este soluția sistemului de ecuații (2), numim funcția $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ funcția interpolatoare a mulțimii de numere $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Vom folosi pentru această funcție notația

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y \mid x). \tag{3}$$

y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt totdeauna valorile unei funcții $f = f(x)$ pe nodurile x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, adică

$$f(x_i) = y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Din ipotezele 1°, 2°, făcute asupra funcției (1) rezultă o seamă de proprietăți cunoscute [1], de care ne vom folosi în cele ce urmează:

A. Diferența a două funcții distincte ale mulțimii $\mathcal{F}$ nu se poate anula în mai mult de $n-1$ puncte distincte ale intervalului $[a, b]$.

B. $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ fiind $n+1$ puncte distincte ale intervalul $[a, b]$, iar $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, $n+1$ numere arbitrare, se pot distinge următoarele două cazuri: sau toate funcțiile

$$(4) \qquad L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\; y|x), \; i = 1, 2, \ldots, n+1$$

sînt două cîte două distincte, sau, în caz contrar, avem,

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\; y\,|\,x_{n+1}) = y_{n+1}$$

funcțiile (4) confundîndu-se toate cu $L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\; y|x)$.

2. In cele ce urmează vom pune în evidență cîteva proprietăți ale funcțiilor ce aparțin mulțimii $\mathcal{F}$.

TEOREMA 1. *Dacă* E_m *este o mulțime de* m *puncte distincte ale intervalului* [a, b]

$$(5) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_m, \; m \geq n+1$$

și Y_m *o mulțime de* m *numere arbitrare* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *atunci numărul*

$$(6) \qquad L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\; y\,|\,x_0)$$

$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq m$, $x_0 > x_{i_n}$ $x_0 \in [a, b]$, *este cuprins între cel mai mic și cel mai mare dintre numerele*

$$(7) \qquad L(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1};\; y\,|\,x_0), \; j = i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1\,.$$

Teorema 1 se poate interpreta în felul următor: ordonata într-un punct $x_0 > x_{i_n}$ al intervalului $[a, b]$, a funcției interpolatoare (6) pe n noduri *oarecari* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ ale mulțimii E_m, este cuprinsă între cea mai mică și cea mai mare dintre ordonatele în același punct x_0, ale funcțiilor interpolatoare (7) pe cîte n noduri *consecutive* ale mulțimii E_m. Adică

$$(8) \qquad \min_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} L(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1};\; y\,|\,x_0) \leq$$
$$\leq L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\; y\,|\,x_0) \leq \max_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} L(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1};\; y\,|\,x_0)$$
$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq m, \quad x_0 > x_{i_n}\,.$$

Inainte de a da demonstrația teoremei 1, dăm următoarele două leme de care ne vom folosi ulterior.

LEMA 1. *Dacă* $m = n+1$ *și* $x_0 \in [a, b]$, $x_0 > x_{n+1}$ *atunci*

$$(9) \qquad L(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x_0) \leq L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x_0)$$

sau

$$(10) \qquad L(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x_0) > L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x_0)$$
$$i = 2, 3, \ldots, n,$$

după cum

$$(11) \qquad L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\; y\,|\,x_{n+1}) \geq y_{n+1}$$

sau

$$(12) \qquad L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\; y\,|\,x_{n+1}) < y_{n+1}$$

egalitatea avînd loc simultan și atunci și numai atunci cînd

$$(13) \qquad L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\; y\,|\,x_{n+1}) = y_{n+1}\,.$$

Demonstrație. Din proprietatea B rezultă că dacă are loc (13), adică în (11) are loc semnul egalității ,atunci și în (9) avem egalitate. Dacă (13) nu areloc, atunci pe baza proprietății A rezultă inegalitățile

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x_i) > y_i \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

sau

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x_i) < y_i \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

după cum i este de același paritate sau de paritate contrară cu $n+1$ cînd

$$(14) \qquad L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\; y\,|\,x_{n+1}) > y_{n+1}$$

și inegalitățile contrare cînd

$$(15) \qquad L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\; y\,|\,x_{n+1}) < y_{n+1}$$

Prin urmare dacă are loc inegalitatea (14), atunci pentru $x_n < x < x_{n+1}$ avem

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x) <$$
$$< L(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x), \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

și deci pentru $x > x_{n+1}$ trebuie să avem

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x) >$$
$$> L(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x), \qquad i = 2, 3, \ldots, n$$

funcțiile $L(x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; y|x)$ și $L(x_2, x_3, \ldots x_{n+1}; y\,|\,x)$ intersectîndu-se în punctele de abscise $x_2, x_3, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$ și neputînd avea mai mult de n-1 puncte de intersecție.

