FORMULE DE CUBATURĂ ÎN CARE DOMENIUL DE INTEGRARE ESTE UN TRIUNGHIU OARECARE

DE

D. V. IONESCU

Comunicare prezentată în ședința din 15 februarie 1954 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

1. Se știe din cursurile de Mecanică Rațională că momentul de inerție al unei plăci omogene având forma unui triunghi oarecare ABC, în raport cu o dreaptă oarecare Δ, este dat de formula

$$I_\Delta = \frac{S}{12}\left[d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 + 9d_G^2\right] \tag{1}$$

unde d_A, d_B, d_C, d_G sînt distanțele punctelor A, B, C, G, la dreapta Δ, G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC iar S suprafața triunghiului.

Să raportăm triunghiul ABC la axele dreptunghiulare Ox, Oy și să notăm cu (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), (λ_3, μ_3) coordonatele punctelor A, B, C față de aceste axe și fie

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{3}, \qquad \mu = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3}$$

coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC.

Este ușor de văzut că din formula (1) se deduc următoarele formule

$$\iint_T x^2 dxdy = \frac{S}{12}\left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 9\lambda^2\right]$$

$$\iint_T y^2 dxdy = \frac{S}{12}\left[\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + 9\mu^2\right]$$

$$\iint_T xy\, dxdy = \frac{S}{12}\left[\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 + 9\lambda\mu\right]$$

în care domeniul de integrare T este triunghiul ABC, De asemenea putem scrie următoarele formule evidente

$$\iint_T x\,dxdy = \frac{S}{12}[\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+9\,\lambda]$$

$$\iint_T y\,dxdy = \frac{S}{12}[\mu_1+\mu_2+\mu_3+9\,\mu]$$

$$\iint_T dxdy = \frac{S}{12}[1+1+1+9\,.\,1]$$

Din formulele scrise mai sus, rezultă că dacă $\varphi(x,y)$ este un polinom oarecare de gradul al doilea, adică

$$\varphi(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f,$$

avem următoarea formulă

$$\iint_T \varphi(x,y)\,dxdy = \frac{S}{12}[\varphi(A)+\varphi(B)+\varphi(C)+9\,\varphi(G)] \tag{2}$$

unde $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(G)$ sînt valorile polinomului $\varphi(x,y)$ în punctele A, B, C și G.

Formula (2), dedusă astfel din teoria momentelor de inerție, *apare ca o formulă de cubatură valabilă pentru un polinom oarecare de gradul al doilea.*

2. — Formula de cubatură (2) ne sugerează să facem următorul studiu;

Fie L, M, N, baricentrele maselor $(\alpha, 1, 1)$, $(1, \alpha, 1)$, $(1, 1, \alpha)$ plasate în vîrfurile A, B, C ale triunghiului ABC. Triunghiul LMN este omotetic cu triunghiul ABC, centrul de omotetie fiind centrul de greutate G al triunghiului ABC.

Dînd lui α valorile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ vom obține punctele $L_1, L_2, \ldots, L_n$, $M_1, M_2, \ldots, M_n$; $N_1, N_2, \ldots, N_n$ pe care le vom numi noduri. Vom căuta să stabilim *formule de cubatură cu nodurile fixe* L_i, M_i, N_i, unde $i = 1, 2, \ldots, n$ de forma

$$\iint_T \varphi(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} P_i[\varphi(L_i)+\varphi(M_i)+\varphi(N_i)] \tag{3}$$

determinînd constantele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ astfel ca această formulă să fie verificată de un polinom oarecare de gradul n, oricare ar fi triunghiul T, adică oricare ar fi $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3$.

Vom demonstra că problema astfel pusă este în general posibilă dacă $n \leq 5$, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt numere diferite între ele. Problema este cu siguranță posibilă cînd $n \leq 5$ și unul din numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este egal cu 1. Problema este însă imposibilă dacă $n > 5$.

Rezultatele acestui studiu au fost comunicate Academiei R.P.R. în sesiunea din Iulie 1953. [1].

§. 1. — Formule preliminare.

3. — Să considerăm integrala

$$I_n = \iint_T x^n dxdy \tag{4}$$

unde n este un număr natural, pe care o calculăm în modul următor: In formula

$$\iint_T \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int_\Gamma P\,dx,$$

unde Γ este conturul triunghiului T, să alegem

$$P(x,y) = x^n y.$$

Vom avea

$$I_n = -\int_{\lambda_2}^{\lambda_3} x^n y\,dx - \int_{\lambda_3}^{\lambda_1} x^n y\,dx - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x^n y\,dx. \tag{5}$$

Ecuația dreptei BC fiind

$$y = \mu_2 + \frac{\mu_3-\mu_2}{\lambda_3-\lambda_2}(x-\lambda_2)$$

vom avea

$$\int_{\lambda_2}^{\lambda_3} x^n y\,dx = \mu_2\int_{\lambda_2}^{\lambda_3} x^n dx + \frac{\mu_3-\mu_2}{\lambda_3-\lambda_2}\int_{\lambda_2}^{\lambda_3} x^n(x-\lambda_2)\,dx.$$

Ținînd seama că

$$\int_{\lambda_2}^{\lambda_3} x^n dx = \frac{\lambda_3-\lambda_2}{n+1}(\lambda_3^n+\lambda_3^{n-1}\lambda + \cdots + \lambda_2^n)$$

și că

$$\int_{\lambda_2}^{\lambda_3} x^n y\,dx = \frac{(\lambda_3-\lambda_2)^2}{(n+1)(n+2)}[(n+1)\lambda_3^n + n\lambda_3^{n-1}\lambda_2 + \cdots + \lambda_2^n]$$

vom avea

$$\int_{\lambda_2}^{\lambda_3} x^n y\,dx = \frac{\lambda_3-\lambda_2}{(n+1)(n+2)}\Big\{(n+2)\mu_2[\lambda_3^n+\lambda_3^{n-1}\lambda_2 \cdot \cdots + \lambda_2^n]$$
$$+(\mu_3-\mu_2)[(n+1)\lambda_3^n + n\lambda_3^{n-1}\lambda_2 + \cdots + \lambda_2^n]\Big\}$$

adică

$$(6) \qquad \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} x^n y dx = \frac{\lambda_3-\lambda_2}{(n+1)(n+2)} \Big\{ [(n+1)\lambda_3^n + n\lambda_3^{n-1}\lambda_2 + \cdots + \lambda_2^n]$$

$$+ \mu_2 [(n+1)\lambda_2^n + n\lambda_2^{n-1}\lambda_3 \cdot \cdots + \lambda_3^n] \Big\}.$$

Pentru celelalte două integrale din membrul al doilea al formulei (5), avem formule analoage cu formula (6). Dacă notăm

$$L_{ik} = (n+1)\lambda_i^n + n\lambda_i^{n-1}\lambda_k + \cdots + \lambda_k^n$$

unde i, k = 1, 2, 3, şi $i \neq k$, vom avea

$$I_n = \frac{\lambda_2-\lambda_3}{(n+1)(n+2)}(\mu_3 L_{32} + \mu_2 L_{23}) + \frac{\lambda_3-\lambda_1}{(n+1)(n+2)}(\mu_1 L_{13} + \mu_3 L_{31})$$

$$+ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{(n+1)(n+2)}(\mu_2 L_{21} + \mu_1 L_{12})$$

sau

$$I_n = L_1\mu_1 + L_2\mu_2 + L_3\mu_3$$

unde

$$L_1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}[(\lambda_1-\lambda_2)L_{12} - (\lambda_1-\lambda_3)L_{13}]$$

$$L_2 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}[(\lambda_2-\lambda_3)L_{23} - (\lambda_2-\lambda_1)L_{21}]$$

$$L_3 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}[(\lambda_3-\lambda_1)L_{31} - (\lambda_3-\lambda_2)L_{32}]$$

Observăm că L_1, L_2, L_3, sînt divizibile prin $\lambda_3-\lambda_2$, $\lambda_1-\lambda_3$, $\lambda_2-\lambda_1$ şi că avem

$$L_1 = \frac{\lambda_3-\lambda_2}{(n+1)(n+2)}[\lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}(\lambda_2+\lambda_3) + \cdots + \lambda_2^n + \lambda_2^{n-1}\lambda_3 \cdot \cdots + \lambda_3^n]$$

$$L_2 = \frac{\lambda_1-\lambda_3}{(n+1)(n+2)}[\lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}(\lambda_2+\lambda_3) + \cdots + \lambda_2^n + \lambda_2^{n-1}\lambda_3 + \cdots + \lambda_3^n]$$

$$L_3 = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{(n+1)(n+2)}[\lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}(\lambda_2+\lambda_3) + \cdots + \lambda_2^n + \lambda_2^{n-1}\lambda_3 + \cdots + \lambda_3^n]$$

Deducem atunci că

$$I_n = \frac{\mu_1(\lambda_3-\lambda_2)+\mu_2(\lambda_1-\lambda_3)+\mu_3(\lambda_2-\lambda_1)}{(n+1)(n+2)}[\lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}(\lambda_2+\lambda_3) + \cdots + \lambda_2^n + \lambda_2^{n-1}\lambda_3 + \cdots + \lambda_3^n]$$

Introducînd aria S a triunghiului ABC, dată de formula

$$2S = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 1 \\ \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix}$$

avem următoarea expresie definitivă a integralei duble I_n;

$$(4') \qquad \iint_T x^n dx dy = \frac{2S}{(n+1)(n+2)}[\lambda_1^n + \lambda_1^{n-1}(\lambda_2+\lambda_3) + \cdots + \lambda_2^n + \lambda_1^{n-1}\lambda_3 + \cdots + \lambda_3^n]$$

In paranteza din membrul al doilea avem un polinom în λ_1, λ_2, λ_3 omogen şi de gradul n, avînd toţi coeficienţii egali cu 1. Formula (4′) este o extindere la integrale duble relative la triunghiuri T, a formulei

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b-a}{n+1}[b^n + b^{n-1}a + \cdots + a^n]$$

unde în parateza din membrul al doilea avem un polinom în a şi b omogen şi de gradul n.

4. — Formula (4′) ne permite să calculăm şi integrale de forma

$$(7) \qquad I_{n,p} = \iint_T x^n y^p dx dy,$$

unde n şi p sînt numere intregi, pozitive sau nule.

Vom da expresiile acestor integrale, însă vom arăta mai departe un artificiu, care ne permite să ne dispensăm de aceste expresii în tratarea problemei ce ne-am pus.

Să rotim axele Ox, Oy în jurul lui O de un unghi arbitrar φ, ele devenind OX,OY., Legătura dintre coordonatele (x,y) şi (X,Y) ale unui punct M al triunghiului ABC este dată de formulele

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$
$$Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

Coordonatele vîrfurilor A,B,C faţă de axele OX,OY sînt date de formulele

$$X_1 = \lambda_1\cos\varphi + \mu_1\sin\varphi, \ldots$$
$$Y_1 = -\lambda_1\sin\varphi + \mu_1\cos\varphi, \ldots$$

Formula (4′) ne dă

$$\iint_T X^{n+p} dX dY = \frac{2S}{(n+p+1)(n+p+2)}[X_1^{n+p} + X_1^{n+p-1}(X_2+X_3) + \cdots$$

$$+ X_2^{n+p} + X_2^{n+p-1}X_3 + \cdots + X_3^{n+p}]$$

Această formulă se mai scrie

$$(8) \qquad \iint_T (x\cos\varphi + y\sin\varphi)^{n+p} dx dy = \frac{2S}{(n+p+1)(n+p+2)}\Big\{(\lambda_1\cos\varphi + \mu_1\sin\varphi)^{n+p}E_{0,0}$$

$$+ (\lambda_1\cos\varphi + \mu_1\sin\varphi)^{n+p-1}(E_{1,0}\cos\varphi + E_{0,1}\sin\varphi)$$

$$+ \cdots\cdots$$

$$+ E_{n+p,0}\cos^{n+p}\varphi + E_{n+p-1,1}\cos^{n+p-1}\varphi\sin\varphi + \cdots + E_{0,n+p}\sin^{n+p}\varphi\Big\}$$

unde s-a notat în general

$$(9)\qquad \begin{aligned}&(\lambda_2\cos\varphi+\mu_2\sin\varphi)^r+(\lambda_2\cos\varphi+\mu_2\sin\varphi)^{r-1}(\lambda_3\cos\varphi+\mu_3\sin\varphi)+\cdots+(\lambda_3\cos\varphi+\mu_3\sin\varphi)\\ &\quad=E_{r,0}\cos^r\varphi+E_{r-1,1}\cos^{r-1}\varphi\sin\varphi+\cdots+E_{0,r}\sin^r\varphi\end{aligned}$$

Formula (8) fiind o identitate oricare ar fi unghiul φ, coeficienții lui $\cos^n\varphi\,\sin^p\varphi$ ai celor doi membri sînt egali. Deducem următoarea expresie pentru integrala (7)

$$(10)\qquad \iint_T x^n y^p dxdy=\frac{2\,.\,p\,!\,S}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p+2)}(Q_0\mu_1^p+Q_1\mu_1^{p-1}+\cdots+Q)$$

unde în general s-a notat.

$$Q_i=C_{n+p-i}^{p-i}\lambda_1^n E_{0,i}+C_{n+p-i-1}^{p-i}\lambda_1^{n-1}E_{1,i}+\cdots+C_{p-i}^{p-i}E_{n,i}$$

Formula (9) arată că $E_{h,i}$ unde $h=0,1,\ldots,n$ sînt polinoame în μ_2 și μ_3 omogene și de gradul i, și anume

$$E_{h,i}=\sum_{k=0}^{i}(C_k^k C_{i-k+h}^{i-k}\lambda_2^h+C_{k+1}^k C_{i-k+h-1}^{i-k}\lambda_2^{h-1}\lambda_3+\cdots C_{k+h}^k C_{i-k}^{i-k}\lambda_3^h)\mu_2^{i-k}\mu_3^k$$

unde $h=0,1,\ldots,n$.

