ASUPRA UNEI PROBLEME DE PARTIŢIE A NUMERELOR

DE

TIBERIU POPOVICIU

Membru corespondent al Academiei R. P. R.

Comunicare prezentată în şedinţa din 24 Septembrie 1952 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

1. Să considerăm ecuaţia

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m = n, \tag{1}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt n numere naturale date. Presupunând că n este un număr întreg nenegativ, vom nota cu $\mathrm{N}(n; a_1, a_2, \ldots, a_m)$ numărul soluţiilor în numere întregi *nenegative* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale ecuaţiei (1). Pentru n întreg negativ definim simbolul $\mathrm{N}(n; a_1, a_2, \ldots, a_m)$ ca fiind egal cu de $(-1)^{m-1}$ ori numărul soluţiilor în numere întregi *negative* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale ecuaţiei (1). $\mathrm{N}(n; a_1, a_2, \ldots, a_m)$ depinde, în afară de n, şi de coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Este clar că funcţia $\mathrm{N}(n; a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *este simetrică în* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *pentru fiecare valoare a lui* n.

Dacă n este un număr întreg pozitiv, numărul soluţiilor în numere întregi pozitive ale ecuaţiei (1) este egal, pe baza celor de mai sus, cu $(-1)^{m-1}\mathrm{N}(-n; a_1, a_2, \ldots, a_m)$.[1])

Când nu este nici o ambiguitate asupra coeficienţilor $a_1, a_2, \ldots, a_m$,

---

[1]) Soluţiile în numere întregi nenegative se pot clasifica după cum 0, 1, 2, ..., sau $m-1$ dintre necunoscute se anulează ($n \neq 0$). Rezultă atunci că dacă n este un număr natural, numărul soluţiilor în numere întregi pozitive ale ecuaţiei (1) este egal cu

$$\mathrm{N}(n; a_1, a_2, \ldots, a_m) - \Sigma\,\mathrm{N}(n; a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{m-1}}) + \\ + \Sigma\,\mathrm{N}(n; a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{m-2}}) + \ldots + (-1)^{m-1}\Sigma\,\mathrm{N}(n; a_{i_1})$$

Insumările succesive fiind extinse la combinările i_1 câte 1, i_1, i_2 câte $2, \ldots, i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$ câte $m-1$ ale indicilor $1, 2, \ldots, m$, deducem

$$\mathrm{N}(-n; a_1, a_2, \ldots, a_m) = \Sigma\,\mathrm{N}(n; a_{i_1}) - \Sigma\,\mathrm{N}(n; a_{i_1}, a_{i_2}) + \ldots + \\ + (-1)^{m-2}\Sigma\,\mathrm{N}(n; a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{m-1}}) + (-1)^{m-1}\mathrm{N}(n; a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

n fiind un număr natural.

vom nota mai scurt cu $N_m(n)$, sau chiar cu $N(n)$, numărul

$$N(n; a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Notația cu indicele m va fi întrebuințată mai cu seamă atunci când intervin simultan, atât ecuația (1) cu coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_m$ cât și ecuații analoage cu mai puțin de m necunoscute, având ca coeficienți termenii dela începutul șirului $a_1, a_2, \ldots$ De ex. indicii m și $m-1$ deosebesc cazurile respective când considerăm simultan ecuația (1) și ecuația $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{m-1}x_{m-1} = n$. Vom întrebuința prescurtări analoage și pentru alte funcții de n care depind și de coeficienții ecuației (1). Când va fi necesar vom specifica totdeauna, pentru mai multă claritate, la care din ecuațiile (1) se referă notațiile prescurtate întrebuințate.

2. — Pe baza cercetărilor lui E u l e r [1], studiul numărului $N(n)$ se poate face folosind funcțiile generatoare

$$F(\zeta) = \frac{1}{(1-\zeta^{a_1})(1-\zeta^{a_2})\cdots(1-\zeta^{a_m})} = \sum_{n=0}^{\infty} N(n)\zeta^n, \tag{2}$$

$$-F(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} N(-n)\frac{1}{\zeta^n} \tag{3}$$

care se obțin desvoltând funcția rațională F( ) odată după puterile crescătoare și odată după puterile descrescătoare ale lui ζ.

Metoda lui Euler, bazată pe formula (2), a fost adâncită de diverși cercetători și în special de J. J. S y l v e s t e r [2a]. Această metodă folosește proprietățile funcției raționale $F(\zeta)$ și, în special, descompunerea sa în fracții simple, precum și diverse proprietăți ale rădăcinilor de diferite ordine ale unității. Se poate însă studia numărul $N(n)$ și prin considerațiuni elementare de teoria numerelor, metodă care reușește bine, cel puțin în cazurile nu prea complicate. Metoda aceasta a fost aplicată în special de K. W e i h r a u c h [3a, 3b] și, mai cu seamă în ce privește problemele de care ne ocupăm aici, de T h. S k o l e m [4]. Ambele metode au avantagiile lor proprii.

3. — In lucrarea de față ne propunem să examinăm următoarea problemă:

PROBLEMA I. *Fiind dată ecuația* (1), *să se determine un polinom* $P(n)$ *de* n *astfel ca* $N(n)$ *să fie egal cu întregul cel mai apropiat de* $P(n)$, *oricare ar fi* n.

Această problemă a fost studiată în cazurile particulare

$$m = 3, a_1, = 1, a_2 = 2, a_3 = 3;$$
$$m = 3, a_1, = 1, a_2 = 3, a_3 = 5;$$

de către Sylvester [2a]. Th. Skolem [4] a studiat afară de acestea și cazurile

$$m = 3, a_1, = 1, a_2 = 2, a_3 = 5;$$
$$m = 4, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5.$$

In cele ce urmează vom rezolva complet problema pentru $m=2$ și $m=3$. Cazul $m=1$ este banal și va fi reamintit de altfel în treacăt. Vom face considerațiuni și asupra unor cazuri mai generale.

Problema I (ca și de altfel problemele următoare II și II') permite, prin anumite soluții particulare simple ale ei, enunțarea unor proprietăți interesante asupra numărului soluțiilor în numere întregi nenegative sau asupra numărului soluțiilor în numere întregi pozitive ale ecuației (1).

Problema I nu este totdeauna posibilă. Cu alte cuvinte, dându-se m și coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_m$, deci ecuația (1), nu există totdeauna un polinom $P(n)$ astfel ca condiția cerută de problemă să fie îndeplinită. Pentru ca un polinom $P(n)$ să verifice condiția cerută este necesar și suficient să avem

$$-\frac{1}{2} < P(n) - N(n) < \frac{1}{2} \tag{4}$$

sau

$$|P(n) - N(n)| < \frac{1}{2} \tag{5}$$

oricare ar fi n.

Dacă în acest caz cunoaștem valoarea lui $P(n)$, putem totdeauna să deducem fără ambiguitate valoarea lui $N(n)$.

4. — Alte două probleme sunt în strânsă legătură cu problema I. Una din aceste probleme este următoarea:

PROBLEMA II. — *Fiind dată ecuația* (1) *să se determine un polinom* $Q(n)$ *de* n *astfel ca* $N(n)$ *să fie egal cu întregul cuprins în* $Q(n)$ *oricare ar fi* n.

Cu alte cuvinte să se determine un polinom $Q(n)$ astfel ca să avem

$$N(n) = [Q(n)] \tag{6}$$

oricare ar fi n.

Egalitatea (6) este echivalentă cu inegalitățile

$$0 \leq Q(n) - N(n) < 1, \tag{7}$$

oricare ar fi n.

In formula (6) am notat ca de obicei cu $[\alpha]$ *întregul cuprins în* α, sau partea întreagă a lui α, sau cel mai mare întreg $\leq \alpha$. In loc de $[\alpha]$ putem considera *întregul care cuprinde pe* α, sau cel mai mic întreg $\geq \alpha$. Acest număr este egal cu $-[-\alpha]$. Ne putem pune atunci problema:

PROBLEMA II'. — *Fiind dată ecuația* (1), *să se determine un polinom* $S(n)$ *de* n *astfel ca* $N(n)$ *să fie egal cu întregul care cuprinde pe* $S(n)$, *oricare ar fi* n.