In mod analog se observă că dacă are loc inegalitatea (15), atunci pentru $x_n < x < x_{n+1}$ avem

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x) > L(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x)$$
$$i = 2, 3, \ldots, n$$

și pentru $x > x_{n+1}$ avem

$$L(x_1 x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x) < L(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1};\; y\,|\,x),$$
$$i = 2, 3, \ldots, n.$$

Lema 1 este astfel demonstrată.

LEMA 2. *Dacă* $m = n+1$ $x. \in [a, b]$, $x_0 > x_{n+1}$, *atunci au loc inegalitățile*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; y \mid x_0) > L(x_1, x_2, \ldots, x_n; y \mid x_0),$$
$$i = 2, 3, \ldots, n$$

dacă inegalitatea (15) *este satisfăcută și inegalitățile contrare dacă este satisfăcută inegalitatea* (14).

Demonstrația se bazează pe proprietatea A și este analoagă cu cea a lemei 1.

Demonstrația teoremei 1. Demonstrăm teorema 1 prin inducție completă asupra numărului $i_n - i_1$ de noduri ale mulținii E_m situate între x_{i_1} și x_{i_n}.

Avem $i_n - i_1 \geqq n - 1$. Dacă $i_n - i_1 = n - 1$, nodurile $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ sînt consecutive și atunci proprietatea exprimată prin teorema 1 are evident loc. Dacă $i_n - i_1 = n$, atunci între nodurile x_{i_1}, x_{i_n} ale mulțimii E_m este unul care nu figurează printre cele n noduri

(16) $$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}.$$

Fie acesta nodul x_{i_k+1}, situat între nodurile x_{i_k} și $x_{i_{k+1}}$ ale șirului de noduri (16). Să considerăm acum cele $n+1$ noduri

(17) $$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}.$$

Pe baza lemelor 1 și 2, avem pentru $x_0 > x_{i_n}$

(18) $$L(x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}; y \mid x_0) <$$
$$< L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}; y \mid x_0) < L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{n-1}}; y \mid x_0)$$

dacă

(19) $$L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{n-1}}; y \mid x_{i_n}) > y_{i_n}$$

și inegalitățiile contrare dacă în (19) avem inegalitatea conturară. In (18) în locul ambelor inegalități figurează semnul egalității dacă în (19) în locul inegalității avem semnul egalității.

Nodurile $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}$ fiind consecutive, am arătat că în cazul $i_n - i_1 = n$ teorema 1 este adevărată, deoarece funcțiile

$$L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{n-1}}; y \mid x) \text{ și } L(x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}; y \mid x)$$
$$x_{i_k}, x_{i_k+1}, \ldots, x_{i_{n-1}}$$

care figurează în (18) sînt singurele funcții interpolatoare pe noduri consecutive ale sistemului de noduri (17).

Să presupunem acum că proprietatea exprimată prin teorema 1 rămîne adevărată pentru $i_n - i_1 \leqq v$, $v \geqq n$ și să arătăm că atunci ea se menține și în cazul $i_n - i_1 = v + 1$.

Fie $i_n - i_1 = v + 1$. Atunci există printre indicii nodurilor (16) cel puțin unul i_p astfel ca $i_{p+1} - i_p > 1$. Să considerăm acum cele $n+1$ noduri

(20) $$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_n}$$

Intocmai ca în cazul precedent se pot scrie inegalitățile

(21) $$L(x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_n}; y \mid x_0) <$$
$$L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_n}; y \mid x_0) < L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_{n-1}}; y \mid x_0)$$

dacă

(22) $$L(x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_{n-1}}; y \mid x_{i_n}) < y_{i_n}$$

și inegalitățile contrare dacă în (22) avem inegalitatea contrară. Egalitatea are loc simultan în (21) și (22). Prin urmare numărul

(23) $$L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_n}; y \mid x_0)$$

este cuprins între numerele

(24) $$L(x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{i_{p+1}}, \ldots, x_{i_n}; y \mid x_0) \text{ și } L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{p+1}, \ldots, x_{i_{n-1}}; y \mid x_0)$$