Obținem astfel expresia integralei (7) sub formă definitivă

$$(11)\qquad \iint_T x^n y^p dx\,dy=\frac{2\,.\,p\,!\,S}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p+2)}\sum_{i=0}^{p}\left(\sum_{k=0}^{i}Q_{i-k,k}\,\mu_2^{i-k}\mu_3^k\right)\mu_1^{p-i}$$

unde

$$(12)\qquad \begin{aligned}Q_{i-k,k}=&\,C_{n+p-i}^{p-i}\lambda_1^n\\ &+C_{n+p-i-1}^{p-i}\lambda_1^{n-1}(C_k^k C_{i-k+1}^{i-k}\lambda_2+C_{k+1}^k C_{i-k}^{i-k}\lambda_3)\\ &+\cdots\cdots\\ &+C_{p-i}^{p-i}(C_k^k C_{i-k+n}^{i-k}\lambda_2^n+C_{k+1}^k C_{i-k+n-1}^{i-k}\lambda_2^{n-1}\lambda_3+\cdots+C_{k+n}^k C_{i-k}^{i-k}\lambda_3^n)\end{aligned}$$

De exemplu pentru $p=1$, avem

$$(13)\qquad \iint_T x^n y\,dx\,dy=\frac{2S}{(n+1)(n+2)(n+3)}(P_1\mu_1+P_2\mu_2+P_3\mu_3)$$

unde cu ajutorul formulelor (12) avem

$$(14)\qquad \begin{aligned}P_1&=C_{n+1}^1\lambda_1^n+C_n^1\lambda_1^{n-1}(\lambda_2+\lambda_3)+\cdots+C_1^1(\lambda_2^n+\lambda_2^{n-1}\lambda_3+\cdots+\lambda_3^n)\\ P_2&=C_{n+1}^1\lambda_2^n+C_n^1\lambda_2^{n-1}(\lambda_3+\lambda_1)+\cdots+C_1^1(\lambda_3^n+\lambda_3^{n-1}\lambda_1+\cdots+\lambda_1^n)\\ P_3&=C_{n+1}^1\lambda_3^n+C_n^1\lambda_3^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2)+\cdots+C_1^1(\lambda_1^n+\lambda_1^{n-1}\lambda_2+\cdots+\lambda_2^n)\end{aligned}$$

De asemenea pentru $p=2$, avem:

$$(15)\qquad \begin{aligned}\iint_T x^n y^2 dxdy=\frac{4S}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}&[P_{11}\mu_1^2+P_{22}\mu_2^2+P_{33}\mu_3^2\\ &+P_{23}\mu_2\mu_3+P_{31}\mu_3\mu_1+P_1\,\mu_1\mu_2]\end{aligned}$$

unde cu ajutorul formulelor (12) putem scrie

$$(16)\qquad \begin{aligned}P_{11}&=C_{n+2}^2\lambda_1^n+C_{n+1}^2\lambda_1^{n-1}(\lambda_2+\lambda_3)+\cdots+C_2^2(\lambda_2^n+\lambda_2^{n-1}\lambda_3+\cdots+\lambda_3^n)\\ P_{22}&=C_{n+2}^2\lambda_2^n+C_{n+1}^2\lambda_2^{n-1}(\lambda_3+\lambda_1)+\cdots+C_2^2(\lambda_3^n+\lambda_3^{n-1}\lambda_1+\cdots+\lambda_1^n)\\ P_{12}&=C_{n+2}^2\lambda_3^n+C_{n+1}^2\lambda_3^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2)+\cdots+C_2^2(\lambda_1^n+\lambda_1^{n-1}\lambda_2+\cdots+\lambda_2^n)\end{aligned}$$

și

$$(16')\qquad \begin{aligned}P_{23}&=C_{n+1}^1\lambda_3^n+C_n^1\lambda_3^{n-1}(2\lambda_2+\lambda_1)+\cdots+C_1^1[(n+1)\lambda_2^n+n\lambda_2^{n-1}\lambda_1+\cdots+\lambda_1^n]\\ P_{31}&=C_{n+1}^1\lambda_1^n+C_n^1\lambda_1^{n-1}(2\lambda_3+\lambda_2)+\cdots+C_1^1[(n+1)\lambda_3^n+n\lambda_3^{n-1}\lambda_2+\cdots+\lambda_2^n]\\ P_{12}&=C_{n+1}^1\lambda_2^n+C_n^1\lambda_2^{n-1}(2\lambda_1+\lambda_3)+\cdots+C_1^1[(n+1)\lambda_1^n+n\lambda_1^{n-1}\lambda_3+\cdots+\lambda_3^n].\end{aligned}$$

§. 2. — Imposibilitatea formulelor de cubatură de tipul (3) pentru n > 5.

5. — Să revenim la formula de cubatură (3). Coordonatele nodurilor L_i, M_i, N_i sînt

$$\frac{\alpha_i\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\alpha_i+2};\qquad \frac{\lambda_1+\alpha_i\lambda_2+\lambda_3}{\alpha_i+2};\qquad \frac{\lambda_1+\lambda_2+\alpha_i\lambda_3}{\alpha_i+2}$$

$$\frac{\alpha_i\mu_1+\mu_2+\mu_3}{\alpha_i+2};\qquad \frac{\mu_1+\alpha_i\mu_2+\mu_3}{\alpha_i+2};\qquad \frac{\mu_1+\mu_2+\alpha_i\mu_3}{\alpha_i+2}$$

Să demonstrăm că dacă constantele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sînt astfel alese ca să avem identitatea

$$(17)\qquad \iint_T x^n dxdy=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}[(\alpha_i\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^n+(\lambda_1+\alpha_i\lambda_2+\lambda_3)^n+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_i\lambda_3)^n]$$

oricare ar fi triunghiul T, adică oricare ar fi $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3$ atunci avem deasemenea identitățile

$$(18)\qquad \iint_T x^r dxdy=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}[(\alpha_i\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^r+(\lambda_1+\alpha_i\lambda_2+\lambda_3)^r+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_i\lambda_3)^r]$$

oricare ar fi triunghiul T, pentru $r=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Intr-adevăr fie OX, OY, noi axe coordonate, axa OX coincizînd cu axa Ox, iar axa OY fiind paralelă cu axa Oy, astfel ca $\overline{Oo}=k$, unde k este un număr oarecare.

Un punct M al triunghiului ABC are coordonatele (x,y) față de axele Ox, Oy și (X,Y) față de axele OX, OY. Avem

$$(19)\qquad X=x+k,\qquad Y=y,$$

iar coordonatele vîrfurilor triunghiului ABC, față de axele OX, OY sînt

$$(19')\qquad \begin{aligned}X_1&=\lambda_1+k\;;\quad X_2=\lambda_2+k\;;\quad X_3=\lambda_3+k\\ Y_1&=\mu_1\;;\quad Y_2=\mu_2\;;\quad Y_3=\mu_3.\end{aligned}$$

Ştim că avem

$$\iint_T X^n dX\,dY = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}\left[(\alpha_i X_1+X_2+X_3)^n+(X_1+\alpha_i X_2+X_3)^n+(X_1+X_2+\alpha_i X_3)^n\right]$$

In această integrală să facem schimbarea de variabile (19) şi să înlocuim pe X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3 cu formulele (19′).

Vom avea

$$\begin{aligned}(20)\qquad \iint_T (x+k)^n dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}\Big\{&[\alpha_i\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+(\alpha_i+2)k]^n\\ &+[\lambda_1+\alpha_i\lambda_2+\lambda_3+(\alpha_i+2)k]^n\\ &+[\lambda_1+\lambda_2+\alpha_i\lambda_3+(\alpha_i+2)k]^n\Big\}\end{aligned}$$

Această formulă este o identitate, oricare ar fi k. Dezvoltînd ambii membri ai formulei (20) după puterile lui k şi egalînd coeficienţii aceloraşi puteri ale lui k, avem identităţile (18).

6. — Să demonstrăm că dacă constantele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sînt astfel alese ca să avem identitatea (17) oricare ar fi triunghiul T, atunci avem de asemenea identităţile.

$$\begin{aligned}(21)\qquad \iint_T x^{n-p}y^p dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}\Big[&(\alpha_i\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^{n-p}(\alpha_i\mu_1+\mu_2+\mu_3)^p\\ &+(\lambda_1+\alpha_i\lambda_2+\lambda_3)^{n-p}(\mu_1+\alpha_i\mu_2+\mu_3)^p\\ &+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_i\lambda_3)^{n-p}(\mu_1+\mu_2+\alpha_i\mu_3)^p\Big]\end{aligned}$$

oricare ar fi triunghiul T, şi pentru $p=1, 2, \ldots, n$.

Intr-adevăr să rotim axele Ox, Oy în jurul punctului O de un unghi arbitrar φ, ele devenind OX, OY. Legătura dintre coordonatele (x,y) şi (X,Y) ale unui punct M al triunghiului ABC, faţă de axele Ox, Oy şi OX, OY este dată de formulele

$$(22)\qquad X = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

Coordonatele vîrfurilor A, B, C faţă de axele OX, OY sînt.

$$(22')\qquad \begin{aligned}&X_1=\lambda_1\cos\varphi+\mu_1\sin\varphi; \quad X_2=\lambda_2\cos\varphi+\mu_2\sin\varphi; \quad X_3=\lambda_3\cos\varphi+\mu_3\sin\varphi\\ &Y_1=-\lambda_1\sin\varphi+\mu_1\cos\varphi; \quad Y_2=-\lambda_2\sin\varphi+\mu_2\cos\varphi; \quad Y_3=-\lambda_3\sin\varphi+\mu_3\cos\varphi\end{aligned}$$

Ştim că avem;

$$\iint_T X^n dX\,dY = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}\left[(\alpha_i X_1+X_2+X_3)^n+(X_1+\alpha_i X_2+X_3)^n+(X_1+X_2+\alpha_i X_3)^n\right]$$

In această integrală să facem schimbarea de variabile (22) şi în membrul al doilea să înlocuim pe X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3 cu formulele (22′).

Vom avea

$$\begin{aligned}\iint_T (x\cos\varphi+y\sin\varphi)^n dx\,dy = \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}\Big\{&[(\alpha_i\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\cos\varphi+(\alpha_i\mu_1+\mu_2+\mu_3)\sin\varphi]^n\\ &+[(\lambda_1+\alpha_i\lambda_2+\lambda_3)\cos\varphi+(\mu_1+\alpha_i\mu_2+\mu_3)\sin\varphi]^n\\ &+[(\lambda_1+\lambda_2+\alpha_i\lambda_3)\cos\varphi+(\mu_1+\mu_2+\alpha_i\mu_3)\sin\varphi]^n\Big\}\end{aligned}$$

această identitate fiind valabilă oricare ar fi unghiul φ. Identificînd termenii în $\cos^{n-p}\varphi\,\sin^p\varphi$ din ambii membri, deducem identităţile (21).

7. — Din teoremele demonstrate la n^rele^ 5 şi 6 şi din caracterul linear şi omogen al formulelor (17), (18), (21) rezultă că dacă constantele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ au fost determinate astfel ca să avem identitatea (17) oricare ar fi triunghiul T, atunci vom avea de asemenea.

$$\begin{aligned}\iint_T \varphi(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} P_i\Big[&\varphi\left(\frac{\alpha_i\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{\alpha_i+2}, \frac{\alpha_i\mu_1+\mu_2+\mu_3}{\alpha_i+2}\right)\\ &+\varphi\left(\frac{\lambda_1+\alpha_i\lambda_2+\lambda_3}{\alpha_i+2}, \frac{\mu_1+\alpha_i\mu_2+\mu_3}{\alpha_i+2}\right)\\ &+\varphi\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\alpha_i\lambda_3}{\alpha_i+2}, \frac{\mu_1+\mu_2+\alpha_i\mu_3}{\alpha_i+2}\right)\Big]\end{aligned}$$

De aici rezultă că singurele relaţii pe care trebuie să le satisfacă $P_1, P_2, \ldots, P_n$ astfel ca să avem formula de cubatură (3) oricare ar fi triunghiul T, sînt relaţiile care asigură identitatea (17), oricare ar fi triunghiul T.

8. — Pentru $n \geq 7$, avem

$$\begin{aligned}(23)\qquad (a+b+c)^n = {}& a^n+b^n+c^n\\ &+C_n^1[a^{n-1}(b+c)+b^{n-1}(c+a)+c^{n-1}(a+b)]\\ &+C_n^2[a^{n-2}(b^2+c^2)+b^{n-2}(c^2+a^2)+c^{n-2}(a^2+b^2)]\\ &+C_n^3[c^{n-3}(b^3+c^3)+c^{n-3}(c^3+a^3)+c^{n-3}(a^3+b^3)]\\ &+\cdots\cdots\\ &+2C_n^2\,abc\,(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-3})\\ &+3C_n^3\,abc\,[a^{n-4}(b+c)+b^{n-4}(c+a)+c^{n-4}(a+b)]\\ &+4C_n^4\,abc\,[a^{n-5}(b^2+c^2)+b^{n-5}(c^2+a^2)+c^{n-5}(a^2+b^2)]\\ &+\cdots\cdots\\ &+6C_n^4\,a^2b^2c^2(a^{n-6}+b^{n-6}+c^{n-6})\\ &+\cdots\cdots\end{aligned}$$

Fie

$$U(\alpha = (\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^n+(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)^n+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)^n$$

Dezvoltînd fiecare termen din membrul al doilea cu ajutorul formulei (23) şi punînd în evidenţă termenii din formula (23), vom putea scrie:

$$U(\alpha)=f_1(\alpha)\left(\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n\right) \tag{24}$$
$$+C_n^1 f_2(\alpha)\left[\lambda_1^{n-1}(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^{n-1}(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2)\right]$$
$$+C_n^2 f_3(\alpha)\left[\lambda_1^{n-2}(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+\lambda_2^{n-2}(\lambda_3^2+\lambda_1^2)+\lambda_3^{n-2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\right]$$
$$+C_n^3 f_4(\alpha)\left[\lambda_1^{n-3}(\lambda_2^3+\lambda_3^3)+\lambda_2^{n-3}(\lambda_3^3+\lambda_1^3)+\lambda_2^{n-3}(\lambda_1^3+\lambda_2^3)\right]$$
$$+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+2C_n^2 g_1(\alpha)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(\lambda_1^{n-3}+\lambda_2^{n-3}+\lambda_3^{n-3}\right)$$
$$+3C_n^3 g_2(\alpha)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left[\lambda_1^{n-4}(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^{n-4}(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^{n-4}(\lambda_1+\lambda_2)\right]$$
$$+4C_3^4 g_3(\alpha)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left[\lambda_1^{n-5}(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+\lambda_2^{n-5}(\lambda_3^2+\lambda_1^2)+\lambda_3^{n-5}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\right]$$
$$+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+6C_n^4 h_1(\alpha)\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\left(\lambda_1^{n-6}+\lambda_2^{n-6}+\lambda_3^{n-6}\right)$$
$$+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

In aceste formule avem

$$\begin{aligned}
&f_1(\alpha)=\alpha^n+2\\
&f_2(\alpha)=\alpha^{n-1}+\alpha+1\\
&f_3(\alpha)=\alpha^{n-2}+\alpha^2+1\\
&f_4(\alpha)=\alpha^{n-3}+\alpha^3+1.\\
&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\
&g_1(\alpha)=\alpha(\alpha^{n-3}+2)\\
&g_2(\alpha)=\alpha(\alpha^{n-4}+\alpha+1)\\
&g_3(\alpha)=\alpha(\alpha^{n-5}+\alpha^2+1)\\
&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\
&h_1(\alpha)=\alpha^2(\alpha^{n-6}+2)\\
&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot
\end{aligned} \tag{25}$$

Din aceste formule deducem că

$$f_3(\alpha)-g_1(\alpha)=\alpha^2-2\alpha+1$$
$$f_4(\alpha)-g_2(\alpha)=\alpha^3-\alpha^2-\alpha+1$$
$$g_3(\alpha)-h_1(\alpha)=\alpha^3-2\alpha^2+\alpha$$

și

$$[f_4(\alpha)-g_2(\alpha)]-[g_3(\alpha)-h_1(\alpha)]=\alpha^2-2\alpha+1\,.$$

Comparînd cu prima dintre aceste formule deducem că între polinoamele (25), avem identitatea

$$f_3(\alpha)-f_4(\alpha)-g_1(\alpha)+g_2(\alpha)+g_3(\alpha)-h_1(\alpha)=0 \tag{26}$$

oricare ar fi α.