Cu alte cuvinte să se determine un polinom $S(n)$ astfel ca să avem

$$N(n) = -[-S(n)], \tag{8}$$

oricare ar fi n.

Egalitatea (8) este echivalentă cu inegalităţile

(9) $$0 \leqq \mathrm{N}(n) - \mathrm{S}(n) < 1,$$

oricare ar fi n.

Dacă problema I are o soluţie $\mathrm{P}(n)$ şi problemele II şi II′ au o soluţie căci e destul să luăm atunci $\mathrm{Q}(n) = \mathrm{P}(n) + \frac{1}{2}$, $\mathrm{S}(n) = \mathrm{P}(n) - \frac{1}{2}$ pentru ca inegalităţile (7) şi (9) să fie verificate, deoarece acest lucru rezultă în mod simplu din (4). Vom vedea mai jos că dacă una din problemele I, II, II′ are o soluţie, şi celelalte două au o soluţie, precum şi care sunt legăturile dintre soluţiile acestor probleme.

5. — In fine să considerăm problema mai generală:

PROBLEMA III. — *Fiind dată ecuaţia* (1), *să se determine un polinom* $\mathrm{R}(n)$ *de* n *astfel ca diferenţa* $\mathrm{R}(n) - \mathrm{N}(n)$ *să fie uniform mărginită.*

Cu alte cuvinte să se determine un polinom $\mathrm{R}(n)$ astfel ca să avem

(10) $$|\mathrm{R}(n) - \mathrm{N}(n)| < \mathrm{K},$$

oricare ar fi n, K fiind un număr independent de n.

Din inegalităţile (5), (7), (9) se vede atunci că

Condiţia (10) *este necesară pentru ca problemele* I, II, II′ *să aibă o soluţie.*

Vom vedea mai jos cum se pot deduce soluţiile problemelor I, II, II′, când ele există, din polinomul $\mathrm{R}(n)$.

6. — In cele ce urmează ne folosim de câteva proprietăţi elementare ale polinoamelor. Unele din aceste proprietăţi rezultă în mod implicit din proprietatea importantă că un polinom dat este complet determinat de un număr finit de valori ale sale. Din faptul că variabila parcurge numai valorile întregi nu provine nici o dificultate şi nici o confuzie. Deasemenea ne folosim de următoarea:

LEMA 1. — *Dacă diferenţa a două polinoame în* n *este uniform mărginită, aceste polinoame diferă prin o constantă.*

Proprietatea aceasta o putem accepta aici fără demonstraţie.

Din lema 1 rezultă că două soluţii oarecare ale uneia din problemele I, II, II′ sau III diferă totdeauna prin o constantă. Se mai poate vedea uşor că semisuma a două soluţii este totdeauna o soluţie. Dacă deci $\mathrm{P}(n)$ este o soluţie a uneia din problemele I, II, II′ sau III, toate soluţiile acestei probleme sunt cuprinse în formula $\mathrm{P}(n) + \lambda$, unde λ este o constantă aparţinând unui anumit interval. In cazul problemei III intervalul de variaţie a lui λ este, evident, toată axa reală. Proprietăţile acestea vor fi precizate mai jos.

7. — O observaţie se ridică, în mod firesc. Şi anume dacă nu cumva problemele I, II, II′, III devin mai generale dacă constrângem pe n să ia numai valori nenegative sau numai valori negative. Răspunsul este ne-

gativ, după cum rezultă din consideraţiile care urmează. Este clar deasemenea că lema 1 subsistă şi dacă ne limităm numai la valorile nenegative sau numai la valorile negative ale lui n.

§ 1.

8. — In acest § ne vom ocupa de problema III. Din rezultatele cunoscute asupra ecuaţiei (1) se poate deduce că pentru ca problema III să aibă o soluţie este necesar şi suficient ca numerele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ să fie două câte două prime între ele. Vom da totuşi demonstraţia acestei proprietăţi deoarece, pe de o parte, necesitatea condiţiei trebue să fie clar pusă în evidenţă, pe de altă parte, demonstraţia suficienţei duce la un procedeu direct pentru calculul polinomului $\mathrm{R}(n)$, procedeu care e bine să fie precizat.

Ne vom ocupa întâi de necesitatea condiţiei. Aici ne vom baza pe descompunerea în fracţii simple a funcţiei raţionale (2). In cazurile $m = 2,3$ vom da mai jos şi demonstraţii directe.

Vom presupune $m > 1$, afară numai dacă nu se specifică contrarul.

9. — Toate rădăcinile numitorului funcţiei $\mathrm{F}(\zeta)$ sunt rădăcini ale unităţii şi ordinul lor de multiplicitate este, pentru fiecare, cel mult m. In particular, rădăcina 1 este de ordin m de multiplicitate. Avem atunci descompunerea în fracţii simple

(11) $$\mathrm{F}(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{(i)} \frac{\Gamma(\varepsilon, i)}{(1 - \varepsilon\zeta)^i}$$

unde însumarea $\sum\limits_{(i)}$ se referă la toate rădăcinile diferite ε, cel puţin de ordinul i de multiplicitate, ale numitorului fracţiei $\mathrm{F}(\zeta)$. *Constantele* $\Gamma(\varepsilon\,; i)$ *sunt toate diferite de zero,* după cum rezultă din faptul că fracţia (2) este ireductibilă şi din faptul că descompunerea în fracţii simple a unei funcţii raţionale este unică.

Din (2) şi (11) rezultă că

(12) $$\mathrm{N}(n) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{C}_i(n) \binom{n+i-1}{i-1}$$

unde

(13) $$\mathrm{C}_i(n) = \sum_{(i)} \Gamma(\varepsilon\,; i)\, \varepsilon^n, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

pentru orice n nenegativ.

Pentru prescurtare vom pune

(14) $$\delta = a_1 a_2 \ldots a_m\,.$$

Avem atunci $\varepsilon^{n'} = \varepsilon^{n''}$ dacă $n' \equiv n''$ (mod δ) pentru toate rădăcinile ε. Din (13) deducem atunci $\mathrm{C}_i(n') = \mathrm{C}_i(n'')$ pentru $n' \equiv n''$ (mod δ), $i = 1, 2, \ldots, m$.

Şirurile dublu infinite

$$\{C_i(n)\} \qquad \ldots, C_i(-1),\ C_i(0),\ C_i(1), \ldots$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

sunt deci periodice cu perioada comună δ [2])

In particular numerele $C_i(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, m$ iau numai un număr finit de valori distincte.

10. — Vom demonstra acum

LEMA 2. — *Pentru ca problema III să aibă o soluţie este necesar ca pentru fiecare $i = 2, 3, \ldots, m$ numerele $C_i(n)$ să ia o singură valoare.*

Să presupunem că problema III are o soluţie dar că condiţia lemei nu este satisfăcută. Fie atunci r cea mai mare valoare a lui i pentru care numerele $C_i(n)$ iau cel puţin două valori diferite. Avem atunci $2 \leq r \leq m$. Fie

$$C_r(\alpha) \neq C_r(\beta). \tag{15}$$

Dacă $R(n)$ este o soluţie a problemei III, avem în particular

$$|R(\alpha + ns) - N(\alpha + ns)| < K,$$

pentru orice n întreg.

Insă

$$N(\alpha + ns) = \sum_{i=1}^{m} C_i(\alpha) \binom{\alpha + ns + i - 1}{i-1}$$

este un polinom în n şi atunci, pe baza lemei 1, avem

$$R(\alpha + ns) = N(\alpha + ns) + \lambda,$$

oricare ar fi n, λ fiind o constantă.

Rezultă atunci că

$$R(n) = \sum_{i=1}^{m} C_i(\alpha) \binom{n+i-1}{i-1} + \lambda \tag{16}$$

In mod analog deducem

$$R(n) = \sum_{i=1}^{m} C_i(\beta) \binom{n+i-1}{i-1} + \lambda', \tag{17}$$

λ' fiind o constantă.