Dar observînd că $i_n - i_2 \leqq v$ și $i_{n-1} - i_1 \leqq v$, în baza ipotezei făcute asupra numărului v, primul dintre numerele din (24) este cuprins între cel mai mic și cel mai mare dintre numerele

$$L(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y \mid x_0), \qquad j = i_2, i_2 + 1, \ldots, i_n - n + 1$$

iar al doilea între cel mai mic și cel mai mare dintre numerele

$$L(x, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}; y \mid x_0), \qquad j = i_1, i_1 + 1, \ldots, i_{n-1} - n + 1$$

Atunci pe baza inegalităților (21), au loc inegalitățile (8) care trebuiau demonstrate. Teorema 1 este complet demonstrată.

3. — Fie

(25) $$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$$

$n+1$ puncte situate în intervalul $[a, b]$. Dacă $f(x)$ este o funcție definită pe punctele (25), atunci funcția interpolatoare $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x)$ poate avea în punctul x_{n+1} una din următoarel trei poziții

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_{n+1}) >, =, < f(x_{n+1})$$

Să presupunem acum că E_m este mulțimea de puncte (5).

Definiție. Funcția f(x), *definită pe mulțimea* E_m, *o numim convexă, (neconcavă, neconvexă, concavă), față de mulțimea de funcții* $\mathcal{F}$ *pe mulțimea* E_m *dacă pe orice sistem de* $n+1$ *puncte* $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_{n+1}}$ *ale mulțimii* E_m *avem*

(26) $$L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; f \mid x_{i_{n+1}}) < (\leqq, \geqq, >) f(x_{i_{n+1}})$$

Extinderea noțiunii de convexitate în acest sens a fost studiată pentru n = 2 de E. F. Beckenbach [2], iar posibilitatea acestei extinderi în cazul general prezentat mai sus a fost semnalată de T. Popoviciu ([3] pag. 56).

In cele ce urmează vom vorbi despre convexitate, neconcavitate, neconvexitate, concavitate fără să specificăm că aceste proprietăți sînt relative la mulțimea $\mathcal{F}$ de funcții.

Din definiția de mai sus și din proprietățile A și B rezultă că, dacă $f(x)$ este o funcție convexă (neconcavă, neconvexă, concavă) pe mulțimea E_m atunci pe orice sistem de $n+1$ noduri $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_{n+1}}$ ale mulțimii E_m avem

$$L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{n+1}}; f \mid x_{i_k}) > \text{sau} < (\geqq \text{sau} \leqq, \leqq \text{sau} \geqq, < \text{sau} >)\ f(x_{i_k})$$

după cum k este de aceeași paritate sau de paritate contrară cu $n+1$.

TEOREMA 2. — Pentru ca funcția $f(x)$ definită pe mulțimea E_m să fie convexă (neconcavă, neconvexă, concavă) pe mulțimea E_m, este necesar și suficient ca ea să fie convexă (neconcavă, neconvexă, concavă) pe toate sistemele de cîte $n+1$ puncte consecutive

$$x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n} \qquad j = 1, 2, \ldots, m-n \tag{27}$$

ale mulțimii E_m.

Demonstrație. Necesitatea condiției din teoremă rezultă din definiția convexității (neconcavității, neconvexității, concavității). Suficiența condiției rezultă din teorema 1 mai sus stabilită. Intr-adevăr pe baza proprietății A, dacă condiția e îndeplinită pe toate grupele (23) de cîte $n+1$ noduri consecutive, atunci ea este îndeplinită și pe toate sistemele de $n+1$ noduri

$$x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}, x_k, \qquad k > j+n-1,\ j = 1, 2, \ldots, m-n \tag{28}$$

în care numai primele n noduri sînt consecutive. De aici rezultă pe baza teoremei 1, că condiția este atunci îndeplinită pe orice sistem de $n+1$ noduri $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$ ale mulțimei E_m și deci ea este și suficientă.

Proprietatea exprimată prin teorema 2, generalizează cunoscuta proprietate, analoagă cu aceasta, pentru cazul $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 x^{n-1} + \cdots + a$ (vezi [3] pag. 14).

Dacă funcția $f(x)$, este definită în intervalul $[a, b]$ și pe orice sistem de $n+1$ noduri distincte ale acestui interval $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ avem

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_{n+1}) >, \geqq, \leqq \text{ sau } < f(x_{n+1})$$

spunem că funcția $f(x)$ este convexă (neconcavă, neconvexă, concavă), în intervalul $[a, b]$.