Ne vom servi de această identitate la Nr. următor.

9. — Formula (4′) ne permite să scriem

$$\iint\limits_{T} x^n dxdy=\frac{2S}{(n+1)(n+2)}\Big\{\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n \tag{27}$$
$$+\lambda_1^{n-1}(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^{n-1}(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2)$$
$$+\lambda_1^{n-2}(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+\lambda_2^{n-2}(\lambda_3^2+\lambda_1^2)+\lambda_3^{n-2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$$
$$+\lambda_1^{n-3}(\lambda_2^3+\lambda_3^3)+\lambda_2^{n-3}(\lambda_3^3+\lambda_1^3)+\lambda_3^{n-3}(\lambda_1^3+\lambda_2^3)$$
$$+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(\lambda_1^{n-3}+\lambda_2^{n-3}+\lambda_3^{n-3}\right)$$
$$+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left[\lambda_1^{n-4}(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^{n-4}(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^{n-4}(\lambda_1+\lambda_2)\right]$$
$$+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left[\lambda_1^{n-5}(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+\lambda_2^{n-5}(\lambda_3^2+\lambda_1^2)+\lambda_3^{n-5}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\right]$$
$$+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$
$$+\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\left(\lambda_1^{n-6}+\lambda_2^{n-6}+\lambda_3^{n-6}\right)+\cdots\Big\}\,.$$

Cu ajutorul formulei (24) putem calcula membrul al doilea al identității (17) iar cu ajutorul formulei (27) avem primul membru al identității (17). Pentru ca identitatea (17) să existe oricare ar fi λ_1, λ_2, λ_3 trebue să avem următoarele ecuații;

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}f_1(\alpha_i)=\frac{2S}{(n+1)(n+2)}\\
&\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}f_2(\alpha_i)=\frac{2S}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{C_n^1}\\
&\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}f_3(\alpha_i)=\frac{2S}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{C_n^2}\\
&\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}f_4(\alpha_i)=\frac{2S}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{C_n^3}\\
&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\
&\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}g_1(\alpha_i)=\frac{2S}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{2C_n^2}\\
&\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}g_2(\alpha_i)=\frac{2S}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{3C_n^3}\\
&\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}g_3(\alpha_i)=\frac{2S}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{4C_n^4}\\
&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\\
&\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^n}h_1(\alpha_i)=\frac{2S}{(n+1)(n+2)}\frac{1}{6C_n^4}\\
&\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot
\end{aligned} \tag{28}$$

Aceste ecuații ar trebui să determine pe $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Insă un asemenea sistem de ecuații liniare este incompatibil. Intr-adevăr să formăm între ecuațiile sistemului (28) combinația liniară indicată de identitatea (26) și să ținem seama de identitatea (26). Vom obține relația

$$\frac{1}{C_n^2} - \frac{1}{C_n^3} - \frac{1}{2C_n^2} + \frac{1}{3C_n^3} + \frac{1}{4C_n^4} - \frac{1}{6C_n^4} = 0$$

sau

$$n^2 - 9n + 20 = 0,$$

care este imposibilă pentru $n \geq 7$.

S-a demonstrat astfel că identitatea (17) și deci formula de cubatură (3) este imposibilă pentru $n \geq 7$.

10. — Să considerăm acum cazul $n = 6$. Avem

$$\begin{aligned}(a+b+c)^6 = {} & a^6+b^6+c^6 \\ & +6\,[a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)] \\ & +15\,[a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)] \\ & +20\,(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) \\ & +30\,abc\,(a^3+b^3+c^3) \\ & +60\,abc\,[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)] \\ & +90\,a^2b^2c^2 .\end{aligned}$$

Fie

$$U(\alpha) = (\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^6 + (\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)^6 + (\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)^6 .$$

Dezvoltînd fiecare termen din membrul al doilea cu ajutorul formulei precedente, vom putea scrie

$$\begin{aligned}U(\alpha) = {} & f_1(\alpha)\,(\lambda_1^6+\lambda_2^6+\lambda_3^6) \\ & +6\,f_2(\alpha)\,[\lambda_1^5(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^5(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^5(\lambda_1+\lambda_2)] \\ & +15\,f_3(\alpha)\,[\lambda_1^4(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+\lambda_2^4(\lambda_3^2+\lambda_1^2)+\lambda_3^4(\lambda_1^2+\lambda_2^2)] \\ & +20\,f_4(\alpha)\,(\lambda_1^3\lambda_2^3+\lambda_2^3\lambda_3^3+\lambda_3^3\lambda_1^3) \\ & +30\,g_1(\alpha)\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\,(\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3) \\ & +60\,g_2(\alpha)\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\,[\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^2(\lambda_1+\lambda_2)] \\ & +90\,h_1(\alpha)\,\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 ,\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \alpha^6+2 \\ f_2(\alpha) &= \alpha^5+\alpha+1 \\ f_3(\alpha) &= \alpha^4+\alpha^2+1 \\ f_4(\alpha) &= 2\alpha^3+1 \\ g_1(\alpha) &= \alpha^4+2\alpha \\ g_2(\alpha) &= \alpha^3+\alpha^2+\alpha \\ h_1(\alpha) &= 3\alpha^2. \end{aligned}$$

Ca și la Nr. 8 se arată că între aceste polinoame există identitatea

$$(29) \qquad f_3(\alpha) - f_4(\alpha) - g_1(\alpha) + 2g_2(\alpha) - h_1(\alpha) = 0 ,$$

oricare ar fi α.

Formînd identitatea (17) și scriind ecuațiile analoage cu ecuațiile (28), vom avea

$$(30) \qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^6}\, f_1(\alpha_i) &= \frac{S}{28} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^6}\, f_2(\alpha_i) &= \frac{S}{28}\cdot\frac{1}{6} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^6}\, f_3(\alpha_i) &= \frac{S}{28}\,\frac{1}{15} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^6}\, f_4(\alpha_i) &= \frac{S}{28}\,\frac{1}{20} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^6}\, g_1(\alpha_i) &= \frac{S}{28}\,\frac{1}{30} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^6}\, g_2(\alpha_i) &= \frac{S}{28}\,\frac{1}{60} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{P_i}{(\alpha_i+2)^6}\, h_1(\alpha_i) &= \frac{S}{28}\,\frac{1}{90} . \end{aligned}$$

Acest sistem de ecuații lineare în $P_1, P_2, \ldots, P_6$, este incompatibil. Intradevăr făcînd combinația lineară indicată de identitatea (29) și ținînd seama de această identitate, deducem că trebuie să avem

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{20} - \frac{1}{30} + \frac{1}{30} - \frac{1}{90} = 0$$

ceeace este o imposibilitate.

Am demonstrat astfel, că nu poate exista o formulă de cubatură de forma (3), nici pentru $n = 6$, adică formule de cubatură de forma (3) nu pot exista pentru $n > 5$.

§ 3. — **Cazurile n $\leqq$ 5.**

11. — Vom arăta acum că pentru $n \leqq 5$, sistemul de ecuații lineare care rezultă din identitatea (17) oricare ar fi triunghiul T este în general compatibil. Vom arăta aceasta pentru fiecare caz în parte, $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Să considerăm întîi cazul $n = 1$. Identitatea (17) în acest caz

$$\iint_T x\,dxdy = \frac{P}{\alpha+2}\left[(\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)\right]$$

se reduce la

$$\iint_T x\,dxdy = P\,(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$

Ţinînd seama că

$$\iint_T x\,dx\,dy = \frac{S}{3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$

se deduce că

$$P=\frac{S}{3}.$$

Vom avea deci formula de cubatură

$$\iint_T \varphi_1(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{3}\left[\varphi_1(L)+\varphi_1(M)+\varphi_1(N)\right] \tag{31}$$

valabilă pentru orice polinom de gradul întîi şi oricare ar fi α.

In particular putem scrie

$$\iint_T \varphi_1(x,y)\,dx\,dy = S\,\varphi_1(G) \tag{32}$$

$$\iint_T \varphi_1(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{3}\left[\varphi_1(A)+\varphi_1(B)+\varphi_1(C)\right]. \tag{32'}$$

Formulele (32) şi (32′) sînt bine cunoscute.

12. — *Cazul* $n=2$. Ţinînd seama că

$$\begin{aligned}(\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2+(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)^2+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)^2\\ =(\alpha^2+2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)+(4\alpha+2)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\end{aligned}$$

formula (17) ne dă

$$\iint_T x^2dxdy = \sum_{i=1}^{2}\left[P_i\frac{\alpha_i^2+2}{(\alpha_i+2)^2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)+P_i\frac{4\alpha_i+2}{(\alpha_i+2)^2}(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\right] \tag{33}$$

Pe de altă parte formula (4′) ne dă

$$\iint_T x^2dx\,dy = \frac{S}{6}\left[(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\right] \tag{33'}$$

Identificînd membrii ai doilea ai formulelor (33), (33′) sîntem conduşi la sistemul de ecuaţii lineare.

$$\begin{aligned}\frac{P_1}{(\alpha_1+2)^2}(\alpha_1^2+2)+\frac{P_2}{(\alpha_2+2)^2}(\alpha_2^2+2)&=\frac{S}{6}\\ \frac{P_1}{(\alpha_1+2)^2}(2\alpha_1+1)+\frac{P_2}{(\alpha_2+2)^2}(2\alpha_2+1)&=\frac{S}{12}.\end{aligned} \tag{34}$$

Determinantul acestui sistem în $\frac{P_1}{(\alpha_1+2)^2}$ şi $\frac{P_2}{(\alpha_2+2)^2}$ este

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\alpha_1^2+2 & \alpha_2^2+2\\ 2\alpha_1+1 & 2\alpha_2+1\end{vmatrix}$$

adică

$$\Delta_2=(\alpha_1-\alpha_2)\left[2\alpha_1\alpha_2+\alpha_1+\alpha_2-4\right]. \tag{35}$$

Determinantul Δ_2 este diferit de 0 dacă $\alpha_1\neq\alpha_2$ şi dacă

$$2\alpha_1\alpha_2+(\alpha_1+\alpha_2)-4\neq 0. \tag{36}$$

In acest caz sistemul de ecuaţii (34) determină pe P_1 şi P_2 şi prin urmare avem o formulă de cubatură de forma

$$\iint_T \varphi_2(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{2}P_i\left[\varphi_2(L_i)+\varphi_2(M_i)+\varphi_2(N_i)\right] \tag{37}$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi_2(x,y)$ de gradul al doilea şi oricare ar fi triunghiul T.

Caz particular.

Să alegem $\alpha_2=1$, ceea ce face ca cele trei noduri L_2, M_2, N_2 să se confunde în centrul de greutate G al triunghiului ABC. In acest caz formula (35) arată că Δ_2 se reduce la

$$\Delta_2=3(\alpha_1-1)^2$$

Se vede că $\Delta_2\neq 0$, prin urmare există totdeauna o formulă de cubatură de forma

$$\iint_T \varphi_2(x,y)\,dx\,dy = P_1\left[\varphi_2(L_1)+\varphi_2(M_1)+\varphi_2(N_1)\right]+3P_2\varphi_2(G) \tag{38}$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi_2(x,y)$, de gradul al doilea şi oricare ar fi triunghiul T, nodurile L_1, M_1, N_1 corespunzînd la $\alpha_1\neq 1$.

Făcînd $\alpha_2=1$, în sistemul de ecuaţii (34) obţinem sistemul

$$\begin{aligned}\frac{P_1}{(\alpha_1+2)^2}(\alpha_1^2+2)+\frac{P_2}{3}&=\frac{S}{6}\\ \frac{P_2}{(\alpha_2+2)^2}(\alpha_2^2+2)+\frac{P_2}{3}&=\frac{S}{12}\end{aligned}$$

care ne dă

$$P_1=\frac{S}{12}\frac{(\alpha_1+2)^2}{(\alpha_1-1)^2},\qquad P_2=\frac{3S}{12}\frac{\alpha_1(\alpha_1-4)}{(\alpha_1-1)^2}$$

şi forma (38) devine

$$\iint_T \varphi_2(x,y)dxdy = \frac{S}{12}\left\{\frac{(\alpha_1+2)^2}{(\alpha_1-1)^2}\left[\varphi_2(L_1)+\varphi_2(M_1)+\varphi_2(N_1)\right]+9\frac{\alpha_1(\alpha_1-4)}{(\alpha_1-1)^2}\varphi_2(G)\right\} \tag{38'}$$

Din formula (38′) vom scoate două cazuri particulare interesante.

1°. Făcînd pe α_1 să tindă către $+\infty$, sîntem conduși la formula

$$\iint_T \varphi_2(x,y)\,dx\,dy=\frac{S}{12}\left[\varphi_2(A)+\varphi_2(B)+\varphi_2(C)+9\,\varphi_2(G)\right] \tag{1}$$

care este identică cu formula (1), care a fost punctul de plecare al acestei lucrări.

2°. Observăm că coeficientul lui $\varphi_2(G)$ se anulează dacă alegem $\alpha_1=0$, sau $\alpha_1=4$. In primul caz sîntem conduși de formula

$$\iint_T \varphi_2(x,y)\,dx\,dy=\frac{S}{3}\left[\varphi_2(A')+\varphi_2(B')+\varphi_2(C')\right] \tag{39}$$

unde A′, B′, C′ sînt mijloacele laturilor triunghiului ABC și care este valabilă oricare ar fi polinomul $\varphi_2(x,y)$ de gradul al doilea și oricare ar fi triunghiul T.

In al doilea caz sîntem conduși la formula

$$\iint_T \varphi_2(x,y)\,dx\,dy=\frac{S}{3}\left[\varphi_2(L)+\varphi_2(M)+\varphi_2(N)\right] \tag{40}$$

unde L, M, N sînt mijloacele segmentelor GA, GB, GC și care este valabilă oricare ar fi polinomul $\varphi_2(x,y)$ de gradul al doilea și oricare ar fi triunghiul T.

Formulele (39), (40) pot fi mai utile în practică, decît formula (1), deoarece în membrul al doilea al formulelor (39) și (40) avem numai trei noduri, pe cînd în formula (1) avem patru noduri.