Din (16), (17) deducem

$$\sum_{i=1}^{m} [C_i(\alpha) - C_i(\beta)] \binom{n+i-1}{i-1} = \sum_{i=1}^{r} [C_i(\alpha) - C_i(\beta)] \binom{n+i-1}{i-1} = \lambda' - \lambda$$

pentru orice n.

[2]) In loc de δ se poate lua c.m.m.m.c. al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Acest lucru este însă imposibil căci, pe baza lui (15), membrul întâi este un polinom în n de grad efectiv $r - 1 \geq 1$.

11. — Vom demonstra acum

LEMA 3. — *Pentru ca problema III să aibă o soluţie este necesar ca numitorul fracţiei (2) să nu aibă nici o rădăcină multiplă diferită de 1.*

Să presupunem contrarul. Există atunci cel puţin două rădăcini cel puţin duble şi avem

$$C_2(n) = \Gamma(1;2) + \sum_{\substack{(2) \\ \varepsilon \neq 1}} \Gamma(\varepsilon;2)\, \varepsilon^n$$

pentru orice n, deoarece una din rădăcinile ε este egală cu 1.

Dar, dacă $\varepsilon \neq 1$, avem $\sum_{n=0}^{\delta-1} \varepsilon^n = 0$, deci

$$\sum_{n=0}^{\delta-1} C_2(n) = \delta \Gamma(1;2).$$

Insă, pe baza lemei 2, numerele $C_2(n)$ sunt toate egale şi rezultă atunci $C_2(n) = \Gamma(1;2)$ oricare ar fi n. Deducem de aici că

$$\sum_{\substack{(2) \\ \varepsilon \neq 1}} \Gamma(\varepsilon;2)\, \varepsilon^n = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

ceea ce atrage după sine, pe baza unei proprietăţi bine cunoscute a sistemelor de ecuaţii liniare, că $\Gamma(\varepsilon;2) = 0$ pentru toate rădăcinile $\varepsilon \neq 1$. Acest lucru este însă, pe baza unei observaţii dela Nr. 9, imposibil. Cu aceasta lema 3 este demonstrată.

12. — Necesitatea condiţiei urmărite este acum demonstrată deoarece faptul că numitorul fracţiei $F(\zeta)$ nu are nici o rădăcină multiplă diferită de 1 este echivalent cu faptul că coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt doi câte doi primi între ei.

Trebue observat că suficienţa condiţiei rezultă din cele ce preced. Dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt două câte două prime între ele formula (12) se reduce la

$$N(n) = \sum_{i=2}^{m} \Gamma(1;i) \binom{n+i-1}{i-1} + C_1(n) \tag{18}$$

şi se poate lua

$$R(n) = \sum_{i=2}^{m} \Gamma(1;i) \binom{n+i-1}{i-1}$$

In definitiv avem deci

TEOREMA 1. — *Condiţia necesară şi suficientă ca problema III să aibă o soluţie este ca numerele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ să fie două câte două prime între ele.*

Un raționament analog cu cel dela Nr. 11 făcut asupra lui $C_2(n)$, aplicat aici lui $C_1(n)$, ne arată că numerele $C_1(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ nu pot fi toate egale între ele decât dacă 1 este singura rădăcină a numitorului fracției (2). Acest lucru este echivalent cu faptul că numerele $a_1, a_2, \dots, a_m$ sunt toate egale cu 1.

In cele ce urmează vom da o demonstrație directă suficienței condiției.

§ 2.

13. — Deoarece vom folosi funcțiuni de variabila n relativ la ecuații (1) cu m și m—1 necunoscute, vom întrebuința notațiile prescurtate în sensul explicat la Nr. 1. Astfel,

$$N_m(n) = N(n; a_1, a_2, \dots, a_m), \quad N_{m-1}(n) = N(n; a_1, a_2, \dots, a_{m-1})$$

precum și alte notații analoage care se înțeleg dela sine.

Vom demonstra întâi

LEMA 4. — *Avem formula*

$$N_m(n + ka_m) - N_m(n) = \sum_{i=1}^{k} N_{m-1}(n + ia_m) \tag{19}$$

oricare ar fi numărul natural k, numărul întreg n și numărul natural $m > 1$.

Demonstrația se face numărând soluțiile ecuației (1) într'un mod bine determinat. Vom distinge trei cazuri:

1°. $0 \geqq n$. Atunci soluțiile în numere întregi nenegative ale ecuației

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = n + ka_m \tag{20}$$

sunt de două feluri. Unele se obțin din soluțiile în numere întregi nenegative ale ecuației

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m = n, \tag{21}$$

adunând k la x_m. Celelalte sunt soluții în care $x_m < k$. Formula (19) se obține dând lui x_m în (20) succesiv valorile $0, 1, 2, \dots, k$—1.

2°. — $ka_m \leqq n < 0$. In acest caz există un număr natural $k' \leqq k$ astfel ca

$$-k'a_m \leqq n < -(k' - 1)\, a_m .$$

Soluțiile în numere întregi nenegative ale ecuației (20) se obțin dând lui x_m succesiv valorile $0, 1, \dots, k-k'$ și rezultă că

$$N_m(n + ka_m) = \sum_{i=k'}^{k} N_{m-1}(n + ia_m). \tag{22}$$

Deasemenea, orice soluție în numere întregi negative a ecuației (21) se obține dând lui x succesiv valorile $-1, -2, \dots, -k'+1$ și rezultă că

$$(-1)^{m-1} N_m(n) = (-1)^{m-2} \sum_{i=1}^{k'-1} N_{m-1}(n + ia_m)$$

sau

$$-N_m(n) = \sum_{i=1}^{k'-1} N_{m-1}(n + ia_m). \tag{23}$$

Adunând membru cu membru egalitățile (22), (23) deducem formula (19).

Cazul $k' = 1$ nu este exclus căci atunci avem evident $N_m(n) = 0$, $(m > 1)$.

3°. $n < -ka_m$. In acest caz orice soluție în numere întregi negative ale ecuației (21) sau se obține din soluțiile în numere întregi negative ale ecuației (20) scăzând pe k din x_m sau este o soluție în care $x_m \geqq -k$. Dând în (21) lui x_m succesiv valorile $-1, -2, \dots, -k$, deducem

$$(-1)^{m-1} N_m(n) - (-1)^{m-1} N_m(n + ka_m) = (-1)^{m-2} \sum_{i=1}^{k} N_{m-1}(n + ia_m)$$

care revine tot la formula (19).

Lema 4 este complet demonstrată.

Cazuri particulare importante ale formulei (19) sunt

$$N_m(n + a_m) - N_m(n) = N_{m-1}(n + a_m) \tag{24}$$

care se obține luând $k = 1$ și

$$N_m(n + \delta) - N_m(n) = \sum_{i=1}^{\delta'} N_{m-1}(n + ia_m) \tag{25}$$

unde δ este definit de (14) și

$$\delta' = a_1 a_2 \dots a_{m-1}, \quad \delta' a_m = \delta. \tag{26}$$

In cele ce urmează vom continua să întrebuințăm notațiile prescurtate (14) și (26).

14. — Putem acum demonstra

LEMA 5. — *Dacă numerele* $a_1, a_2, \dots, a_m$ *sunt două câte două prime între ele avem, pentru orice n întreg*

$$N_m(n) = R_m(n) + G_m(n), \tag{27}$$

unde $R_m(n) = R(n; a_1, a_2, \dots, a_m)$ *este un polinom de gradul m—1 în n iar* $G_m(n) = G(n; a_1, a_2, \dots, a_m)$ *formează un șir dublu infinit* $\{G_m(n)\}$ *periodic de perioadă* δ.

Demonstrația lemei se face prin inducție completă, bazându-ne pe formula (25).

Observăm întâi că, în condițiile lemei, avem

$$\Sigma^* G_m(n) = \sum_{n=0}^{\delta-1} G_m(n) = H_m(a_1, a_2, \dots, a_m), \tag{28}$$

unde Σ^* se extinde la un sistem de δ valori ale lui n formând un sistem complet de resturi (mod δ). Suma (28) este independentă de n.

