ASUPRA UNEI GRUPĂRI DE VARIABILE IN VEDEREA CONSTRUIRII NOMOGRAMELOR COMPUSE

DE

LASCU BAL și IOAN RUSU

Comunicare prezentată în ședința de comunicări din 7 iunie 1954 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

Pentru ecuația

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = 0 \tag{1}$$

se poate construi o nomogramă compusă din nomograme elementare succesive, care au cîte o scară comună, dacă pentru ecuația (1) se poate găsi un sistem de ecuații nomografabile

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \varphi_1\, u_1, u_2, \ldots, u_{r_1}) \\
\lambda_2 &= \varphi_2(\lambda_1, u_{r_1+1}, \ldots, u_{r_2}) \\
\lambda_3 &= \varphi_3(\lambda_2, u_{r_2+1}, \ldots, u_{r_3}) \\
& \ldots \\
\lambda_i &= \varphi_i(\lambda_{i-1}, u_{r_{i-1}+1}, \ldots, u_{r_i}) \\
& \ldots \\
u_{n+1} = \lambda_p &= \varphi_p(\lambda_{p-1}\, u_{r_{p-1}+1}, \ldots, u_{r_p}) \quad (r_p = n).
\end{aligned} \tag{2}$$

Din (2) rezultă

$$u_{n+1} = \varphi_r[\varphi_{p-1}[\ldots \varphi_2[\varphi_1(u_1, \ldots, u_{r_1}), u_{r_1+1}, \ldots, u_{r_2}], \ldots, u_{r_{p-2}+1}, \ldots, u_{r_{p-1}}], u_{r_{p-1}+1}, \ldots, u_{r_p}]. \tag{3}$$

In nota prezentă vom stabili condiții necesare și suficiente pentru ca ecuația (1) să se poată scrie sub forma (3).

***Teoremă.** — Condițiile necesare și suficiente pentru ca ecuația (1) să se poată scrie sub forma (3) sînt*

$$\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_\alpha} : \frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_{\alpha+1}}\right) = 0. \tag{4}$$

pentru

$$\alpha=1,2,\ldots,r_i-1$$
$$\beta=r_i+1,\ldots,r_p$$
$$i=1,2,\ldots,p-1\,.$$

Condiţiile (4) sînt necesare. Presupunînd $r_{i-1}\leqslant\alpha<r_i (r_0=1)$, prin derivare în raport cu u_α şi $u_{\alpha+1}$ a relaţiei (3) obţinem

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_\alpha}=\frac{\partial\varphi_p}{\partial\varphi_i}\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_\alpha}$$
$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_{\alpha+1}}=\frac{\partial\varphi_p}{\partial\varphi_i}\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_{\alpha+1}}$$

de unde obţinem

(5) $$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_\alpha}:\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_{\alpha+1}}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_\alpha}:\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_{\alpha+1}}=h_\alpha(u_1,u_2,\ldots,u_{r_i})$$

din care rezultă condiţiile (4).

Condiţiile (4) sînt suficiente. Intr-adevăr, din (4) rezultă (5). In (5) luînd $i=1$, avem sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

(6) $$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_\alpha}:\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_{\alpha+1}}=h_\alpha(u_1,u_2,\ldots,u_{r_1})\quad \alpha=1,2,\ldots,r_1-1$$

Integrînd ecuaţia cu derivate parţiale ($\alpha=1$)

(6′) $$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_1}:\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_2}=h_1(u_1,u_2,\ldots,u_{r_1})$$

obţinem soluţia

(7) $$u_{n+1}=\varphi[\varphi_1(u_1,u_2,\ldots,u_{r_1}),\ u_3,u_4,\ldots,u_{r_1},u_{r_1+1},\ldots,u_n],$$

în care variabilele $u_3, u_4,\ldots, u_{r_1}$ intră atît prin intermediul funcţiei φ_1, cît şi separat.

Ţinînd seama că soluţia (7) verifică şi celelalte ecuaţii ale sistemului (6), avem

(7′) $$u_{n+1}=\varphi[\varphi(u_1,u_2,\ldots,u_{r_1}),u_{r_1+1},\ldots,u_n]$$

unde variabilele $u_1, u_2,\ldots,u_{r_1}$ se grupează în fucţia φ_1.

Luăm acum din (5) sistemul corespunzător lui $i=2$,

(8) $$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_\alpha}:\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_{\alpha+1}}=h_\alpha(u_1,u_2,\ldots,u_{r_1},\ldots,u_{r_2})$$
$$\alpha=r_1,r_1+1,\ldots,r_2-1\,.$$

Din integrarea ecuaţiei $\alpha=r_1$.

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_{r_1}}:\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_{r_1+1}}=h_{r_1}(u_1,\ldots,u_{r_1},u_{r_1+1},\ldots,u_{r_2})$$

avem

(9) $$u_{n+1}=\bar\varphi[\varphi_2(u_1,u_2,\ldots,u_{r_2}),u_1,u_2,\ldots,u_{r_1-1},u_{r_1+2},\ldots,u_n]\,.$$

Scriind că soluţia (9) verifică şi celelalte ecuaţii ale sistemului (8), precum şi combinaţii ale sistemului (5) de forma

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_\alpha}:\frac{\partial u_{n+1}}{\partial u_{r_1}}=h'_\alpha(u_1,\ldots,u_{r_1})$$
$$\alpha=1,2,\ldots,r_1-1$$

urmează că soluţia (9) nu depinde separat de variabilele $u_1,u_2,\ldots,u_{r_1-1}$ $u_{r_1+2},\ldots,u_{r_2}$, deci