13. — *Cazul $n=3$.*

Ținînd seama că

$$\begin{aligned}(\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3&+(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)^3+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)^3\\&=(\alpha^3+2)(\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3)+3(\alpha^2+\alpha+1)\left[\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^2(\lambda_1+\lambda_2)\right]\\&\quad+18\,\alpha\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

formula (17) se scrie

$$\begin{aligned}\iint_T x^3dx\,dy=\sum_{i=1}^{3}\Big\{&P_i\frac{\alpha_i^3+2}{(\alpha_i+2)^3}(\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3)\\&+3\,P_i\frac{\alpha_i^2+\alpha_i+1}{(\alpha_i+2)^3}\left[\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^2(\lambda_1+\lambda_2)\right]\\&+18\,P_i\frac{\alpha_i}{(\alpha_i+2)^3}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Big\}\end{aligned} \tag{41}$$

Pe de altă parte, formula (4′) ne dă

$$\iint_T x^3dx\,dy=\frac{S}{10}\left\{\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\left[\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^2(\lambda_1+\lambda_2)\right]+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right\} \tag{42}$$

Identificînd formulele (41) și (42) sîntem conduși la sistemul de ecuații liniare

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}P_i\frac{\alpha_i^3+2}{(\alpha_i+2)^3}&=\frac{S}{10}\\ \sum_{i=1}^{3}P_i\frac{\alpha_i^2+\alpha_i+1}{(\alpha_i+2)^3}&=\frac{S}{30}\\ \sum_{i=1}^{3}P_i\frac{\alpha_i}{(\alpha_i+2)^3}&=\frac{S}{180}\end{aligned} \tag{43}$$

Determinantul acestui sistem în $\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^3}$, unde $i=1,2,3$, este

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_1^2+\alpha_1+1 & \alpha_2^2+\alpha_2+1 & \alpha_3^2+\alpha_3+1\\ \alpha_1^3+2 & \alpha_2^3+2 & \alpha_3^3+2\end{vmatrix} \tag{44}$$

și se arată că notînd

$$V_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2\end{vmatrix}$$

avem

$$\Delta_3=\left[\alpha_1\alpha_2\alpha_3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+2\right]V_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \tag{44′}$$

Deci dacă α_1, α_2, α_3 sînt numere diferite între ele și sînt astfel încît să avem

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+2\neq 0\,. \tag{44″}$$

sistemul de ecuații liniare (43) are o soluție unică în P_1, P_2, P_3. Prin urmare vom avea în acest caz o formulă de cubatură de forma

$$\iint_T \varphi_3(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{3}P_i\left[\varphi_3(L_i)+\varphi_3(M_i)+\varphi_3(N_i)\right] \tag{45}$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi_3(x,y)$ de gradul al treilea și oricare ar fi triunghiul T.

Caz particular.

Să alegem $\alpha_3=1$. Determinantul (44) se reduce în acest caz la

$$\Delta_3=(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)V_3(\alpha_1,\alpha_2,1)$$

ceeace dovedește că formula (45) este totdeauna posibilă dacă numerele α_1, α_2, 1 sînt diferite între ele.

Soluția sistemului (43) în acest caz este

$$\begin{aligned}P_1&=\frac{S}{60}\frac{(\alpha_1+2)^3(\alpha_2-3)}{(\alpha_1-1)^2(\alpha_2-\alpha_1)},\quad P_2=\frac{S}{60}\frac{(\alpha_2+2)^3(\alpha_1-3)}{(\alpha_2-1)^2(\alpha_1-\alpha_2)}\\ P_3&=\frac{9S}{60}\left[1-\frac{3\alpha_1(\alpha_2-3)}{(\alpha_1-1)^2(\alpha_2-\alpha_1)}-\frac{3\alpha_2(\alpha_1-3)}{(\alpha_2-1)^2(\alpha_1-\alpha_2)}\right]\end{aligned} \tag{46}$$

Avem astfel următoarea formulă de cubatură

$$(47)\quad \iint_T \varphi_3(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{60}\sum_{i=1}^{2}\frac{(\alpha_1+2)^3(\alpha_2-3)}{(\alpha_1-1)^2(\alpha_2-\alpha_1)}[\varphi_3(L_1)+\varphi_3(M_1)+\varphi_3(N_1)]$$
$$+27\left(1-3\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_1(\alpha_2-3)}{(\alpha_1-1)^2(\alpha_2-\alpha_1)}\right)\varphi_3(G)\Big\}$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi_3(x,y)$ de gradul al treilea și orice triunghi T.

Iată două exemple trase din formula (47)

1°. Să facem $\alpha_1=0$ și pe α_2 să tindă către $+\infty$, vom obține formula

$$(48)\quad \iint_T \varphi_3(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{60}\Big\{3[\varphi_3(A)+\varphi_3(B)+\varphi_3(C)]+8[\varphi_3(A')+\varphi_3(B')+\varphi_3(C')]$$
$$+27\varphi_3(G)\Big\}$$

unde A′, B′, C′ sînt mijloacele laturilor triunghiului ABC.

2°. — Să alegem în formulele (46) $\alpha_1 = 3$;, vom avea

$$P_1=\frac{25S}{48},\quad P_2=0,\quad P_3=-\frac{9S}{48}.$$

ceea ce ne conduce la formula de cubatură

$$(49)\quad \iint_T \varphi_3(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{48}\Big\{25[\varphi_3(L)+\varphi_3(M)+\varphi_3(N)]-27\varphi_3(G)\Big\}$$

unde L, M, N, sînt nodurile care corespund la $\alpha=3$.

Formula (49) este importantă căci ea utilizează numai pentru noduri L, M, N și G.

14. — *Cazul* $n=4$.

Ținînd seama că

$$(\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^4+(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)^4+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)^4$$
$$=(\alpha^4+2)(\lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4)+4(\alpha^3+\alpha+1)[\lambda_1^3(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^3(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^3(\lambda_1+\lambda_2)]$$
$$+6(2\alpha^2+1)(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2)+12(\alpha^2+2\alpha)\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),$$

formula (17) se scrie

$$(50)\quad \iint_T x^4\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{4}\Big\{P_i\frac{\alpha_i^4+2}{(\alpha_i+2)^4}(\lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4)$$
$$+4P_i\frac{\alpha_i^3+\alpha_i+1}{(\alpha_i+2)^4}[\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^2(\lambda_1+\lambda_2)]$$
$$+6P_i\frac{2\alpha_i^2+1}{(\alpha_i+2)^4}(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2)+12P_i\frac{\alpha_i^2+2\alpha_i}{(\alpha_i+2)^4}\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Big\}$$

pe de altă parte, avem

$$(51)\quad \iint_T x^4\,dx\,dy = \frac{S}{15}\Big\{(\lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4)+[\lambda_1^3(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^3(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^3(\lambda_1+\lambda_2)]$$
$$+(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2)+\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\Big\}$$

Identificînd formulele (50) și (51) avem ecuațiile

$$(52)\quad \begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4}P_i\frac{\alpha_i^4+2}{(\alpha_i+2)^4}=\frac{S}{15}\\
&\sum_{i=1}^{4}P_i\frac{\alpha_i^3+\alpha_i+1}{(\alpha_i+2)^4}=\frac{S}{60}\\
&\sum_{i=1}^{4}P_i\frac{2\alpha_i^2+1}{(\alpha_i+2)^4}=\frac{S}{90}\\
&\sum_{i=1}^{4}P_i\frac{\alpha_i^2+2\alpha_i}{(\alpha_i+2)^4}=\frac{S}{180}
\end{aligned}$$

care determină pe P_1, P_2, P_3 și P_4.

Determinantul acestui sistem în $\frac{P_i}{(\alpha_i+2)^4}$ unde $i=1,2,3,4$, este

$$(53)\quad \Delta_4=\begin{vmatrix}
\alpha_1^2+2\alpha_1 & \alpha_2^2+2\alpha_2 & \alpha_3^2+2\alpha_3 & \alpha_4^2+2\alpha_4\\
2\alpha_1^2+1 & 2\alpha_2^2+1 & 2\alpha_3^2+1 & 2\alpha_4^2+1\\
\alpha_1^3+\alpha_1+1 & \alpha_2^3+\alpha_2+1 & \alpha_3^3+\alpha_3+1 & \alpha_4^3+\alpha_4+1\\
\alpha_1^4+2 & \alpha_2^4+2 & \alpha_3^4+2 & \alpha_4^4+2
\end{vmatrix}$$

și se arată că avem

$$(54)\quad \Delta_4=\left(4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4-\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3-2\sum\alpha_1\alpha_2+5\sum\alpha_1-8\right)V_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$$

unde $V_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ este determinantul Vandermonde al numerelor α_1, α_2, α_3, α_4.

Din formula (54) rezultă că dacă α_1, α_2, α_3, α_4 sînt numere diferite între ele și sînt astfel încît să avem

$$(54')\quad 4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4-\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3-2\sum\alpha_1\alpha_2+5\sum\alpha_1-8\neq 0$$

atunci este posibil să rezolvăm sistemul de ecuații liniare (52) în P_1, P_2, P_3, P_4, care are o soluție unică. Deci vom avea în acest caz o formulă de cubatură de forma

$$(55)\quad \iint_T \varphi_4(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{4}P_i[\varphi_4(L_i)+\varphi_4(M_i)+\varphi_4(N_i)]$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi_4(x, y)$ de gradul al patrulea și oricare ar fi triunghiul T.

Caz particular.

Să alegem $\alpha_4 = 1$. Determinantul (53) se reduce în acest caz la

$$\Delta_4 = 3(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1) V_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 1)$$

și aceasta dovedește că formula (55) este totdeauna posibilă, dacă numerele α_1, α_2, α_3, 1 sînt diferite între ele.

Eliminînd pe P_4 între ecuațiile (52) sîntem conduși la ecuațiile

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{P_i(\alpha_i - 1)^2}{(\alpha_i + 2)^4}(\alpha_i^2 + \alpha_i + 1) = \frac{S}{20}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{P_i(\alpha_i - 1)^2}{(\alpha_i + 2)^4}\alpha_i = \frac{S}{180}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{P_i(\alpha_i - 1)^2}{(\alpha_i + 2)^4} = \frac{S}{180}$$

și dacă notăm

$$P_i \frac{(\alpha_i - 1)^2}{(\alpha_i + 2)^4} = Q_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

din sistemul precedent deducem că

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{S}{180}$$

$$Q_1\alpha_1 + Q_2\alpha_2 + Q_3\alpha_3 = \frac{S}{180}$$

$$Q_1\alpha_1^2 + Q_2\alpha_2^2 + Q_3\alpha_3^2 = \frac{7S}{180}$$

Acest sistem se rezolvă imediat și se obține

$$(56) \qquad \begin{aligned} P_1 &= \frac{S}{180}\,\frac{(\alpha_1 + 2)^4}{(\alpha_1 - 1)^2}\,\frac{\alpha_2\alpha_3 - (\alpha_2 + \alpha_3) + 7}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ P_2 &= \frac{S}{180}\,\frac{(\alpha_2 + 2)^4}{(\alpha_2 - 1)^2}\,\frac{\alpha_3\alpha_1 - (\alpha_3 + \alpha_1) + 7}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_2)} \\ P_3 &= \frac{S}{180}\,\frac{(\alpha_3 + 2)^4}{(\alpha_3 - 1)^2}\,\frac{\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) + 7}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3)} \end{aligned}$$

Ultima ecuație (52) în care $\alpha_4 = 1$, ne dă

$$(56') \qquad P_4 = \frac{3S}{20}\left\{1 - \sum_{1}^{3} \frac{(\alpha_1^2 + 2\alpha_1)[\alpha_2\alpha_3 - (\alpha_2 + \alpha_3) + 7]}{(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}\right\}$$

Avem astfel următoarea formulă de cubatură

$$(57) \qquad \iint_T \varphi_4(x, y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{S}{180}\left\{\sum_{1}^{3} \frac{(\alpha_1 + 2)^4}{(\alpha_1 - 1)^2}\,\frac{\alpha_2\alpha_3 - (\alpha_2 + \alpha_3) + 7}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}[\varphi_4(L_1) + \varphi_4(M_1) + \varphi_4(N_1)]\right.$$

$$\left. + 81\left[1 - \sum_{1}^{3} \frac{(\alpha_1^2 + 2\alpha_1)[\alpha_2\alpha_3 - (\alpha_2 + \alpha_3) + 7]}{(\alpha_1 - 1)^2(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_1)}\right]\varphi_4(G)\right\}$$

valabilă pentru un polimon oarecare $\varphi_4(x, y)$ de gradul al patrulea și un triunghi oarecare T.

Să dăm un exemplu de formulă de cubatură de tipul (57).

In formula (57) să facem pe α_3 să tindă către $+\infty$, și apoi $\alpha_2 = 0$. Vom obține formula

$$\iint_T \varphi_4(x, y)\,dx\,dy = \frac{S}{180}\left\{\frac{(\alpha_1 + 2)^4}{(\alpha_1 - 1)^2}\,\frac{1}{\alpha_1}[\varphi_4(L_1) + \varphi_4(M_1) + \varphi_4(N_1)]\right.$$

$$+ \frac{16(\alpha_1 - 1)}{\alpha}[\varphi_4(A') + \varphi_4(B') + \varphi_4(C')]$$

$$+ (7 - \alpha_1)[\varphi_4(A) + \varphi_4(B) + \varphi_4(C)]$$

$$\left. + 81\,\frac{\alpha_1^2 - 3\alpha_1 - 1}{(\alpha_1 - 1)^2}\varphi_4(G)\right\}$$

Pentru a micșora numărul de noduri se impune să alegem $\alpha_1 = 7$. Obținem atunci formulele de cubatură

$$(58) \qquad \iint_T \varphi_4(x, y)\,dx\,dy = \frac{S}{1680}\Big\{243[\varphi_4(L_1) + \varphi_4(M_1) + \varphi_4(N_1)]$$

$$+ 128[\varphi_4(A') + \varphi_4(B') + \varphi_4(C')] + 567\varphi_4(G)\Big\}$$

In această formulă care folosește numai 7 noduri și are coeficienți raționali, nodurile A′, B′, C′ sînt mijloacele laturilor triunghiului ABC, iar L_1, M_1, N_1 sînt nodurile care corespund la $\alpha_1 = 7$.

15. — Să revenim la formula (57) și să cercetăm dacă este posibil să alegem pe α_1 și α_2 astfel ca să avem $P_3 = 0$ și $P_4 = 0$, adică să obținem o formulă de cubatură de tipul (57) cu *6 noduri*.