TEOREMA 3. — O funcție convexă (neconcavă, neconvexă, concavă) în intervalul [a, b] *este continuă în orice punct* x_0 *al intervalului deschis* (a, b) *(numărul* n *al parametrilor* a_i *fiind presupus* ≥ 2*).*

Demonstrație. Fie x_0 un punct al intervalului (a, b) și să presupunem că funcția $f(x)$ este neconcavă în $[a, b]$, demonstrația fiind analoagă în cazul convexității, neconvexității și concavității. Să considerăm un sistem de $n+1$ puncte ale intervalului $[a, b]$, printre care figurează și punctul x_0

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_i < x_0 < x_{i+1} < \cdots < x_n$$

Funcțiile

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; f \mid x) \quad \text{și} \quad L(x_2, x_3, \ldots, x_n; f \mid x) \tag{29}$$

se intersectează în punctul $[x_0, f(x_0)]$. In fiecare din intervalele (x_i, x_0), (x_0, x_{i+1}) curba reprezentativă a funcției $f(x)$ este situată între curbele reprezentative ale funcțiilor (29). Avem pentru h suficient de mic sau

$$L(x_2, x_3, \ldots, x_n; f \mid x_0 + h) \leqq f(x_0 + h) \leqq L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x_0 + h)$$

și

$$L(x_2, x_3, \ldots, x_n; f \mid x_0 - h) \geqq f(x_0 - h) \geqq L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x_0 - h)$$

sau inegalitățile contrare, după cum $k+1$ este de paritate contrară sau de aceiași paritate cu n. In ambele cazuri, ținînd seama de faptul că funcțiile (29) în baza ipotezei (1) sînt continue în x_0 și se intersectează în $[x_0, f(x_0)]$, făcînd pe h să tindă către zero rezultă continuitatea funcției $f(x)$ în punctul x_0. Raționamentul de mai sus rămîne valabil în orice punct x_0 al intervalului deschis (a, b).

4. — Generalizînd o definiție dată de T. Popoviciu [4] în cazul cînd (1) este funcția

$$y = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

vom numi o funcție $f(x)$, definită în intervalul $[a, b]$ multivalentă de ordinul n față de mulțimea de funcții $\mathcal{F}$ dacă ea se intersectează în cel mult n puncte cu orice funcție a mulțimii $\mathcal{F}$. (Această interpretare a multivalenței este deosebită de cea obișnuită).

TEOREMA 4. — Dacă $f(x)$ *este o funcție continuă în intervalul* [a, b] *și este multivalentă de ordinul n față de mulțimea de funcții* $\mathcal{F}$ *atunci* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ *fiind n puncte distincte ale intervalului* [a, b], *diferența*

$$f(x) - L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x) \qquad x \neq x_1, x_2, \ldots, x_n$$

este diferită de zero, păstrează semnul constant în fiecare din intervalele (a, x), (x_1, x_2), $\ldots$, (x_n, b) și schimbă alternativ semnul de la un interval la următorul. Demonstrația se face pe baza proprietății A a funcțiilor din mulțimea $\mathcal{F}$ și este analoagă cu cea dată [4] în cazul

$$F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

TEOREMA 5. — Pentru ca o funcție continuă în intervalul [a, b] *să fie convexă sau concavă în* [a, b] *este necesar și suficient ca ea să fie multivalentă de ordinul* n *față de mulțimea de funcții* $\mathcal{F}$.

Demonstrație. Necesitatea condiției din teoremă rezultă din definiția convexității și a concavității (26). Să demonstrăm suficiența acestei condiții. Să presupunem condiția din teorema 5 satisfăcută. In baza acestei ipoteze oricare ar fi sistemul de $n+2$ puncte

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} < x_{n+2}$$

numerele

$$f(x_{n+2}) - L(x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_{n+2}) \quad \text{și} \quad f(x_{n+1}) - L'(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}; f \mid x_{n+2})$$

au acelaș semn. In caz contrar în baza teoremei 4, $f(x)$ s-ar intersecta în n puncte cu una dintre funcțiile $L(x_1, x_2, \ldots, x^n; f \mid x)$, $L(x_2, x_2, \ldots, x_{n+1}; f \mid x)$, ceeace în baza ipotezei nu se poate. Aceasta înseamnă că dacă E_m este o mulțime oarecare de puncte

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m$$

ale intervalului $[a, b]$, funcția $f(x)$ este convexă (concavă) pe toate grupele de cîte $n + 1$ puncte consecutive ale mulțimii E_m. Din aplicarea teoremei 1, rezultă imediat că funcția $f(x)$ este convexă (concavă) pe orice mulțime E_m de puncte ale intervalului $[a, b]$. Teorema 5, este deci demonstrată.