Să presupunem acum că proprietatea este adevărată în cazul ecua- țiilor (1) cu m—1 necunoscute şi să arătăm că va fi adevărată și în cazul ecuațiilor (1) cu m necunoscute. Avem atunci

$$N_{m-1}(n) = R_{m-1}(n) + G_{m-1}(n), \tag{29}$$

cei doi termeni din membrul al doilea îndeplinind condițiile lemei.

Există însă un polinom $R_m(n)$ de gradul m—1 astfel ca să avem

$$R_m(n+\delta) - R_m(n) = \sum_{i=1}^{\delta'} R_{m-1}(n + ia_m) + H_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) \tag{30}$$

Ținând seamă de (25) şi (29) deducem

$$N_m(n+\delta) - N_m(n) = R_m(n+\delta) - R_m(n).$$

Punând atunci

$$G_m(n) = N_m(n) - R_m(n) \tag{31}$$

proprietatea este demonstrată.

In fine, pentru $m = 1$ lema este adevărată. Pentru a vedea acest lucru e destul să luăm $R(n;a_1) = 0$ şi vom avea atunci $G(n;a_1) = 1$ sau 0 după cum a_1 divide pe n sau nu divide pe n.

In cursul demonstrației faptul că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt două câte două prime între ele intervine prin aplicarea formulei (28). Şi anume suma $\Sigma^* G_{m-1}(n)$ se extinde aici la valorile $n + ia_m$, $i = 1, 2, \ldots, \delta'$ *ale* lui n, valori care formează un sistem complet de resturi (mod δ') căci numerele a_m, $a_1 a_2 \ldots a_{m-1}$ sunt prime între ele. De altfel faptul că nu- merele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt două câte două prime între ele este echivalent cu faptul că numerele a_i, $a_1 a_2 \ldots a_{i-1}$ sunt prime între ele, oricare ar fi $i = 2, 3, \ldots, m$.

Cu aceasta suficiența condiției teoremei 1 este demonstrată.

15. — Să presupunem deci că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt două câte două prime între ele. In formula (27) polinomul $R_m(n)$ nu este determinat decât afară de o constantă aditivă oarecare. Considerațiile noastre din §§ următoare nu sunt influențate de această nedeterminare a termenilor $R_m(n)$ şi $G_m(n)$, însă faptul că dispunem de această nedeterminare simplifică în anumite cazuri expunerea.

Pentru a aprecia structura lui $N_m(n)$ şi mai ales pentru a calcula pe $R_m(n)$ este util să fixăm convenabil constanta aditivă din acest termen Pentru aceasta vom „normaliza" polinomul R (n) prin condiția

$$R_m(0) = R(0;a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0, \quad (m \geqq 1). \tag{32}$$

Prin această condiție polinomul $R_m(n)$, deci şi termenul periodic $G_m(n)$ din formula (27) sunt complet determinați. Dacă $m > 1$, polinomul

$G_m(n)$ este de forma[3])

$$R_m(n) = \frac{1}{\delta} \sum_{j=1}^{m-1} A_j^{(m)} n^j$$

unde

$$A_j^{(m)} = A_j^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad j = 1, 2, \ldots, m-1$$

sunt nişte coeficienți independenți de n.

Vom demonstra acum

LEMA 6. — *Dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt două câte două prime între ele, coeficienții polinomului $R_n(n)$, presupus normat prin condiția* (32), *precum și $G_m(n)$ sunt funcții simetrice de $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pentru orice valoare a lui n.*

In ce priveşte coeficienții polinomului $R_m(n)$ este evident destul să demonstrăm că $A_j^{(m)}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ sunt simetrici. Demonstrația lemei se bazează pe observația că $N_m(n)$ este simetric în raport cu $a_1, a_2, \ldots, a_m$

Din (27) deducem, pentru un n dat,

$$\delta N_m(n + i\delta) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j^{(m)} (n + i\delta)^j + \delta G_m(n), \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{33}$$

Aceste relații formează un sistem de m ecuații liniare cu m necunoscute $A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, \ldots, A_{m-1}^{(m)}$, $G_m(n)$. Toți coeficienții acestui sistem sunt funcții simetrice de $a_1, a_2, \ldots, a_m$ şi lema 6 rezultă prin rezolvarea sistemului. Este de altfel uşor de văzut că determinantul sistemului este diferit de zero.

Referindu-ne la formula (28) vedem că, dacă avem (32), *funcția $H_n(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ este deasemenea o funcție simetrică de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.* Această proprietate rezultă, după cum vom vedea mai jos, şi direct din simetria coeficienților $A_j^{(m)}$.

Sistemul (33) permite să calculăm coeficienții polinomului $R_n(n)$ în funcție de numerele $N_m(n)$. Inutil să scriem formulele corespunzătoare deoarece nu vor fi folosite aici. Vom calcula acești coeficienți cu ajutorul formulei (30). Inainte însă este necesar să stabilim câteva formule utilizate mai jos.

§ 3.

16. — Numerele lui B e r n o u l l i sunt definite de relațiile de recurență [5]

$$B_0 = 1, \quad \sum_{\nu=0}^{s} \binom{s}{\nu} B_\nu = B_s \quad s = 2, 3, \ldots \tag{34}$$

---

3) Punerea în evidență a factorului $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_m}$ simplifică expunerea, după cum vom vedea mai jos.

De aici deducem şi

$$B_0=1,\quad \frac{B_j}{j!}=-\sum_{\nu=0}^{j-1}\frac{B_\nu}{\nu!\,(j+1-\nu)!},\quad j=1,2,\dots \tag{35}$$

Aceste formule permit să calculăm succesiv numerele B_ν. Obţinem astfel

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\ B_8=-\frac{1}{30},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Se ştie că toate numerele lui B e r n o u l l i cu indici impari şi >1 sunt nuli, iar cei cu indici pari şi >0 sunt alternativ pozitivi şi negativi. Mai precis

$$B_{4\nu-2}>0,\quad B_{4\nu}<0,\quad \nu=1,2,\dots$$

Calculând diferenţa

$$\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{B_\nu}{\nu!\,(s-\nu)!}-s\sum_{\nu=0}^{s}\frac{B_\nu}{\nu!\,(s+1-\nu)!},\quad s\geqq 2$$

şi ţinând seamă de (35) deducem

$$\frac{1}{(s+1)!}-\sum_{\nu=1}^{s}\frac{(\nu-1)B_\nu}{\nu!\,(s+1-\nu)!}=\frac{B_s}{s!},\quad s\geqq 2 \tag{36}$$

Vom mai avea nevoe şi de evaluarea sumelor

$$I_s=\sum_{\nu=0}^{s}\frac{B_\nu}{\nu!}\cdot\frac{B_{s-\nu}}{(s-\nu)!},\quad s=0,1,\dots$$

şi anume vom demonstra că

$$I_0=1,\quad \sum_{\nu=0}^{s}\frac{B_\nu}{\nu!}\cdot\frac{B_{s-\nu}}{(s-\nu)!}=-\frac{B_{s-1}}{(s-1)!}-\frac{(s-1)B_s}{s!},\quad s=1,2,\dots \tag{37}$$

Pentru aceasta observăm că, dacă ţinem seamă de (35) şi dacă presupunem $s>0$, deducem

$$I_s=\sum_{\nu=0}^{s}\frac{B_\nu}{\nu!}\cdot\frac{B_{s-\nu}}{(s-\nu)!}=\frac{B_s}{s!}-\sum_{\nu=0}^{s-1}\frac{B_\nu}{\nu!}\left[\sum_{\mu=0}^{s-\nu-1}\frac{B_\mu}{\mu!\,(s+1-\nu-\mu)!}\right]=$$
$$=\frac{B_s}{s!}-\sum_{j=0}^{s-1}\left[\sum_{\nu=0}^{j}\frac{B_\nu}{\nu!}\cdot\frac{B_{j-\nu}}{(j-\nu)!\,(s-j+1)!}\right]$$

de unde

$$I_s=\frac{B_s}{s!}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{I_j}{(s-j+1)!},\quad s=1,2,\dots \tag{38}$$

Formula (37) se demonstrează prin inducţie completă. Este destul să presupunem $s>1$, căci pentru $s=0,1$ formulele se verifică direct imediat. Presupunând că formula este adevărată pentru $I_0, I_1, \dots, I_{s-1}$, trebue să arătăm că ea va fi adevărată şi pentru I_s. Acest lucru rezultă din formula (38), observând că

$$\sum_{j=0}^{s-1}\frac{I_j}{(s-j+1)!}=\frac{1}{(s+1)!}-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{(s-j+1)!}\left[\frac{B_{j-1}}{(j-1)!}+\frac{(-j1)B_j}{j!}\right]$$

şi ţinând seamă de formulele (35), (36).