Ținînd seama că formula (57) este verificată de $\varphi_4 = 1$, avem

$P_1 + P_2 + P_3 + 3P_4 = \dfrac{S}{3}$ și pentrucă $P_3 = P_4 = 0$, deducem că trebuie să avem

$$P_1 + P_2 = \frac{S}{3}.$$

Utilizînd formulele (56) deducem că α_1 și α_2 se determină prin ecuațiile

(59) $$\alpha_1\alpha_2-(\alpha_1+\alpha_2)+7=0.$$

$$\frac{(\alpha_1+2)^4}{(\alpha_1-1)^2}\,\frac{\alpha_2\alpha_3-(\alpha_2+\alpha_3)+7}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)}+\frac{(\alpha_2+2)^4}{(\alpha_2-1)^2}\,\frac{\alpha_3\alpha_1-(\alpha_3+\alpha_1)+7}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)}=60$$

In ecuațiile (59) să facem schimbarea

(60) $$\alpha_1-1=\beta_1,\quad \alpha_2-1=\beta_2,\quad \alpha_3-1=\beta_3$$

Ecuațiile (59) devin

(61) $$\beta_1\beta_2+6=o.$$

$$\frac{(\beta_1+3)^4}{\beta_1^2}\cdot\frac{\beta_2\beta_3+6}{\beta_3-\beta_1}-\frac{(\beta_2+3)^4}{\beta_2^2}\,\frac{\beta_3\beta_1+6}{\beta_3-\beta_2}=60(\beta_2-\beta_1)$$

Să observăm că ținind seama de prima ecuație (61) avem

$$\frac{\beta_2\beta_3+6}{\beta_3-\beta_1}=\frac{1}{\beta_1}\,\frac{6\beta_1-6\beta_3}{\beta_3-\beta_1}=-\frac{6}{\beta_1}$$

$$\frac{\beta_3\beta_1+6}{\beta_3-\beta_2}=\frac{1}{\beta_2}\,\frac{6\beta_2-6\beta_3}{\beta_3-\beta_2}=-\frac{6}{\beta_2}$$

astfel incit a doua ecuație (61) devine

$$\frac{(\beta_2+3)^4}{\beta_2^3}-\frac{(\beta_1+3)^4}{\beta_1^3}=10(\beta_2-\beta_1)$$

și ea se reduce la

$$4(\beta_1+\beta_2)+3\,\frac{(\beta_1+\beta_2)^2-\beta_1\beta_2}{\beta_1\beta_2}=o$$

Notind

$$\beta_1+\beta_2=u$$

această ecuație devine

$$u^2-8u+6=o.$$

și ea are rădăcinile

$$u_1=4+\sqrt{10},\qquad u_2=4-\sqrt{10}.$$

Rezultă că β_1 și β_2 sint date de sistemele de ecuații

(62) $$\beta_1\beta_2=-6 \qquad \beta_1\beta_2=-6$$
$$\beta_1+\beta_2=4+\sqrt{10} \qquad \beta_1+\beta_2=4-\sqrt{10}$$

care ne dau

(63) $$\beta_1=\frac{4+\sqrt{10}+\sqrt{50+8\sqrt{10}}}{2}=7{,}9197\ldots.$$

$$\beta_2=\frac{4+\sqrt{10}-\sqrt{50+8\sqrt{10}}}{2}=-0{,}7575\ldots.$$

sau

(63') $$\beta_1'=\frac{4-\sqrt{10}+\sqrt{50-8\sqrt{10}}}{2}=2{,}9039\ldots$$

$$\beta_2'=\frac{4-\sqrt{10}-\sqrt{50-8\sqrt{10}}}{2}=-2{,}0662\ldots$$

Valorile corespunzătoare ale lui α_1 și α_2 le deducem din ecuațiile (60). Se obține

(64) $$\alpha_1=\frac{6+\sqrt{10}+\sqrt{50+8\sqrt{10}}}{2}=8{,}9177\ldots$$

$$\alpha_2=\frac{6+\sqrt{10}-\sqrt{50+8\sqrt{10}}}{2}=0{,}2424\ldots$$

și

(64') $$\alpha_1'=\frac{6-\sqrt{10}+\sqrt{50-8\sqrt{10}}}{2}=3{,}9039\ldots.$$

$$\alpha_2'=\frac{6-\sqrt{10}-\sqrt{50-8\sqrt{10}}}{2}=-1{,}0662\ldots.$$

Valorile lui P_1, P_2 care corespund la α_1, α_2 sau α'_1, α'_2 le calculăm cu ajutorul formulelor (56). Pentru a da valorile lor exacte să observăm că putem scrie

$$P_1=\frac{S}{180}\,\frac{(\beta_1+3)^4}{\beta_1^3}\,\frac{\beta_1(\beta_2\beta_3+6)}{(\beta_3-\beta_1)(\beta_2-\beta_1)}$$

$$P_2=\frac{S}{180}\,\frac{(\beta_2+3)^4}{\beta_2^3}\,\frac{\beta_2(\beta_3\beta_1+6)}{(\beta_1-\beta_2)(\beta_3-\beta_2)}$$

adică

(65) $$P_1=\frac{S}{30}\,\frac{(\beta_1+3)^4}{\beta_1^3(\beta_1-\beta_2)}$$

$$P_2=-\frac{S}{30}\,\frac{(\beta_2+3)^4}{\beta_2^3(\beta_1-\beta_2)}$$

Făcind produsul P_1P_2 și ținind seama de primul grup de ecuații (62) vom avea,

$$P_1P_2=\frac{S^2}{900}\,\frac{[\beta_1\beta_2+3(\beta_1+\beta_2)+9]^4}{6^3(\beta_1-\beta_2)^2}$$

adică

$$P_1P_2=\frac{S^2}{24.0}\,\frac{(5+\sqrt{10})^4}{50+8\sqrt{10}}$$

sau

$$P_1 P_2 = \frac{S^2}{192}\,\frac{1105 + 344\sqrt{10}}{465}$$

P_1 și P_2 sînt prin urmare rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$V^2 - \frac{S}{3}V + \frac{S^2}{192}\,\frac{1105 + 344\sqrt{10}}{465} = 0$$

Se deduce că valorile P_1 și P_2 care corespund la α_1 și α_2 sînt

$$P_1 = \frac{S}{6}\left(1 - \sqrt{\frac{1375 - 344\sqrt{10}}{2480}}\right) = \frac{S}{6} \times 0{,}3402\ldots.$$

$$P_2 = \frac{S}{6}\left(1 + \sqrt{\frac{1375 - 344\sqrt{10}}{2480}}\right) = \frac{S}{6} \times 1{,}6597\ldots.$$

De asemenea valorile lui P'_1 și P'_2 care corespund la α'_1 și α'_2 sînt

$$P'_1 = \frac{S}{6}\left(1 + \sqrt{\frac{1375 + 344\sqrt{10}}{2480}}\right) = \frac{S}{6} \times 1{,}9965\ldots.$$

$$P_2 = \frac{S}{6}\left(1 - \sqrt{\frac{1375 + 344\sqrt{10}}{2480}}\right) = \frac{S}{6} \times 0{,}0034\ldots.$$

Obținem prin urmare două formule de cubatură cu 6 noduri valabilă pentru un polinom oarecare de gradul al patrulea. Prima formulă este

$$(66)\quad \iint\limits_T \varphi_4(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{6}\left\{\left(1 - \sqrt{\frac{1375-344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L_1) + \varphi_4(M_1) + \varphi_4(N_1)]\right.$$
$$\left. + \left(1 + \sqrt{\frac{1375-344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L_2) + \varphi_4(M_2) + \varphi_4(N_2)]\right\}$$

unde nodurile L_1, M_1, N_1 și L_2, M_2, N_2 corespund la valorile α_1 și α_2 date de formulele (64).

A doua formulă este

$$(66')\quad \iint\limits_T \varphi_4(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{6}\left\{\left(1 + \sqrt{\frac{1375+344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L'_1) + \varphi_4(M'_1) + \varphi_4(N'_1)]\right.$$
$$\left. + \left(1 - \sqrt{\frac{1375+344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L'_2) + \varphi_4(M'_2) + \varphi_4(N'_2)]\right\}$$

unde nodurile L'_1, M'_1, N'_1, și L'_2, M'_2, N'_2 corespund la valorile α'_1 și α'_2 date de formulele (64').

16. — *Cazul $n = 5$.*

Avem

$$(\alpha\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^5 + (\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \lambda_3)^5 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3)^5$$
$$= (\alpha^5 + 2)(\lambda_1^5 + \lambda_2^5 + \lambda_3^5)$$
$$+ 5(\alpha' + \alpha + 1)[\lambda_1^4(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2^4(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3^4(\lambda_1 + \lambda_2)]$$
$$+ 10(\alpha^3 + \alpha + 1)[\lambda_1^3(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \lambda_2^3(\lambda_3^2 + \lambda_1^2) + \lambda_3^3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)]$$
$$+ 20(\alpha^3 + 2\alpha)\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$
$$+ 30(2\alpha^2 + \alpha)\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)$$

astfel că formula (17) se scrie;

$$(67)\quad \iint\limits_T x^5\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{5}\left\{P_i\frac{\alpha_i^5 + 2}{(\alpha_i + 2)^5}(\lambda_1^5 + \lambda_2^5 + \lambda_3^5)\right.$$
$$+ 5P_i\frac{\alpha_i^4 + \alpha_i + 1}{(\alpha_i + 2)^5}[\lambda_1^4(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2^4(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3^4(\lambda_1 + \lambda_2)]$$
$$+ 10P_i\frac{\alpha_i^3 + \alpha_i^2 + 1}{(\alpha_i + 2)^5}[\lambda_1^3(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \lambda_2^3(\lambda_3^2 + \lambda_1^2) + \lambda_3^3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)]$$
$$+ 20P_i\frac{\alpha_i^3 + 2\alpha_i}{(\alpha_i + 2)^5}\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$
$$\left. + 30P_i\frac{2\alpha_i^2 + \alpha_i}{(\alpha_i + 2)^5}\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\right\}$$

Pe de altă parte, avem

$$(68)\quad \iint\limits_T x^5\,dx\,dy = \frac{S}{21}\left\{(\lambda_1^5 + \lambda_2^5 + \lambda_3^5) + [\lambda_1^4(\lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2^4(\lambda_3 + \lambda_1) + \lambda_3^4(\lambda_1 + \lambda_2)]\right.$$
$$+ [\lambda_1^3(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \lambda_2^3(\lambda_3^2 + \lambda_1^2) + \lambda_3^3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)]$$
$$\left. + \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\right\}$$

Identificînd (67) și (68) obținem ecuațiile

$$(69)\quad \begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{5} P_i\frac{\alpha_i^5 + 2}{(\alpha_i + 2)^5} = \frac{S}{21}\\
&\sum_{i=1}^{5} P_i\frac{\alpha_i^4 + \alpha_i + 1}{(\alpha_i + 2)^5} = \frac{S}{105}\\
&\sum_{i=1}^{5} P_i\frac{\alpha_i^3 + \alpha_i^2 + 1}{(\alpha_i + 2)^5} = \frac{S}{210}\\
&\sum_{i=1}^{5} P_i\frac{\alpha_i^3 + 2\alpha_i}{(\alpha_i + 2)^5} = \frac{S}{420}\\
&\sum_{i=1}^{5} P_i\frac{2\alpha_i^2 + \alpha_i}{(\alpha_i + 2)^5} = \frac{S}{630}
\end{aligned}$$

care determină pe P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

Determinantul sistemului (69) în $\frac{P_i}{(\alpha_i + 2)^5}$ unde $i = 1, 2, 3, 4, 5,$ este

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 2\alpha_1^2+\alpha_1 & 2\alpha_2^2+\alpha_2 & 2\alpha_3^2+\alpha_3 & 2\alpha_4^2+\alpha_4 & 2\alpha_5^2+\alpha_5 \\ \alpha_1^3+2\alpha_1 & \alpha_2^3+2\alpha_2 & \alpha_3^3+2\alpha_3 & \alpha_4^3+2\alpha_4 & \alpha_5^3+2\alpha_5 \\ \alpha_1^3+\alpha_1^2+1 & \alpha_2^3+\alpha_2^2+1 & \alpha_3^3+\alpha_3^2+1 & \alpha_4^3+\alpha_4^2+1 & \alpha_5^3+\alpha_5^2+1 \\ \alpha_1^4+\alpha_1+1 & \alpha_2^4+\alpha_2+1 & \alpha_3^4+\alpha_3+1 & \alpha_4^4+\alpha_4+1 & \alpha_5^4+\alpha_5+1 \\ \alpha_1^5+2 & \alpha_2^5+2 & \alpha_3^5+2 & \alpha_4^5+2 & \alpha_5^5+2 \end{vmatrix}$$

Calculînd acest determinant, se arată că

$$\text{(70)} \quad \Delta_5 = -(5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 - 2\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\sum\alpha_1\alpha_2 - 7\sum\alpha_1 + 10)\, V_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5,)$$

unde $V_5\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ este determinantul Vandermonde al numerelor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$.

Din formula (70) deducem că dacă $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ sînt numere diferite între ele, astfel încît să avem

$$\text{(70')} \quad 5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 - 2\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 4\sum\alpha_1\alpha_2 - 7\sum\alpha_1 + 10 \neq o,$$

atunci este posibil să rezolvăm sistemul (69) în raport cu P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 şi soluţia găsită este unică. Prin urmare în acest caz avem o formulă de cubatură de forma

$$\text{(71)} \quad \iint_T \varphi_5(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{5} P_i\, [\varphi_5(L_i) + \varphi_5(M_i) + \varphi_5(N_i)]$$

valabilă pentru un polinom oarecare $\varphi_4(x,y)$ de gradul al cincilea, şi oricare ar fi triunghiul T.

Caz particular.

Să alegem $\alpha_5 = 1$. In acest caz determinantul (70) se reduce la

$$\Delta_5 = -3(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)(\alpha_4 - 1)\, V_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 1)$$

ceeace înseamnă că o formulă de cubatură de forma (71) este totdeauna posibilă dacă numerele α_1, α_2, α_3, α_4, 1 sînt diferite între ele.