(9′) $$u_{n+1}=\bar\varphi[\varphi_2(u_1,\ldots,u_{r_2}),u_{r_2+1},\ldots,u_n]$$

Mai departe, ţinînd seama că trebuie să verifice şi ecuaţia (6′)

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1}:\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2}=h_1(u_1,u_2,\ldots,u_{r_1})$$

printr-un raţionament analog cu precedentul se obţine

$$\varphi_2=\varphi_2[\varphi_1(u_1,u_2,\ldots,u_{r_1}),u_{r_1+1},\ldots,u_{r_2}]$$

deci (9′) se scrie

(9″) $$u_{n+1}=\varphi[\varphi_2(\varphi_1(u_1,u_2,\ldots,u_{r_1}),u_{r_1+1},\ldots,u_{r_2}),u_{r_2+1},\ldots,u_n]$$

Procedînd prin inducţie complectă se arată că soluţia u_{n+1} este de forma (3), adică condiţiile (4) sînt şi suficiente.

Condiţiile (4), ţinînd seama de forma ecuaţiei (1), se exprimă în modul următor

(10) $$\frac{\partial F}{\partial u_{n+1}}\cdot\frac{D\left(F,\dfrac{DF}{\partial u_\beta}\right)}{D(u_\alpha,u_{\alpha+1})}=\frac{\partial F}{\partial u_\beta}\cdot\frac{D\left(F,\dfrac{\partial F}{\partial u_{n+1}}\right)}{D(u_\alpha,u_{\alpha+1})}\quad \begin{array}{l}\alpha=1,2,\ldots,r_i-1\\ \beta=r_i+1,\ldots,n\\ i=1,2,\ldots,p-1\end{array}$$

Problema astfel pusă, conduce la o nouă generalizare a teoremei lui Goursat [1], analoagă cu generalizările făcute de Ermolova [2], Neişuler [3] şi alţii.

Aplicaţie.

Să cercetăm dacă pentru ecuaţia

$$F=(1+u_2+u_3)(u_4u_5u_7-u_4u_6-u_5u_6)+(u_4+u_5-1)[u_2(u_1u_7+u_7)+$$
$$+u_3(u_1u_7-u_1)]=0$$

se poate construi o nomogramă compusă prin nomograme elementare înlănţuite.

Condiţiile (10) se verifică uşor, iar ecuaţia dată se poate rezolva în raport cu u_7 şi se scrie

$$\lambda_1 = \frac{u_1u_2 + u_1u_3 + u_2 - u_3}{1 + u_2 + u_3}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{u_4 + u_5 - 1}{u_4 + u_5} + \frac{u_4u_5}{u_4 + u_5}$$

$$u_7 = \frac{u_6}{\lambda_2}.$$

(Lucrare intrată la data de 4 iun. 1954).

Catedra de geometrie
Universitatea „V. Babeş", Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Goursat Ed., *Bull. Soc. math. de France*, 27 (1899). p. 27.
2. Ermolova O. V., *Ucionîe zapiski M.G.U.*, vîp. 28, 1939, p. 43—56.
3. Neişuler L. I., *Usp. Math. Nauc* 3, vîp. 6, 1948. p. 205.
4. Bal L. şi Rado Fr., *Comunicările Academiei R.P.R.*, 1954 (sub tipar).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

О группировке переменных величин в виду построения составных номограмм

ЛАСКУ БАЛ и И. РУСУ

В этой заметке авторы демонстрируют следующую теорему относящуюся к отделению переменных величин, в виду построения составных номограмм.

Т е о р е м а: Необходимые и достаточные условия штобы уравнения:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = 0$$

представлятся в форме:

$$\lambda_i = \varphi_i(\lambda_{i-1}, u_{r_{i-1}+1}, \ldots, u_{r_i}) \quad \begin{matrix}(i = 1, 2, \ldots, p)\\ \lambda_0 = \text{конст.}\end{matrix}$$

где $\lambda_p = u_{n+1}$), являются

$$\frac{\partial F}{\partial u_{n+1}} \cdot \frac{D\left(F, \frac{\partial F}{\partial u_\beta}\right)}{D(u_\alpha, u_{\alpha+1})} = \frac{\partial F}{\partial u_\beta} \cdot \frac{D\left(F, \frac{\partial F}{\partial u_{n+1}}\right)}{D(u_\alpha, u_{\alpha+1})}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, r_i - 1$$
$$\beta = r_i + 1, \ldots, n$$
$$i = 1, 2, \ldots, p - 1.$$

RÉSUMÉ

Sur un groupement de variables en vue de la construction des nomogrammes composés

par

LASCU BAL et I. RUSU

Dans la présente note les auteurs démontrent le théorème ci-dessous, concernant la séparation des variables, en vue de la construction des nomogrammes composés.

Théorème. — *Les conditions nécessaires et suffisantes afin que, pour l'équation*

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = 0$$

soit trouvé un système d'équations de la forme

$$\lambda_i = \varphi_i(\lambda_{i-1}, u_{r_{i-1}+1}, \ldots, u_{r_i}) \quad \begin{matrix}(i = 1, 2 \ldots p)\\ \lambda_0 = \text{const.}\end{matrix}$$

où $\lambda_p = u_{n+1}$, *sont*

$$\frac{\partial F}{\partial u_{n+1}} \cdot \frac{D\left(F, \frac{\partial F}{\partial u_\beta}\right)}{D(u_\alpha, u_{\alpha+1})} = \frac{DF}{\partial u_\beta} \cdot \frac{D\left(F, \frac{\partial F}{\partial u_{n+1}}\right)}{D(u_\alpha, u_{\alpha+1})}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, r_i - 1)$$
$$(\beta = r_i + 1, \ldots, n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p - 1)$$