5. Proprietățile funcțiilor convexe (concave) față de mulțimea de funcții $\mathcal{F}$, mai sus amintite rămîn valabile dacă se particularizează funcția (1). Ele au fost studiate numai în cazul

$$F(x; a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

Teoremele 2 și 5 sînt doar exemple care indică utilitatea teoremei 1 în studiul proprietăților funcțiilor convexe (neconcave, neconvexe, concave) definite la punctul 3.

BIBLIOGRAFIE

1. M. I. Morozov, *Despre cîteva probleme de aproximare uniformă a funcțiilor continue prin funcții care aparțin unei clase de funcții interpolatoare.* I.A.N. 16, 1, 75—102, 1952.
2. E. F. Beckenbach, *Generalized convex functions.* Bull Am. Math. Soc. 43, 363—371, 1937.
3. T. Popoviciu, *Les fonctions convexes.* Actualités Sci. et Ind. (1945).
4. T. Popoviciu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (2). Mathematica, 12, 227—233, 1936.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Об обобщении понятия выпуклости

ЕЛЕНА МОЛДОВАН

Даются для (1), определённой для $a \gtreqless x \leqq b, -\infty < a_i < +\infty\ i = 1, 2, \ldots, n$, гипотезы; 1. функция (1) является непрерывной в отношении с совокупностью своих аргументов. 2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будучи n отличныи точками интервала $[a, b]$, а $y_1\ y_2, \ldots, y_n$ произвольными числами принадлежа области значений функции (1), система (2) с неизвестными $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет одно только решение. Отмечается (3) функция $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будучи решением системы (2).

Демонстрируется теорема I объяснение которой даётся неравенствами (9).

Даётся правило; функция $f(x)$ определенная множеством (6) называется выпуклой, невогнутой, невыпуклой или вогнутой при множестве (6) если на всякую систему $n+1$ точек $x_{i_1}, < x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} < x_{i_{n+1}}$, множества (6) имеем $L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; f \mid x_{i_{n+1}}) <, \leqq, \geqq$, или $> f(x_{i_{n+1}})$. На основании теор мы I устанавливается необходимое и достаточное условие для того чтобы $f(x)$ была бы выпуклой, невогнутой, невыпуклой или вогнутой на множество (6).

Применяется правило данное выше в случае когда вместо множества (6), $f(x)$ определена на закрытый и законченный интервал $[a, b]$.

Изучаются свойства непрерывности для выпуклых функций, не вогнутых невыпуклых или вогнутых в одном интервале, в гипотезе $n \geqq 2$.

RÉSUMÉ

Sur une généralisation de la notion de convexité

par

E. MOLDOVAN

On fait sur la fonction (1), définie pour $a \leqq x \leqq b$, $i = 1, 2, \ldots, n$, l'hypothèse: 1° elle est continue par rapport à l'ensemble de ses arguments: 2° $x_1, x_2, \ldots, x_n$, étant n points distincts de l'intervalle [a, b] et y_1 $y_2, \ldots, y_n$, n nombres arbitraires, le système (2) avec les inconnues a_1 $a_2, \ldots, a_n$ a une solution et une seule. En utilisant la notation (3) pour la fonction $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ étant la solution du système (2), on démontre le théorème 1, interprété par les inégalités (9).

On donne la définition: la fonction $f(x)$ définie sur l'ensemble (6) est convexe, non-concave, non-convexe ou concave sur (6), suivant que sur tous les groupes de $n+1$ points de (6).

$$x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_n} < x_{i_{n+1}}$$

on a

$$L(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; f \mid x_{i_{n+1}}) <, \leqq, \geqq, \text{ ou } > f(x_{i_{n+1}}).$$

A l'aide du théorème 1 on établit une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit convexe, non-concave, non-convexe ou concave sur (6). En considérant le cas où au lieu de (6) on a l'intervalle [a, b], on donne les théorèmes 3 et 5 relatifs à la continuité des fonctions convexes, non-concaves, non-convexes ou concaves dans l'intervalle [a, b].