Eliminînd pe P_5 între ecuaţiile (69) şi punînd

$$P_i \frac{(\alpha_i - 1)^2}{(\alpha_i + 2)^5} = Q_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4,)$$

obţinem următorul sistem de ecuaţii.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \frac{3S}{1260}$$

$$Q_1\alpha_1 + Q_2\alpha_2 + Q_3\alpha_3 + Q_4\alpha_4 = \frac{S}{1260}$$

$$Q_1\alpha_1^2 + Q_2\alpha_2^2 + Q_3\alpha_3^2 + Q_4\alpha_4^2 = \frac{5S}{1260}$$

$$Q_1\alpha_1^3 + Q_2\alpha_2^3 + Q_3\alpha_3^3 + Q_4\alpha_4^3 = \frac{39S}{1260}$$

care determină pe Q_1, Q_2, Q_3 şi Q_4,

In acest mod se obţin P_1, P_2, P_3, P_4.

$$\text{(72)} \quad \begin{aligned} P_1 &= \frac{S}{1260}\frac{(\alpha_1+2)^5}{(\alpha_1-1)^2}\frac{3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 5(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) - 39}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)} \\ P_2 &= \frac{S}{1260}\frac{(\alpha_2+2)^5}{(\alpha_2-1)^2}\frac{3\alpha_3\alpha_4\alpha_1 - (\alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3) + 5(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1) - 39}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_2)} \\ P_3 &= \frac{S}{1260}\frac{(\alpha_3+2)^5}{(\alpha_3-1)^2}\frac{3\alpha_4\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_4\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_4) + 5(\alpha_4+\alpha_1+\alpha_2) - 39}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_3)} \\ P_4 &= \frac{S}{1260}\frac{(\alpha_4+2)^5}{(\alpha_4-1)^2}\frac{3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) + 5(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - 39}{(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_4)} \end{aligned}$$

Ultima ecuaţie (69) în care facem $\alpha_5 = 1$, ne dă pe P_5,

$$\text{(73)} \quad P_5 = \frac{81S}{1260}\left\{2 - \sum_1^4 \frac{(2\alpha_1^2 + \alpha_1)[3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 5(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) - 39]}{(\alpha_1-1)^2(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)}\right\}$$

Formula (72) conduce astfel la următoarea formulă de cubatură.

$$\iint_T \varphi_5(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\frac{S}{1260}\left\{\sum_1^4 \frac{(\alpha_1+2)^5}{(\alpha_1-1)^2}\frac{3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 5(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) - 39}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)}[\varphi_5(L_1) + \varphi_5(M_1) + \varphi_5(N_1)]\right.$$
$$\left. + 243\left[2 - \sum_1^4 \frac{(2\alpha_1^2+\alpha_1)[3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - (\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) + 5(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) - 39]}{(\alpha_1-1)^2(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)}\right]\varphi_5(G)\right\}$$

unde nodurile L_i, M_i, N_i, corespund la numerele α_i unde $i = 1, 2, 3, 4,$

Să dăm un exemplu de formulă de tipul (73).

In formulele (72) să facem α_4 să tindă către $+\infty$, şi apoi $\alpha_3 = 0$,. Vom obţine

$$\text{(74)} \quad \begin{aligned} P_1 &= \frac{S}{1260}\frac{(\alpha_1+2)^5}{(\alpha_1-1)^2}\frac{\alpha_2 - 5}{\alpha_1(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ P_2 &= \frac{S}{1260}\frac{(\alpha_2+2)^5}{(\alpha_2-1)^2}\frac{\alpha_1 - 5}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \\ P_3 &= \frac{S}{1260}\, 32\, \frac{3\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1+\alpha_2) + 5}{\alpha_1\alpha_2} \\ P_4 &= \frac{S}{1260}[\alpha_1\alpha_2 - 5(\alpha_1+\alpha_2) + 39] \\ P_5 &= \frac{81S}{1260}\left[2 - \frac{(2\alpha_1+1)(\alpha_2-5)}{(\alpha_1-1)^2(\alpha_2-\alpha_1)} - \frac{(2\alpha_2+1)(\alpha_1-5)}{(\alpha_2-1)^2(\alpha_1-\alpha_2)}\right] \end{aligned}$$

Aceste formule arată că dacă luăm $\alpha_2 = 5$, obținem

$$P_1 = 0,\ P_2 = \frac{S}{14400}2401,\ P_3 = \frac{S}{14400}1024,\ P_4 = \frac{S}{14400}160,\ P_5 = \frac{S}{14400}1215$$

ceeace ne conduce la formula de cubatură

$$(75)\quad \iint_T \varphi_5(x,y)\,dxdy = \frac{S}{14.400}\{2401\,[\varphi_5(L)+\varphi_5(M)+\varphi_5(N)] + 1024\,[\varphi_5(A')+\varphi_5(B')+\varphi_5(C')] + 160[\varphi_5(A)+\varphi_5(B)+\varphi_5(C)] + 3645\varphi_5(G)\}$$

în care nodurile L, M, N, corespund la $\alpha_2 = 5$, iar A', B', C' sînt mijloacele laturilor triunghiului ABC.

Formula (75) este interesantă căci în membrul al doilea al ei figurează numai 10 noduri, în loc de 13 ca în formula generală (73).

17. — Examinînd formulele (74), deducem că vom avea o formulă de tipul (73) cu mai puține noduri, dacă alegem pe α_1 și α_2 astfel ca să avem $P_3 = 0$, $P_4 = 0$, adică

$$3\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1+\alpha_2) + 5 = 0$$
$$\alpha_1\alpha_2 - 5(\alpha_1+\alpha_2) + 39 = 0.$$

Aceste ecuații ne dau

$$\alpha_1+\alpha_2 = 8,\qquad \alpha_1\alpha_2 = 1.$$

adică

$$(76)\quad \alpha_1 = 4+\sqrt{15},\qquad \alpha_2 = 4-\sqrt{15}$$

Formulele (74) ne dau în acest caz

$$P_1 = \frac{S}{1200}(155-\sqrt{15})$$
$$P_2 = \frac{S}{1200}(155+\sqrt{15})$$
$$P_5 = \frac{S}{1200}90$$

ceeace conduce la formula de cubatură,

$$(77)\quad \iint_T \varphi_5(x,y)\,dxdy = \frac{S}{1200}\{(155-\sqrt{15})\,[\varphi_5(L_1)+\varphi_5(M_1)+\varphi_5(N_1)] + (155+\sqrt{15})\,[\varphi_5(L_2)+\varphi_5(M_2)+\varphi_5(N_2)] + 270\varphi_5(G)\}$$

unde nodurile L_1, M_1, N_1 corespund la $\alpha_1 = 4+\sqrt{15}$, iar L_2, M_2, N_2 corespund la $\alpha_2 = 4-\sqrt{15}$.

Formula (77) este interesantă pentrucă ea folosește numai 7 noduri. Ea prezintă însă un dezavantaj față de formula (75) pentrucă nodurile și coeficienții din formula (77) sînt iraționale pe cînd nodurile și coeficienții din formulele (75) sînt raționale.

§ 4. — Formule de tipul (3) cu un număr minim de noduri.

18. — In acest paragraf vom trata despre formule de cubatură de tipul (3), cu un număr minim de noduri, analoage cu formulele de cuadratură ale lui Gauss. Vom trata pe rînd cazurile $n = 2, 3, 4, 5$.

Cînd $n = 2$, formula

$$(\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 + (\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)^2 + (\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)^2$$
$$= (\alpha^2+2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) + (4\alpha+2)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)$$

pune în evidență două funcții de coordonatele λ_1, λ_2, λ_3 și anume $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$ și $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$.

Se pune atunci problema de a se determina P și α astfel ca să avem identitatea

$$\iint_T \varphi_2(x,y)\,dxdy = P\,[\varphi_2(L)+\varphi_2(M)+\varphi_2(N)]$$

valabilă pentru oricare polinom de gradul al doilea $\varphi_2(x,y)$ și orice triunghi ABC.

Scriind că avem

$$\iint_T x^2 dxdy = \frac{S}{(\alpha+2)^2}[(\alpha^2+2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) + (4\alpha+2)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)]$$
$$= \frac{S}{6}[(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)]$$

avem ecuațiile

$$P\frac{\alpha^2+2}{(\alpha+2)^2} = \frac{S}{6}$$
$$P\frac{2\alpha+1}{(\alpha+2)^2} = \frac{S}{12}$$

în care necunoscutele sînt α și P.

Eliminînd pe P se găsește ecuația

$$\alpha^2 - 4\alpha = 0$$

ale cărei rădăcini sînt

$$\alpha = 0 \quad \text{și} \quad \alpha' = 4$$

La prima rădăcină, corespunde

$$P = \frac{S}{3}$$

iar la a doua, corespunde

$$P' = \frac{S}{3}$$

Obținem astfel formulele de cubatură.

$$\iint\limits_T \varphi_2(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{3}\,[\varphi_2(A')+\varphi_2(B')+\varphi_2(C')] \tag{39}$$

unde A', B', C' sînt mijloacele laturilor triunghiului ABC și

$$\iint\limits_T \varphi_2(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{3}\,[\varphi_2(L)+\varphi_2(M)+\varphi_2(N)] \tag{40}$$

unde L, M, N sînt mijloacele lui GA, GB, GC.

Obținem astfel formulele (39), (40) care au mai fost deja întîlnite la Nr. 12.

19. — Să trecem la cazul $n = 3$. Formula

$$\begin{aligned}&(\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3+(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)^3+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)^3\\ &=(\alpha^3+2)(\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3)+3(\alpha^2+\alpha+1)[\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^2(\lambda_1+\lambda_2)]\\ &\quad+18\,\alpha\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}$$

pune în evidență trei funcții de λ_1, λ_2, λ_3 și anume

$$\sum\lambda_1^3\,,\qquad \sum\lambda_1^2\lambda_2\qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Se poate pune atunci problema de a se determina numerele P, α și P' astfel ca să avem identitatea

$$\iint\limits_T \varphi_3(x,y)\,dx\,dy = P\,[\varphi_3(L)+\varphi_3(M)+\varphi_3(N)]+P'\varphi_3(G)\,,$$

valabilă oricare ar fi polinomul $\varphi_3(x,y)$ de gradul al treilea și oricare ar fi triunghiul T.

In acest caz avem

$$\begin{aligned}\iint\limits_T x^3\,dx\,dy &= \frac{P}{(\alpha+2)^3}\left\{(\alpha^3+2)\sum\lambda_1^3+3(\alpha^2+\alpha+1)\sum\lambda_1^2\lambda_2+18\,\alpha\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right\}\\ &+\frac{P'}{12}\left\{\sum\lambda_1^3+3\sum\lambda_1^2\lambda_2+6\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right\}\\ &=\frac{S}{10}\left\{\sum\lambda_1^3+\sum\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right\}\end{aligned}$$

ceeace conduce la ecuațiile

$$P\,\frac{\alpha^3+2}{(\alpha+2)^3}+\frac{P'}{27}=\frac{S}{10}$$

$$P\,\frac{\alpha^2+\alpha+1}{(\alpha+2)^3}+\frac{P'}{27}=\frac{S}{30}$$

$$P\,\frac{\alpha}{(\alpha+2)^3}+\frac{P'}{81}=\frac{S}{180}$$

Eliminînd pe P' între aceste ecuații avem ecuațiile

$$P\,\frac{(\alpha-1)^2(\alpha+1)}{(\alpha+2)^3}=\frac{S}{15}$$

$$P\,\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)^3}=\frac{S}{60}$$

care determină pe P și pe α. Se găsește

$$\alpha=3\,,\qquad P=\frac{25S}{48}\,,\qquad P'=-\frac{27}{48}$$

și sîntem astfel conduși la formula de cubatură

$$\iint\limits_T \varphi_3(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{48}\,\{25\,[\varphi_3(L)+\varphi_3(M)+\varphi_3(N)]-27\,\varphi(G)\} \tag{49}$$

unde L, M, N sînt nodurile care corespund la $\alpha = 3$. Această formulă coincide cu formula (49) de la Nr. 13.

20. — *Cazul* $n = 4$.

Formula

$$\begin{aligned}&(\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^4+(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)^4+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)^4\\ &=(\alpha^4+2)(\lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4)+4(\alpha^3+\alpha+1)[\lambda_1^3(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^3(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^3(\lambda_1+\lambda_2)]\\ &\quad+6(2\alpha^2+1)(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_3^2\lambda_1^2)+12(\alpha^2+2\alpha)\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\end{aligned}$$

pune în evidență patru funcții de λ_1, λ_2, λ_3, și anume

$$\sum\lambda_1^4\,,\qquad \sum\lambda_1^3\lambda_2\,,\qquad \sum\lambda_1^2\lambda_2^2\,,\qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\sum\lambda_1\,.$$

Se pune atunci problema de a se determina numerele P_1, P_2, α_1, α_2 astfel ca să avem identitatea

$$\begin{aligned}\iint\limits_T \varphi_4(x,y)\,dx\,dy &= P_4\,[\varphi_4(L_1)+\varphi_4(M_1)+\varphi_4(N_1)]\\ &+P_2[\varphi_4(L_2)+\varphi_4(M_2)+\varphi_4(N_2)]\end{aligned}$$

valabilă pentru un polinom oarecare de gradul al patrulea și oricare ar fi triunghiul ABC.

Identitatea

$$\begin{aligned}\iint\limits_T x^4\,dx\,dy &= \left[P_1\frac{\alpha_1^4+2}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{\alpha_2^4+2}{(\alpha_2+2)^4}\right]\sum\lambda_1^4+4\left[P_1\frac{\alpha_1^3+\alpha_1+1}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{\alpha_2^3+\alpha_2+1}{(\alpha_2+2)^4}\right]\sum\lambda_1^3\lambda\\ &+6\left[P_1\frac{2\alpha_1^2+1}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{2\alpha_2^2+1}{(\alpha_2+2)^4}\right]\sum\lambda_1^2\lambda_2^2+12\left[P_1\frac{\alpha_1^2+2\alpha_1}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{\alpha_2^2+2\alpha_2}{(\alpha_2+2)^4}\right]\lambda_1\lambda_2\lambda_3\sum\lambda_1\\ &=\frac{S}{15}\left\{\sum\lambda_1^4+\sum\lambda_1^3\lambda_2+\sum\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\sum\lambda_1\right\}\end{aligned}$$

ne conduce la următoarele ecuații

$$
(78)\qquad
\begin{aligned}
&P_1\frac{\alpha_1^4+2}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{\alpha_2^4+2}{(\alpha_2+2)^4}=\frac{S}{15}\\
&P_1\frac{\alpha_1^3+\alpha_1+1}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{\alpha_2^3+\alpha_2+1}{(\alpha_2+2)^4}=\frac{S}{60}\\
&P_1\frac{2\alpha_1^2+1}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{2\alpha_2^2+1}{(\alpha_2+2)^4}=\frac{S}{90}\\
&P_1\frac{\alpha_1^2+2\alpha_1}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{\alpha_2^2+2\alpha_2}{(\alpha_2+2)^4}=\frac{S}{180}
\end{aligned}
$$

care determină pe P_1, P_2, α_1 și α_2.