17. — Să considerăm acum polinoamele în t

$$\Phi_s=\Phi_s(t)=\sum_{\nu=0}^{s}\frac{B_\nu}{\nu!}t^\nu,\quad s=0,1,\dots$$

Ne propunem să calculăm coeficientul lui t^s în polinomul Φ_s^{s+1}, adică numărul $\text{coef}_s\,\Phi_s^{s+1}$, convenind a nota cu $\text{coef}_k\,\Phi$ coeficientul lui t^k în polinomul Φ de t.

Pentru aceasta să considerăm şi polinoamele

$$E_s=E_s(t)=\sum_{\nu=0}^{s}\frac{t^\nu}{\nu!},\quad s=0,1,\dots$$

Dacă observăm că $B_1=-\frac{1}{2}$ şi dacă ţinem seamă de formulele (34) avem

$$\Phi_s E_s\equiv t+\Phi_s \pmod{t^{s+1}} \tag{39}$$

de unde

$$\Phi_s^{s+1}\equiv -t\,\Phi_s^s+\Phi_s^{s+1}E_s \pmod{t^{s+1}}$$

Dar

$$t\,\Phi_s^s\equiv t\,\Phi_{s-1}^s \pmod{t^{s+1}}$$

şi deducem

$$\text{coef}_s\,\Phi_s^{s+1}=-\text{coef}_{s-1}\,\Phi_{s-1}^s+\text{coef}_s\,\Phi_s^{s+1}E_s \tag{40}$$

Ţinând seamă de formulele (37) deducem (Φ_s' este derivata lui Φ_s)

$$t\,\Phi_s'\equiv\Phi_s(1-t-\Phi_s) \pmod{t^{s+1}}$$

iar dacă ţinem seamă şi de (35),

$$t\,\Phi_s'-\Phi_s\equiv-\Phi_s^2E_s \pmod{t^{s+1}}$$

de unde

$$t\,\Phi_s'\,\Phi_s^{s-1}-\Phi_s^s\equiv-\Phi_s^{s+1}E_s \pmod{t^{s+1}}.$$

Avem prin urmare

$$\text{coef}_s\left[t\,\Phi_s'\,\Phi_s^{s-1}-\Phi_s^s\right]=-\text{coef}_s\,\Phi_s^{s+1}E_s$$

Dar membrul întâi este nul căci $s\Phi_s'\Phi_s^{s-1}$ este derivata polinomului Φ_s^s. Deducem prin urmare din (40)

$$\operatorname{coef}_s \Phi_s^{s+1} = -\operatorname{coef}_{s-1}\Phi_{s-1}^s .$$

De unde, în definitiv,

$$\operatorname{coef}_s \Phi_s^{s+1} = (-1)^s, \quad s = 0,1,\ldots \tag{41}$$

18. — Să notăm cu $[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j]_m$ funcţia simetrică $\sum a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_j^{\gamma_j}$ relativ la variabilele $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Avem deci

$$[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j]_m = \sum a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \ldots a_j^{\gamma_j} \tag{42}$$

Aici exponenţii $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j$ sunt nişte numere naturale ($j \leqq m$) şi putem, pentru fixarea notaţiilor, să presupunem totdeauna $\gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq \ldots \leqq \gamma_j$.

In cazul când nu este nici o ambiguitate asupra variabilelor ale căror funcţii simetrice vin în considerare, putem nota mai simplu cu $[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j]$ funcţia $[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_j]_m$, suprimând indicele m.

Să considerăm funcţia simetrică

$$\varphi_s^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \tag{43}$$
$$= \sum_{(s)} \left(\frac{B_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{B_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{B_s}{s!}\right)^{\alpha_s} [\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\alpha_1}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{\alpha_2}, \ldots, \underbrace{s, s, \ldots, s}_{\alpha_s}]_m$$

unde însumarea $\sum\limits_{(s)}$ se referă la toate soluţiile în numere întregi nenegative $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ale ecuaţiei $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + s\alpha_s = s$ şi $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s \leqq m$. In particular

$$\varphi_0^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 1,$$

oricare ar fi m.

De altfel în consideraţiile noastre nu vor interveni decât funcţiile (43) în care $s < m$.

Funcţia (43) este un polinom simetric şi omogen de gradul s în $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Avem formula imediată

$$\varphi_s^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{\nu=0}^{s} \frac{B_\nu}{\nu!} a_m^\nu \varphi_{s-\nu}^{(m-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) \tag{44}$$

Dacă nu este ambiguitate asupra variabilelor ale căror funcţii simetrice se consideră, putem nota mai scurt cu φ_s funcţia $\varphi_s^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Putem atunci scrie

$$\varphi_s = \sum_{(s)} \left(\frac{B_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{B_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{B_s}{s!}\right)^{\alpha_s} [\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\alpha_1}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{\alpha_2}, \ldots, \underbrace{s, s, \ldots, s}_{\alpha_s}] \tag{45}$$
$$(\varphi_0 = 1)$$

Deoarece B_ν este nul pentru ν impar şi > 1, în φ_s nu figurează efectiv decât termenii în care $\alpha_i = 0$ pentru i impar şi > 1. Rezultă de aici că dacă s este impar în φ_s nu figurează efectiv decât termeni în care avem $\alpha_1 > 0$.

Din structura funcţiilor (45) rezultă o regulă practică, dată de J. J. Sylvester [2 *b*], pentru formarea funcţiilor φ_s din funcţiile precedente $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$. Pentru aceasta din φ_i ($0 \leqq i \leqq s-1$) luăm numai suma termenilor în care parantezele [ ] nu conţin decât numere $\geqq s-i$. Completăm cu un $s-i$ fiecare din aceste paranteze şi înmulţim rezultatul cu $\frac{B_{s-i}}{(s-i)!}$. Obţinem astfel o sumă φ_i^*. In particular $\varphi_0^* = \frac{B_s}{s!}[s]$. Avem atunci

$$\varphi_s = \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i^* .$$

Dacă acum s este impar avem evident $\varphi_i^* = 0$ dacă i este par şi $< s-1$. Avem însă şi $\varphi_i^* = 0$ dacă i este impar şi $< s-1$ căci atunci în φ_i nu figurează nici un termen cu o paranteză [ ] în care toate numerele să fie $\geqq s-i$. Dacă s este impar avem deci

$$\varphi_s = \varphi_{s-1}^* .$$

Dacă s este par avem evident $\varphi_i^* = 0$ pentru i impar şi $< s-1$. Deasemenea avem $\varphi_i^* = 0$ pentru i par şi $< \frac{s}{2}$ căci atunci nu există în φ_i nici o paranteză [ ] în care să avem numai numere $\geqq s-i$. In cazul lui s par avem deci

$$\varphi_s = \varphi_0^* + \sum_{i=\left[\frac{s-1}{4}\right]+1}^{\frac{s}{2}-1} \varphi_{2i}^* + \varphi_{s-1}^* .$$

Cu ajutorul acestor reguli putem construi succesiv funcţiile φ_s. Dăm mai jos aceste funcţii pentru $s \leqq 9$.