Pentru a rezolva sistemul (78) în raport cu P_1, P_2, α_1 și α_2 să observăm întîi că dacă scădem penultima ecuație (78) din ultima ecuație (78) înmulțită cu doi, se obține

$$P_1\frac{4\alpha_1-1}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{4\alpha_2-1}{(\alpha_2+2)^4}=0$$

adică

$$(79)\qquad P_1\frac{\alpha_1}{(\alpha_1+2)^4}+P_2\frac{\alpha_2}{(\alpha_2+2)^4}=\frac{P_1}{(\alpha_1+2)^4}+\frac{P_2}{(\alpha_2+2)^4}$$

Să introducem noi necunoscute Q_1, Q_2 și u legate de P_1, P_2, α_1, α_2, prin relațiile

$$(80)\qquad Q_1=\frac{P_1}{(\alpha_1+2)^4},\quad Q_2=\frac{P_2}{(\alpha_2+2)^4},\quad \frac{P_1}{(\alpha_1+2)^4}+\frac{P_2}{(\alpha_2+2)^4}=4u$$

Ecuațiile (78), (79) și (80) permit să scriem următorul sistem de 5 ecuații.

$$
(81)\qquad
\begin{aligned}
&Q_1+Q_2=4u\\
&Q_1\alpha_1+Q_2\alpha_2=u\\
&Q_1\alpha_1^2+Q_2\alpha_2^2=\frac{S}{180}-2u\\
&Q_1\alpha_1^3+Q_2\alpha_2^3=\frac{S}{60}-5u\\
&Q_1\alpha_1^4+Q_2\alpha_2^4=\frac{S}{15}-8u\,,
\end{aligned}
$$

care determină pe Q_1, Q_2, α_1, α_2, și u.

Să notăm $k=\frac{S}{180}$ și să eliminăm între ecuațiile (81) pe Q_1 și Q_2. Vom obține ecuațiile.

$$
\begin{vmatrix}1&1&4u\\ \alpha_1&\alpha_2&u\\ \alpha_1^2&\alpha_2^2&k-2u\end{vmatrix}=0,\quad
\begin{vmatrix}1&1&u\\ \alpha_1&\alpha_2&k-2u\\ \alpha_1^2&\alpha_2^2&3k-5u\end{vmatrix}=0,\quad
\begin{vmatrix}1&1&k-2u\\ \alpha_1&\alpha_2&3k-5u\\ \alpha_1^2&\alpha_2^2&12k-8u\end{vmatrix}=0
$$

care se mai scriu

$$
(82)\qquad
\begin{aligned}
&k-2u-u(\alpha_1+\alpha_2)+4u\,\alpha_1\alpha_2=0\\
&3k-5u-(k-2u)(\alpha_1+\alpha_2)+u\,\alpha_1\alpha_2=0\\
&12k-8u-(3k-5u)(\alpha_1+\alpha_2)+(k-2u)\alpha_1\alpha_2=0\,.
\end{aligned}
$$

Eliminînd pe $\alpha_1+\alpha_2$ și $\alpha_1\alpha_2$ între aceste ecuații obținem ecuația în u

$$
\begin{vmatrix}k-2u&u&4u\\ 3k-5u&k-2u&u\\ 12k-8u&3k-5u&k-2u\end{vmatrix}=0
$$

care se mai scrie

$$54u^2-24ku+k^2=0$$

și ale cărei rădăcini sînt

$$(83)\qquad u_1=\frac{4+\sqrt{10}}{18}\cdot\frac{S}{180},\qquad u=\frac{4-\sqrt{10}}{18}\cdot\frac{S}{180}$$

Inlocuind în primele două ecuații (82) pe u cu u_1 și apoi cu u_2, vom obține

$$
\begin{aligned}
&2(5-\sqrt{10})-(4+\sqrt{10})(\alpha_1+\alpha_2)+4(4+\sqrt{10})\alpha_1\alpha_2=0\\
&(34-5\sqrt{10})-2(5-\sqrt{10})(\alpha_1+\alpha_2)+(4+\sqrt{10})\alpha_1\alpha_2=0
\end{aligned}
$$

și

$$
\begin{aligned}
&2(5+\sqrt{10})-(4-\sqrt{10})(\alpha_1+\alpha_2)+4(4-\sqrt{10})\alpha_1\alpha_2=0\\
&(34+5\sqrt{10})-2(5+\sqrt{10})(\alpha_1+\alpha_2)+(4-\sqrt{10})\alpha_1\alpha_2=0
\end{aligned}
$$

care rezolvate în raport cu $\alpha_1+\alpha_2$ și $\alpha_1\alpha_2$ ne dau

$$
(84)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_1+\alpha_2=6+\sqrt{10}\\
&\alpha_1\alpha_2=\sqrt{10}-1
\end{aligned}
\quad\text{și}\quad
\begin{aligned}
&\alpha_1+\alpha_2=6-\sqrt{10}\\
&\alpha_1\alpha_2=-(1+\sqrt{10})
\end{aligned}
$$

Rezolvind aceste sisteme în raport cu α_1 și α_2 deducem

$$
(85)\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_1=\frac{6+\sqrt{10}+\sqrt{50+8\sqrt{10}}}{2}\\
&\alpha_2=\frac{6+\sqrt{10}-\sqrt{50+8\sqrt{10}}}{2}
\end{aligned}
$$

și

$$
(85')\qquad
\begin{aligned}
&\alpha_1'=\frac{6-\sqrt{10}+\sqrt{50-8\sqrt{10}}}{2}\\
&\alpha_2'=\frac{6-\sqrt{10}-\sqrt{50-8\sqrt{10}}}{2}
\end{aligned}
$$

Valorile lui P_1 şi P_2 corespunzătoare lui α_1 şi α_2 se calculează din formulele (80) şi (81). Avem

$$Q_1 = u\,\frac{4\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1}\,, \qquad Q_2 = u\,\frac{1 - 4\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

adică

$$Q_1 = \frac{S}{18\,.\,180}\;\frac{4+\sqrt{10}}{\sqrt{50+8\sqrt{10}}}\,(1-4\alpha_2)$$

$$Q_2 = \frac{S}{18\,.\,180}\;\frac{4+\sqrt{10}}{\sqrt{50+8\sqrt{10}}}\,(4\alpha_1-1)$$

şi deci

$$P_1 = \frac{S}{18\,.\,180}\;\frac{4+\sqrt{10}}{\sqrt{50+8\sqrt{10}}}\,(1-4\alpha_2)\,(\alpha_1+2)^4$$

$$P_2 = \frac{S}{18\,.\,180}\;\frac{4+\sqrt{10}}{\sqrt{50+8\sqrt{10}}}\,(4\alpha_1-1)\,(\alpha_2+2)^4$$

Ţinind seama de formulele (84) se arată că

$$P_1 + P_2 = \frac{S}{3}$$

şi

$$P_1\,P_2 = \frac{S^2}{192}\cdot\frac{1105+344\sqrt{10}}{465}$$

de unde rezultă că

$$P_1 = \frac{S}{6}\left(1-\sqrt{\frac{1375-344\sqrt{10}}{2480}}\right)$$

$$P_2 = \frac{S}{6}\left(1+\sqrt{\frac{1375-344\sqrt{10}}{2480}}\right)$$

şi la fel se arată că valorile lui P'_1, P'_2 care corespund la α'_1 şi α'_2 sînt

$$P'_1 = \frac{S}{6}\left(1+\sqrt{\frac{1375+344\sqrt{10}}{2480}}\right)$$

$$P'_2 = \frac{S}{6}\left(1-\sqrt{\frac{1375+344\sqrt{10}}{2480}}\right)$$

Se obţin astfel formulele de cubatură

$$(66)\quad \iint_T \varphi_4(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{6}\left\{\left(1-\sqrt{\frac{1375-344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L_1)+\varphi_4(M_1)+\varphi_4(N_1)] + \left(1+\sqrt{\frac{1375-344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L_2)+\varphi_4(M_2)+\varphi_4(N_2)]\right\}$$

$$(66')\quad \iint_T \varphi_4(x,y)\,dx\,dy = \frac{S}{6}\left\{\left(1+\sqrt{\frac{1375+344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L'_1)+\varphi_4(M'_1)+\varphi_4(N'_1)] + \left(1-\sqrt{\frac{1375+344\sqrt{10}}{2480}}\right)[\varphi_4(L'_2)+\varphi_4(M'_2)+\varphi_4(N'_2)]\right\}$$

verificate de un polinom oarecare de gradul al patrulea şi oricare ar fi triunghiul ABC, cu un număr minim de noduri. In formula (66) nodurile L_1, M_1, N_1 şi L_2, M_2, N_2 corespund la valorile α_1 şi α_2 date de formulele (85). La fel în formula (66′) nodurile L'_1, M'_1, N'_1, şi L'_2, M'_2, N'_2 corespund la valorile α'_1 şi α'_2 date de formulele (85′).

Regăsim pe această cale formulele de cubatură studiate la Nr. 15.

21. — Cazul $n = 5$.

Formula

$$(\alpha\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^5+(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\lambda_3)^5+(\lambda_1+\lambda_2+\alpha\lambda_3)^5$$
$$=(\alpha^5+2)(\lambda_1^5+\lambda_2^5+\lambda_3^5)+5(\alpha^4+\alpha+1)[\lambda_1^4(\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2^4(\lambda_3+\lambda_1)+\lambda_3^4(\lambda_1+\lambda_2)]$$
$$+10(\alpha^3+\alpha^2+1)[\lambda_1^3(\lambda_2^2+\lambda_3^2)+\lambda_2^3(\lambda_3^2+\lambda_1^2)+\lambda_3^3(\lambda_1^2+\lambda_2^2)]$$
$$+20(\alpha^3+2\alpha)\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)$$
$$+30(2\alpha^2+\alpha)\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)$$

pune în evidenţă *cinci* funcţii de λ_1, λ_2, λ_3 şi anume

$$\sum\lambda_1^5,\quad \sum\lambda_1^4\lambda_2,\quad \sum\lambda_1^3\lambda_2^2,\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\sum\lambda_1^2,\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\sum\lambda_1\lambda_2$$

Se pune atunci problema de a se determina numerele P_1, α_1, P_2, α_2, P' astfel ca să avem o formulă de cubatură de tipul

$$\iint_T \varphi_5(x,y)\,dx\,dy = P_1[\varphi_5(L_1)+\varphi_5(M_1)+\varphi_5(N_1)] + P_2[\varphi_5(L_2)+\varphi_5(M_2)+\varphi_5(N_2)] + P'\varphi_5(G)$$

valabilă pentru orice polinom $\varphi_5(x,y)$ de gradul al cincilea şi oricare ar fi triunghiul ABC.

Identitatea

$$\iint\limits_T x^5 dxdy = \left(P_1 \frac{\alpha_1^5+2}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{\alpha_2^5+2}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5}\right) \sum \lambda_1^5$$
$$+5\left(P_1 \frac{\alpha_1^4+\alpha_1+1}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{\alpha_2^4+\alpha_2+1}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5}\right) \sum \lambda_1^4 \lambda_2$$
$$+10\left(P_1 \frac{\alpha_1^3+\alpha_1^2+1}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{\alpha_2^3+\alpha_2^2+1}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5}\right) \sum \lambda_1^3 \lambda_2^2$$
$$+20\left(P_1 \frac{\alpha_1^3+2\alpha_1}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{\alpha_2^3+2\alpha_2}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5}\right) \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \sum \lambda_1^2$$
$$+30\left(P_1 \frac{2\alpha_1^2+\alpha_1}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{2\alpha_2^2+\alpha_2}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5}\right) \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \sum \lambda_1\lambda_2$$
$$= \frac{S}{21}\left\{\sum \lambda_1^5 + \sum \lambda_1^4\lambda_2 + \sum \lambda_1^3\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \sum \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \sum \lambda_1\lambda_2\right\}$$

ne conduce la ecuațiile

$$(86)\qquad \begin{aligned}
&P_1 \frac{\alpha_1^5+2}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{\alpha_2^5+2}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5} = \frac{S}{21}\\
&P_1 \frac{\alpha_1^4+\alpha_1+1}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{\alpha_2^4+\alpha_2+1}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5} = \frac{S}{105}\\
&P_1 \frac{\alpha_1^3+\alpha_1^2+1}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{\alpha_2^3+\alpha_2^2+1}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5} = \frac{S}{210}\\
&P_1 \frac{\alpha_1^3+2\alpha_1}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{\alpha_2^3+2\alpha_2}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5} = \frac{S}{420}\\
&P_1 \frac{2\alpha_1^2+\alpha_1}{(\alpha_1+2)^5} + P_2 \frac{2\alpha_2^2+\alpha_2}{(\alpha_2+2)^5} + \frac{P'}{3^5} = \frac{S}{630}
\end{aligned}$$

Eliminînd pe P' între aceste ecuații și punînd

$$Q_1 = P_1 \frac{(\alpha_1-1)^2}{(\alpha_1+2)^5}, \qquad Q_2 = P_2 \frac{(\alpha_2-1)^2}{(\alpha_2+1)^5}$$

se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned}
&Q_1(\alpha_1^3+\alpha_1^2+\alpha_1+1) + Q_2(\alpha_2^3+\alpha_2^2+\alpha_2+1) = \frac{4S}{105}\\
&Q_1(\alpha_1^2+\alpha_1) + Q_2(\alpha_2^2+\alpha_2) = \frac{S}{210}\\
&Q_1 + Q_2 = \frac{S}{420}\\
&Q_1\alpha_1 + Q_2\alpha_2 = \frac{S}{1260}
\end{aligned}$$

care se mai scriu

$$Q_1 + Q_2 = \frac{S}{420} \qquad Q_1\alpha_1^2 + Q_2\alpha_2^2 = \frac{S}{252}$$
$$Q_1\alpha_1 + Q_2\alpha_2 = \frac{S}{1260} \qquad Q_1\alpha_1^3 + Q_2\alpha_2^3 = \frac{13S}{420}$$

Eliminînd pe Q_1 și Q_2 între aceste ecuații se obțin ecuațiile

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 5 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & 39 \end{vmatrix} = 0$$

care se mai scriu

$$3\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1+\alpha_2) + 5 = 0$$
$$\alpha_1\alpha_2 5 - (\alpha_1+\alpha_2) + 39 = 0$$

și care ne dau

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 8$$
$$\alpha_1\alpha_2 = 1.$$

adică

$$\alpha_1 = 4 + \sqrt{15}$$
$$\alpha_2 = 4 - \sqrt{15}$$

Valorile corespunzătoare ale lui Q_1 și Q_2 sînt

$$Q_1 = \frac{S}{2520}\,\frac{45-11\sqrt{15}}{15}$$
$$Q_2 = \frac{S}{2520}\,\frac{45+11\sqrt{15}}{15}$$

de unde rezultă că avem

$$(87)\qquad \begin{aligned}
P_1 &= \frac{S}{2520}\cdot\frac{45-11\sqrt{15}}{15}\,\frac{(\alpha_1+2)^5}{(\alpha_1-1)^2} = \frac{S}{1200}(155-\sqrt{15})\\
P_2 &= \frac{S}{2520}\cdot\frac{45+11\sqrt{15}}{15}\,\frac{(\alpha_2+2)^5}{(\alpha_2-1)^5} = \frac{S}{1200}(155+\sqrt{15})
\end{aligned}$$

Valoarea lui P' o deducem din ultima ecuație (86) adică

$$P' = 3^5\left(\frac{S}{630} - P_1 \frac{2\alpha_1^2+\alpha_1}{(\alpha_1+2)^5} - P_2 \frac{2\alpha_2^2+\alpha_2}{(\alpha_2+2)^5}\right) = \frac{S}{1200}\cdot 270.$$

Sîntem conduși astfel la formula de cubatură cu un număr minim de noduri.

$$(77)\qquad \iint\limits_T \varphi_5(x,y)\,dxdy = \frac{S}{1200}\{(155-\sqrt{15})[\varphi_5(L_1)+\varphi_5(M_1)+\varphi_5(N_1)] + (155+\sqrt{15})(\varphi_5(L_2)+\varphi_5(M_2)+\varphi_5(N_2)] + 270\,\varphi_5(G)\}$$

care este verificată de un polinom oarecare de gradul al cincelea și pe care am mai întîlnit-o la Nr. 17.

§ 5. — Formule de cubatură cu rest.

22. — Să înlocuim în formula de cubatură (3) în care presupunem $n = 5$, polinomul $\varphi\ (x, y)$ cu o funcție $f\ (x, y)$. Vom obține formula de cubatură

$$\iint_T f(x, y)\, dxdy = \sum_{i=1}^{5} P_i [f(L_i) + f(M_i) + f(N_i)] + R \tag{88}$$

în care R este *restul*.

Pentru a evalua restul R ne vom plasa în ipotezele următoare.

1°. — Triunghiul ABC este plasat în unghiul xoy, adică coordonatele vîrfurilor lui sînt pozitive sau nule.

2°. — Funcția $f(x, y)$ face parte din clasa funcțiilor care au derivate parțiale în raport cu x și y pînă la ordinul al șaselea, acestea din urmă fiind mărginite în domeniul Δ pe care îl descrie un triunghi $A'B'C'$ omotetic cu triunghiul ABC, centrul de omotetie fiind în O, iar raportul de omotetie θ, variind de la O la 1.

Vom nota

$$\sup_{(x, y) \in \Delta} \left| \frac{\partial^6 f}{\partial x^{6-i}\, \partial y^i} \right| = K_i \qquad (i = , 1, \ldots, 6) \tag{89}$$

In formula lui Taylor

$$f(u+h, v+k) = f(u, v) + \frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial f}{\partial u} + k\frac{\partial f}{\partial v}\right)^{(1)} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial f}{\partial u} + k\frac{\partial f}{\partial v}\right)^{(2)} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{5!}\left(h\frac{\partial f}{\partial u} + k\frac{\partial f}{\partial v}\right)^{(5)} + \int_0^1 \frac{(1-\tau)^5}{5!}\left(h\frac{\partial f}{\partial u} + k\frac{\partial f}{\partial v}\right)^{(6)}_{\substack{u+h\tau \\ v+k\tau}} d\tau$$

să facem $u = o$, $v = o$, $h = x$ și $k = y$. Vom obține formula

$$f\ (x, y = \varphi\ (x, y) + \psi\ (x, y) \tag{90}$$

unde $\varphi(x, y)$ *este un polinom de gradul al cincilea*

$$\varphi(x, y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial f}{\partial u} + \quad \frac{\partial f}{\partial v}\right)^{(1)}_{\substack{u=0 \\ v=0}} + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}\right)^{(2)}_{\substack{u=0 \\ v=0}}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{5!}\left(x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}\right)^{(5)}_{\substack{u=0 \\ v=0}}$$

și

$$\psi(x, y) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^5}{5!}\left(x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}\right)^{(6)}_{\substack{u=x\tau \\ v=y\tau}} d\tau$$

Datorită ipotezelor făcute asupra funcției $f\ (x, y)$, avem

$$|\psi(x, y)| \leqslant (K_0 x^6 + C_6^1 K_1 x^5 y + \cdots + C_6^6 K_6 y^6) \int_0^1 \frac{(1-\tau)^5}{5!}\, d\tau$$

sau

$$|\psi(x, y)| \leqslant \frac{1}{6!}(K_0 x^6 + C_6^1 K_1 x^5 y + \cdots + C_6^6 K_6 y^6) \tag{91}$$

Inlocuind în formula (88) pe $f\ (x, y)$ cu formula (90) deducem că

$$R = \iint_T \psi(x, y)\, dxdy - \sum_{i=1}^{5} P_i [\psi(L_i) + \psi(M_i) + \psi(N_i)]$$

Luînd valoarea absolută și ținînd seama de inegalitatea (91) vom avea;

$$|R| \leqslant \frac{1}{6!}\iint_T (K_0 x^6 + C_6^1 K_1 x^5 y + \cdots + C_6^6 K_6 y^6)\, dxdy$$

$$+ \frac{1}{6!}\sum_{i=1}^{5} |P_i|\ \{K_0 x_{L_i}^6 + C_6^1 K_1 x_{L_i}^5 y_{L_i} + \cdots + C_6^6 K_6 y_{L_i}^6$$

$$+ K_0 x_{M_i}^6 + C_6^1 K_1 x_{M_i}^5 y_{M_i} + \cdots + C_6^6 K_6 y_{M_i}^6$$

$$+ K_0 x_{N_i}^6 + C_6^1 K_1 x_{N_i}^5 y_{N_i} + \cdots + C_6^6 K_6 y_{N_i}^6\}$$

Integralele de tipul

$$I_{n.p} = \iint_T x^n y^p\, dxdy\ .$$

care figurează în inegalitatea precedentă, au fost deja calculate în § 1 și sînt date de formulele (11).

Putem da astfel o evaluare a valorii absolute a restului R, cu ajutorul formulei

$$|R| \leqslant \frac{1}{6!}\sum_{l=0}^{6} C_6^l K_l J_l \tag{92}$$

unde

$$J_l = I_{6-l,\, l} + \sum_{i=1}^{l} |P_i|\ \{x_{L_i}^{6-l} y_{L_i}^l + x_{M_i}^{6-l} y_{M_i}^l + x_{N_i}^{6-l} y_{N_i}^l\}\ . \tag{93}$$

23. — Formulele de cubatură de tipul (3) pot să servească la calculul integralelor duble

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy, \tag{94}$$

unde D este un poligon oarecare, deoarece poligonul D se poate descompune în triunghiuri T, la care se poate aplica formulele de cubatură (88).

Formulele de cubatură de tipul (3), pot să servească și la calculul integralelor duble.

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\, dxdy \tag{95}$$

unde domeniul $\triangle$, mărginit de un contur C este oarecare. Fie D_1 un domeniu poligonal cuprins în domeniul $\triangle$ şi D_2 un domeniu poligonal care cuprinde domeniul $\triangle$. Dacă $f(x, y) > o$ în domeniul D_2, avem

$$\iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy < \iint_{\Delta} f(x, y)\, dxdy < \iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy$$

şi prin urmare folosind formulele de cubatură (88) putem calcula integralele duble relative la domeniile D_1 şi D_2, ceea ce dă aproximaţii prin lipsă şi prin adaus ale integralei duble (95).

24. — Formulele de cubatură de tipul (2) în care alegem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ numere raţionale, pot fi foarte utile în calcule practice, deoarece coordonatele nodurilor L_i, M_i, N_i sînt funcţii raţionale de coordonatele vîrfurilor triunghiului ABC şi deoarece coeficienţii P_i sînt numere raţionale.

Formulele de cubatură de tipul (3) fiind exacte pentru polinoame oarecari de gradul cel mult al cincilea, pot fi aplicate în practică, neglijînd restul R, la funcţii $f(x, y)$ care în triunghiul T, luat destul de mic, pot să difere cu puţin de un polinom $\varphi_5(x, y)$ de gradul al cincilea. Astfel, dacă în formula de cubatură (88), înlocuim pe $f(x, y)$ cu

$$f(x, y) = \varphi_5(x, y) + \psi(x, y)$$

unde în triunghiul T avem

$$|\psi(x, y)| < \varepsilon$$

şi nodurile sînt toate în triunghiul T, va rezulta că

$$|R| < \varepsilon\left(S + 3\sum_{i=1}^{5} |P_i|\right)$$

Se poate întîmpla ca membrul al doilea să fie foarte mic, ceea ce permite să se neglijeze restul R în formula (88).

(Lucrare depusă la data de 15 februarie 1954).

Secţia de matematică
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. IONESCU. Formule de cubatură în care domeniul de integrare este un triunghi oarecare.
Comunicare făcută la Academia R.P.R. în sesiunea din 3 iulie 1953.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Формулы кубатуры, в которых сфера интеграции является каким либо треугольником

Д. В. ИОНЕСКУ

На основании формулы (1), дающей момент инертности однородного диска в форме треугольника ABC, в соотношении с прямой Δ, получается формула кубатуры (2), проверенная каким-либо многочленом $\varphi(x, y)$ второй степени, каков бы ни был треугольник ABC.

В этой работе обобщается формула кубатуры (2) следующим способом: отмечается L_i, M_i, N_i барицентры масс $(\alpha_i, 1, 1)$ $(1, \alpha_i, 1)$, $(1, 1, \alpha_i)$, расположенные не верхушках ABC, где являются данными числами $i = 1, 2 \ldots$ и определяются константами $P_1 P_2, \ldots P_n$, для того чтобы осуществить формулы кубатуры типа (3), годные для любых многочленов $\varphi(x, y)$ степени n, каким бы ни был треугольник ABC.

В § 1 устанавливается основная формула (4'), где S является поверхностью треугольника ABC, а (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), (λ_3, μ_3) координатами верхушек треугольника ABC. При помощи формулы (4') вычисляется интеграл (7) и получаются формулы (11).

В § 2 демонстрируется невыполнимость формул кубатуры типа (3) для $n > 5$.

В § 3 рассматриваются случаи $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Для $n = 2$ демонстрируется существование формул (37), если числа α_1 и α_2 удовлетворяют условию (36). Когда $\alpha\,2 = 1$ имеем формулу (38'). Отмечаются особые случаи, данные формулами (1), (39) и (40).

Для $n = 3$ демонстрируется существование формул кубатуры (45), если числа α_1' α_2, α_3 удовлетворяют условию (44''). В случае, когда $\alpha_3 = 1$, получаются формулы кубатуры (47) какими бы ни были α_1 и α_2. Как примеры приводятся формула (48) и формула (49) только с 4 узлами.

Для $n = 4$ демонстрируется существование формул кубатуры (55) если числа α_1' α_2' α_3, α_4 удовлетворяют условию (54'). В случае когда $\alpha_4 = 1$ получаются формулы кубатуры (57) какими бы ни были α_1' α_2' α_3. В качестве примера дается формула кубатуры (58) с 7 узлами и формулы (66) и (66) только с 6 узлами.

Для $n = 5$ демонстрируется существование формул кубатуры (71) если ч сла α_1' α_2' α_3' α_4' α_5 удовлетворяют условию (70'). Когда $\alpha_5 = 1$ получаем формулу кубатуры (73), какими бы ни были числа α_1' α_2' α_3' α_4. В качестве примера дается формула (75) с 10 узлами и с рациональными коэффициентами, а также формула (77) только с 7 узлами.

В § 4 изучаются формулы типа (3) с минимальным числом узлов. Исследуются по очереди случаи $n = 2, 3, 4, 5$ и получаются формулы (39), (40) для $n = 2$, (49) для $n = 3$ (66) и (66') для $n = 4$ и (77) для $n = 5$.

В § 5 изучаются формулы кубатуры типа (88) с остатком, дается значение остатка R формулой (92) и указывается практическое значение формул кубатуры типа (3).

RÉSUMÉ

Formules de cubature, le domaine d'intégration étant un triangle quelconque.

par

D. V. IONESCU

En partant de la formule (1) qui donne le moment d'inertie d'un disque homogène, ayant la forme d'un triangle ABC, par rapport à une droite Δ, on arrive à la formule de cubature (2) vérifiée par un polynôme quelconque $\varphi(x, y)$ du second degré, quel que soit le triangle ABC.

Dans ce travail on généralise la formule de cubature (2) de la façon suivante; on désigne par L_i, N_i, M_i les barycentres des masses $(\alpha_i, 1, 1)$, $(1, \alpha_i, 1)$, $(1, 1, \alpha_i)$, placées aux sommets A,B,C, où les α_i sont des nombres donnés, $i = 1,2,\ldots, n$ et l'on cherche à déterminer les constantes $P_1, P_2, \ldots P_n$ de manière, qu'il existe des formules de cubature du type (3) valables pour des polynômes quelconque de degré n et quel que soit le triangle ABC.

Dans le § 1 on établit la formule fondamentale (4') où S est l'aire du triangle ABC et $(\lambda_1, \mu_1)(\lambda_2, \mu_2)(\lambda_3, \mu_3)$ sont les coordonées des sommets A,B,C. A l'aide de la formule (4') ou calcule les intégrales (7) en donnant les formules (11).

Dans le § 2 on démontre l'impossibilité des formules de cubature du type (3), pour $n > 5$.

Dans le § 3 on étudie les cas $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Pour $n = 2$, on démontre l'existence des formules (37) si les nombres α_1 et α_2 vérifient la condition (36). Lorsque $\alpha_2 = 1$, nous avons la formule (38'). On signale les cas particuliers donnés par les formules (1), (39), (40).

Pour $n = 3$, on démontre l'existence des formules de cubature (45) si les nombres α_1, α_2, α_3, vérifient la condition (44"). Lorsque $\alpha_3 = 3$, on a les formules de cubature (47) quels que soient α_1 et α_2. Comme exemple on donne la formule (49) avec 4 noeuds seulement.

Pour $n = 4$, on démontre l'existence des formules de cubature (55) si les nombres α_1, α_2, α_3, α_4, vérifient la condition (54'). Lorsque $\alpha_4 = 1$, on obtient les formules de cubature (57) quels que soient α_1, α_2, α_3. Comme exemples on donne la formule (58) avec 7 noeuds et les formules (66) et (66') avec 6 noeuds.

Pour $n = 5$, on démontre l'éxistence des formules de cubature (71) si les nombres α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 vérifient la condition (70'). Lorsque $\alpha_5 = 1$, on obtient la formule de cubature (73) quels que soient α_1, α_2, α_3, α_4. Comme exemples on donne la formule (75) avec 10 noeuds et la formule (77) avec 7 noeuds.

Dans le § 4, on étudie des formules du type (3) avec un nombre minimum de noeuds. On étudie les cas $n = 2, 3, 4, 5$ et l'on trouve les formules (1), (39), (40) pour $n = 2$, (49) pour $n = 3$, (66) et (66') pour $n = 4$ et (77) pour $n = 5$.

Dans le § 5, on étudie les formules de cubature du type (88) avec *reste*. On a une évaluation du reste par les formules (92) et on montre l'importance pratique des formules de cubature du type (3).