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{2}[1], \quad \varphi_2 = \frac{1}{12}([2] + 3[1,1]),$$

$$\varphi_3 = -\frac{1}{24}([1,2] + 3[1,1,1]),$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{6!}(-[4] + 5[2,2] + 15[1,1,2] + 45[1,1,1,1]),$$

$$\varphi_5 = -\frac{1}{2.6!}(-[1,4] + 5[1,2,2] + 15[1,1,1,2] + 45[1,1,1,1,1]),$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{12.7!}(2[6] - 7[2,4] - 21[1,1,4] + 35[2,2,2] + 105[1,1,2,2] +$$
$$+ 315[1,1,1,1,2] + 945[1,1,1,1,1,1]),$$

$$\varphi_7 = -\frac{1}{3.8!}(2\,[1,6] - 7\,[1,2,4] - 21\,[1,1,1,4] + 35\,[1,2,2,2] + 105\,[1,1,1,2,2] + 315\,[1,1,1,1,1,2] + 945\,[1,1,1,1,1,1,1]),$$

$$\varphi_8 = \frac{1}{10!}(-3\,[8] + 7\,[4,4] + 10\,[2,6] - 35\,[2,2,4] + 30\,[1,1,6] + 175\,[2,2,2,2] - 105\,[1,1,2,4] - 315\,[1,1,1,1,4] + 525\,[1,1,2,2,2] + 1575\,[1,1,1,1,2,2] + 4725\,[1,1,1,1,1,1,2] + 14175\,[1,1,1,1,1,1,1,1]),$$

$$\varphi_9 = -\frac{1}{2.10!}(-3\,[1,8] + 7\,[1,4,4] + 10\,[1,2,6] - 35\,[1,2,2,4] + 30\,[1,1,1,6] + 175\,[1,2,2,2,2] - 105\,[1,1,1,2,4] - 315\,[1,1,1,1,1,4] + 525\,[1,1,1,2,2,2] + 1575\,[1,1,1,1,1,2,2] + 4725\,[1,1,1,1,1,1,1,2] + 14175\,[1,1,1,1,1,1,1,1,1]),$$

. . . .

Cu ajutorul formulei (42) toate parantezele [ ] se pot exprima cu ajutorul funcțiilor simetrice ale variabilelor de care depind funcțiile φ_s.

Dacă facem $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$, avem

$$[\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\alpha_1},\underbrace{2,2,\ldots,2}_{\alpha_2},\ldots,\underbrace{s,s,\ldots,s}_{\alpha_s}]_m = \frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!\,(m-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_s)!}$$

și deducem

$$\varphi_s^{(m)}(1,1,\ldots,1) = $$
$$= \sum_{(s)}\left(\frac{B_1}{1!}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{B_2}{2!}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{B_s}{s!}\right)^{\alpha_s}\frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!\,(m-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_s)!} = \mathrm{coef}_s\,\Phi_s^m$$

Ținând seamă de (41) avem deci

$$\varphi_{m-1}^{(m)}(1,1,\ldots,1) = (-1)^{m-1}, \quad m = 1,2,\ldots \tag{46}$$

formulă care va fi utilizată mai jos.

§ 4.

19. — Să revenim la calculul coeficienților polinomului $R_m(n)$. Prin o simplă identificare se poate stabili, pe baza formulelor (34), identitatea următoare[4])

[4]). Avem

$$x^{j+1-\nu} - (x-a_m)^{j+1-\nu} = \sum_{\mu=0}^{j-\nu}(-1)^{j-\nu-\mu}\binom{j+1-\nu}{\mu}x^\mu a_m^{j+1-\nu-\mu}$$

și membrul al doilea al formulei se scrie

$$x^j = \sum_{\nu=0}^{j}(-1)^\nu\binom{j}{\nu}B_\nu a_m^{\nu-1}\frac{x^{j+1-\nu}-(x-a_m)^{j+1-\nu}}{j+1-\nu}$$

Dând lui x succesiv valorile $n + ia_m$, $i = 1, 2, \ldots, \delta'$ și adunând membru cu membru deducem

$$\sum_{i=1}^{\delta'}(n+ia_m)^j = \sum_{\nu=0}^{j}(-1)^\nu\binom{j}{\nu}B_\nu a_m^{\nu-1}\frac{(n+\delta)^{j+1-\nu}-n^{j+1-\nu}}{j+1-\nu}$$

unde folosim prescurtarea (26).

Presupunând $m > 2$, deducem de aici

$$\sum_{i=1} R_{m-1}(n+ia_m) = \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m-2}A_j^{(m-1)}[a_m\sum_{i=1}^{\delta'}(n+ia_m)^j] =$$
$$= \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m-2}A_j^{(m-1)}\left[\sum_{\nu=0}^{j}(-1)^\nu\binom{j}{\nu}B_\nu a_m^\nu\frac{(n+\delta)^{j+1-\nu}-n^{j+1-\nu}}{j+1-\nu}\right] = \sum_{\nu=1}^{m-2}(-1)^\nu B_\nu a_m^\nu A_\nu^{(m-1)} +$$
$$+ \frac{1}{\delta}\sum_{j=2}^{m-1}\frac{1}{j!}\left[\sum_{\nu=0}^{m-1-j}(-1)^\nu\frac{B_\nu}{\nu!}a_m^\nu(j+\nu-1)!\,A_{j+\nu-1}^{(m-1)}\right][(n+\delta)^j-n^j].$$

Avem apoi

$$R_m(n+\delta)-R_m(n) = \frac{1}{\delta}\sum_{j=1}^{m-1}A_j^{(m)}[(n+\delta)^j-n^j]$$

Identificând în identitatea (27) coeficienții polinoamelor $(n+\delta)^j - n$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, care formează un sistem liniar independent, avem

$$A^{(m)} = \sum_{\nu=1}^{m-2}(-1)^\nu B_\nu a_m^\nu A_\nu^{(m-1)} + H_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}), \tag{47}$$

$$A_j^{(m)} = \frac{1}{j!}\sum_{\nu=0}^{m-1-j}\frac{(-1)^\nu B_\nu}{\nu!}a_m^\nu(j+\nu-1)!\,A_{j+\nu-1}^{(m-1)}, \quad j = 2,3,\ldots,m-1. \tag{48}$$

Dacă $m = 2$ formula (30) se reduce la

$$\sum_{\nu=}^{j}\frac{1}{j+1-\nu}(-1)^\nu\binom{j}{\nu}B_\nu a_m^{\nu-1}\left[\sum_{\mu=0}^{j-\nu}(-1)^{j-\nu-\mu}\binom{j+1-\nu}{\mu}x^\mu a_m^{j+1-\nu-\mu}\right] =$$
$$= \sum_{\mu=0}^{j}\frac{(-1)^{j-\mu}j!}{\mu!(j+1-\mu)!}x^\mu a_m^{j-\mu}\left[\sum_{\nu=0}^{j-\mu}\binom{j+1-\mu}{\nu}B_\nu\right] = x^j$$

deoarece, pe baza formulei (34), suma $\sum_{\nu=0}^{j-\mu}\binom{j+1-\mu}{\nu}B_\nu$ este egală cu 1 resp. cu 0 după cum $\mu = j$ resp. $\mu < j$.

$$R_2(n + a_1 a_2) - R_2(n) = H_1(a_1)$$

iar formulele (47), (48) se reduc la singura formulă

$$A_1^{(2)} = H_1(a_1). \tag{49}$$

Se poate vedea acum că simetria lui $H_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ rezultă din aceea a coeficienților $A_j^{(m)}$. Intr'adevăr din (47) se deduce

$$H_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) = A_1^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, 0). \tag{50}$$

20. — Rezultatul final al calcului coeficienților $A_j^{(m)}$ și a funcției $H_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ se enunță astfel

TEOREMA 2. — *Funcțiile* $A_j^{(m)}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ *de* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *sunt polinoame simetrice și omogene de gradele respective* $m-1-j$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. *Deasemenea* $H_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ *este un polinom simetric și omogen de gradul* $m-2$. *Avem*

$$A_j^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \frac{(-1)^{m-1-j}}{j!}\varphi_{m-1-j}^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_m) \tag{51}$$

$$j = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$H_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) = (-1)^{m-2}\varphi_{m-2}^{(m-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) \tag{52}$$

Demonstrația se face prin inducție completă bazându-ne pe formulele de recurență (47), (48). Pentru aceasta observăm întâi că

$$H_m(1, 1, \ldots, 1) = 1, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{53}$$

Intr'adevăr, în acest caz, din (28) rezultă

$$G_m(0) = H_m(1, 1, \ldots, 1). \tag{54}$$

Insă $N_m(0) = 1$, $R_m(0) = 0$ și din (27) rezultă deci că $G_m(0) = 1$. Ținând seamă de (54) deducem formula (53).

Din formula (49) deducem că $H_1(a_1)$ este independent de a_1, căci trebue să fie o funcție simetrică de a_1 și a_2. $H_1(a_1)$ se reduce deci la o constantă care, pe baza formulei (53), este egală cu 1. Avem

$$A_1^{(2)}(a_1, a_2) = 1, \quad H_1(a_1) = 1.$$

Aceasta însemnează că formulele (51), (52) sunt verificate pentru $m = 2$.

Să presupunem că formulele sunt adevărate pentru $A_j^{(m-1)}$, $j = 1, 2, \ldots, m-2$ $(m > 2)$ și să arătăm că ele vor fi adevărate și pentru $A_j^{(m)}$ $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $H_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$.

Prin ipoteză avem

$$A_j^{(m-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) = \frac{(-1)^{m-2-j}}{j!}\varphi_{m-2-j}^{(m-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$$

Ținând seamă de formulele (44), (48) deducem imediat că formulele (51) sunt verificate pentru $j = 2, 3, \ldots, m-1$. Rămâne să mai stabilim formula (51) pentru $j = 1$. Vom stabili această formulă deodată cu formula (52).

21. — Pentru aceasta ne vom folosi de următoarea

LEMA 7. — *Dacă funcția* $\chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$, *depinzând numai de primele* $m-1$ *variabile* $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$, *este o funcție simetrică de toate cele* m *variabile* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *atunci ea se reduce la o constantă.*

Intâi este clar că funcția $\chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ este simetrică în raport cu cele $m-1$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Deducem apoi, din celelalte condiții de simetrie

$$\chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) = \chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, x_m)$$

și făcând aici $x_m = a$,

$$\chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) = \chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, a), \tag{55}$$

a fiind una din valorile pe care le pot lua variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Formula (55) ne arată că funcția χ nu depinde decât de primele $m-2$ variabile $x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}$. Repetând raționamentul se găsește că funcția χ se reduce la o constantă[5]). Avem deci

$$\chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) = \chi(a, a, \ldots, a). \tag{56}$$

Revenind la problema noastră observăm că, pe baza formulei (44), avem

$$\sum_{\nu=1}^{m-2}(-1)^{\nu} B_{\nu} a_m^{\nu} A_{\nu}^{(m-1)} = (-1)^{m-2}[\varphi_{m-2}^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_m) - \varphi_{m-2}^{(m-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})]$$

Formula (47) ne dă deci

$$A_1^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_m) - (-1)^{m-2}\varphi_{m-2}^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_m) =$$
$$= H_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) - (-1)^{m-2}\varphi_{m-2}^{(m-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$$

Aici membrul al doilea depinde numai de variabilele $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ iar membrul întâi este o funcție simetrică de $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Aplicând lema 7 vedem că ambii membri se reduc la o aceeași constantă. Insă, pe baza formulelor (46), (53), această constantă este egală cu 0. Rezultă că formula (51) pentru $j = 1$ precum și formula (52) sunt adevărate.

---

[5]). Astfel: Din (55) se deduce succesiv

$$\chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, a) = \chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}, a, a)$$
$$\chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}, a, a) = \chi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-4}, a, a, a)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\chi(x_1, a, a, \ldots, a) = \chi(a, a, \ldots, a)$$

de unde formula (56).

Cu aceasta teorema 2 este complet demonstrată.

22. — Formulele (51) permit să calculăm explicit polinomul $R_m(n)$.
Avem

(57) $$R_m(n) = \frac{(-1)^{m-1}}{\delta} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)}{j!} \varphi_{m-1-j}\, n^j$$

unde este clar care sunt variabilele de care depind funcţiile φ_{m-1-j}. Cu aju-
torul tabloului de valori date la Nr. 18 se pot forma explicit polinoamele
$R(n)$ pentru $m = 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$.

§ 5.

23. — Fie ecuaţia (1), la care se vor referi notaţiile prescurtate.
Vom presupune că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt două câte două prime
între ele. Să reluăm formula (27) şi să punem

$$M' = M'(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sup_{(n)} G(n), \quad M'' = M''(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \inf_{(n)} G(n)$$

sup şi inf referindu-se la toate valorile întregi ale lui n. Pe baza perio-
dicităţii şirului $\{G(n)\}$ avem atunci

$$M' = \max_{(n)} G(n) = \max_{n=0,1,\ldots,\delta-1} G(n), \quad M'' = \min_{(n)} G(n) = \min_{n=0,1,\ldots,\delta-1} G(n)$$

max şi min referindu-se la un sistem de δ valori ale lui n formând un
sistem complet de resturi (mod δ).
Avem

LEMA 8. — *Avem inegalitatea*

(58) $$M' - M'' \geqq 0,$$

unde egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$.

Inegalitatea (58) este o consecinţă a definiţiei maximului şi mini-
mului. Rămâne să demonstrăm proprietatea relativă la egalitate.

Condiţia este evident suficientă, căci dacă ea e îndeplinită, avem
$\delta = 1$ şi toate numerele $G(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sunt egale.

Condiţia este necesară. Intr'adevăr, din (18) rezultă şi

$$G(n) = \sum_{i=1}^{m} \Gamma(1;i) + C_1(n)\,.$$

Din $M' = M''$ rezultă că numerele $G(n)$, deci numerele $C_1(n)$, $n = 0, \pm 1,$
$\pm 2, \ldots$ sunt toate egale. Pe baza unei observaţii făcute la Nr. 12, acest
lucru însă nu este posibil decât dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$.

Lema 8 este complet demonstrată.

24. — Putem acum demonstra

TEOREMA 3. — *Condiţia necesară şi suficientă ca problemele I, II,
II′ să aibă o soluţie este ca să avem*

(59) $$M' - M'' < 1.$$

Să demonstrăm teorema pentru problema I.

Condiţia este necesară. Intr'adevăr, fie $P(n)$ o soluţie a problemei.
Atunci

(60) $$P(n) = R(n) + \lambda$$

λ fiind o constantă.

Din (4) şi din (27) deducem

$$G(n) < \lambda + \frac{1}{2}, \quad -G(n) < -\lambda + \frac{1}{2}$$

oricare ar fi n.

Insă există valori n_1, n_2 ale lui n astfel ca $M' = G(n_1)$, $M'' = G(n_2)$.
Avem deci

$$M' < \lambda + \frac{1}{2}, \quad -M'' < -\lambda + \frac{1}{2}.$$

Adunând membru cu membru aceste inegalităţi găsim condiţia (59).

Condiţia este suficientă. Intr'adevăr dacă inegalitatea (59) e verifi-
cată, putem găsi un număr λ astfel ca

(61) $$M' - \frac{1}{2} < \lambda < M'' + \frac{1}{2}.$$

Se verifică atunci imediat că polinomul (60) verifică inegalitatea (4).

La fel se demonstrează teorema pentru problemele II, II′.

Dacă avem (59), toate soluţiile problemei I sunt cuprinse în formula
(60) unde constanta λ verifică inegalităţile (61). Deasemenea dacă avem
(59) toate soluţiile problemei II sunt cuprinse în formula

(62) $$Q(n) = R(n) + \lambda_1$$

unde constanta λ_1 verifică inegalităţile

(63) $$M' \leqq \lambda_1 < M'' + 1$$

şi toate soluţiile problemei II′ sunt cuprinse în formula

(64) $$S(n) = R(n) + \lambda_2$$

unde constanta λ_2 verifică inegalităţile

(65) $$M' - 1 < \lambda_2 \leqq M''.$$

25. — Orice număr λ care verifică inegalităţile (61) este de forma

$$\theta\left(M' - \frac{1}{2}\right) + (1-\theta)\left(M'' + \frac{1}{2}\right) = M'' + \frac{1}{2} - \theta\,(1 - M' + M'')$$

sau de forma

$$(1-\theta)\left(M'-\frac{1}{2}\right)+\theta\left(M''+\frac{1}{2}\right)=M'-\frac{1}{2}+\theta\,(1-M'+M'')$$

unde θ este un număr pozitiv subunitar oarecare.

Rezultă că forma generală a soluţiilor problemei I este (polinomul $R(n)$ fiind presupus normat prin condiţia (32)),

(66) $$P(n)=R(n)+M''+\frac{1}{2}-\theta\,(1-M'+M''); \qquad (0<\theta<1)$$

sau

(66') $$P(n)=R(n)+M'-\frac{1}{2}+\theta\,(1-M'+M'') \qquad (0<\theta<1)$$

La fel se vede că forma generală a soluţiilor problemei II este

(67) $$Q(n)=R(n)+M''+1-\theta_1\,(1-M'+M''), \qquad (0<\theta_1\leq 1)$$

sau

(67') $$Q(n)=R(n)+M'+\theta_2\,(1-M'+M''), \qquad (0\leq\theta_2<1)$$

iar forma generală a soluţiilor problemei II' este

(68) $$S(n)=R(n)+M'-1+\theta_1\,(1-M'+M''), \qquad (0<\theta_1\leq 1)$$

sau

(68') $$S(n)=R(n)+M''-\theta_2\,(1-M'+M''), \qquad (0\leq\theta_2<1)$$

Se vede că problemele II şi II' au soluţiile excepţionale

$$Q(n)=R(n)+M', \quad S(n)=R(n)+M''.$$

Afară de aceste soluţii excepţionale, celelalte soluţii ale problemelor I, II, II' se corespund două câte două astfel încât

(69) $$Q(n)-P(n)=\frac{1}{2},\; P(n)-S(n)=\frac{1}{2}.\; Q(n)-S(n)=1.$$

Cu aceasta legătura dintre soluţiile celor trei probleme este complet clarificată.

26. — Teorema 3 permite să găsim uşor criterii de imposibilitate a problemelor I, II II'.

Astfel, de exemplu, avem

LEMA 9. — *Dacă există două valori n', n'' ale lui n astfel ca*

$$|G(n')-G(n'')|\geq 1,$$

problemele I ,II, II' *nu au soluţii.*

Demonstraţia este imediată căci în condiţiile lemei avem

$$1\leq|G(n')-G(n'')|\leq M'-M''$$

şi e destul să aplicăm teorema 3.

Vom da mai multe aplicaţii ale acestei leme. Deocamdată vom face aici o primă aplicaţie. Presupunând că polinomul $R(n)$ este normat prin condiţia (30), avem totdeauna $N(0)=1$, $R(0)=0$, deci $G(0)=1$. Dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt toate >1 avem evident şi $N(1)=0$, deci $G(1)=-R(1)$. Prin urmare $G(0)-G(1)=1+R(1)$. Rezultă că dacă $R(1)\geq 0$ problemele I, II, II' nu au soluţie.

Insă $R(1)$ este egal cu suma coeficienţilor polinomului $R(n)$ şi, pe baza formulei (57) şi ale formulelor dela Nr. 18, aceşti coeficienţi sunt sigur toţi pozitivi pentru $m=1,2,3,4,5$. Avem deci

TEOREMA 4. — *Dacă $m=1,2,3,4$ sau 5 şi dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sunt toate >1, problemele* I, II, II' *nu au soluţii.*

Proprietatea aceasta este probabil adevărată şi pentru $m>5$. Demonstraţia precedentă nu mai este însă valabilă deoarece coeficientul

$$A^{(\ )}_{m-5}=\frac{1}{(m-1)!}\varphi_4^{(m)}(a_1,a_2,\ldots,a_m)$$

poate să ia şi valori negative[6]).

§ 6.

27. — Să considerăm ecuaţia

(70) $$cx=n,$$

c fiind un număr natural. Suntem deci în cazul $m=1$ şi avem atunci $N(n;c)=1$ sau 0 după cum n se divide sau nu se divide cu c. Pentru a exprima numărul $N(n;c)$ sub o formă convenabilă vom nota în general cu $\left(\frac{n}{q}\,|\,p\right)$ soluţia, *cuprinsă între* 0 *şi* $p-1$, a congruenţei

$$qx\equiv n \pmod p$$

Noi vom presupune totdeauna că p şi q sunt prime între ele. Atunci numărul $\left(\frac{n}{q}\,|\,p\right)$ este în mod unic şi bine determinat.

In particular $(n|p)$ este egal cu restul nenegativ minim al lui n (mod p). Avem evident

(71) $$\left(\frac{n'}{q}\,|\,p\right)=\left(\frac{n''}{q}\,|\,p\right), \quad \text{dacă } n'\equiv n'' \pmod p$$

Avem atunci

LEMA 10. — *Numărul $N(n;c)$ este dat de formula*

(72) $$N(n;c)=\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\left\{\left(\frac{n-u}{u}\,|\,c\right)-\left(\frac{n}{u}\,|\,c\right)\right\}$$

oricare ar fi numărul întreg u prim cu c.

---

6) Aceasta nu înseamnă că pentru anumite valori particulare ale coeficienţilor a_i raţionamentul să nu rămână valabil.

Intr'adevăr, din

$$\left(\frac{n-u}{u}\,\middle|\,c\right)u \equiv n-u \pmod{c},\qquad \left(\frac{n}{u}\,\middle|\,c\right)u \equiv n \pmod{c},$$

în condițiile lemei, rezultă imediat

$$\left(\frac{n-u}{u}\,\middle|\,c\right)-\left(\frac{n}{u}\,\middle|\,c\right) = -1 \text{ sau } c-1 .$$

Al doilea caz are loc dacă și numai dacă sau $c = 1$ sau $c > 1$ și $\left(\frac{n}{u}\,\middle|\,c\right) = 0$, deci numai dacă n se divide cu c.

Lema rezultă imediat.

Rezultatele stabilite până acum se aplică ecuației (70) și problemele I, II, II' se pot complet rezolva în acest caz. Rezultatele sunt banale și este inutil să fie detailate. Avem $N(n;1) = 1$, oricare ar fi n.

28. — Să considerăm acum ecuația

$$bx + cy = n \tag{73}$$

unde b, c sunt două numere naturale *prime între ele*. Suntem aici în cazul $m = 2$. Notațiile prescurtate se vor referi la ecuația (73).

Vom demonstra următoarea

LEMA 11. — *Dacă b, c sunt prime între ele, avem*

$$N(n) = \frac{n}{bc} - \frac{1}{b}\left(\frac{n}{c}\,\middle|\,b\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{n}{b}\,\middle|\,c\right) + 1 \tag{74}$$

oricare ar fi numărul întreg n.

Cu alte cuvinte avem

$$R(n) = \frac{n}{bc},\quad G(n) = -\frac{1}{b}\left(\frac{n}{c}\,\middle|\,b\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{n}{b}\,\middle|\,c\right) + 1 .$$

Prima formulă a mai fost găsită și pe altă cale.

Pe baza formulelor (24), (72), avem

$$N(n+b) - N(n) = N(n+b;c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c}\left\{\left(\frac{n}{b}\,\middle|\,c\right) - \left(\frac{n+b}{b}\,\middle|\,c\right)\right\}$$

Dacă în această formulă înlocuim succesiv pe n cu $n+b$, $n+2b, \ldots$ apoi cu $n-b$, $n-2b, \ldots$ deducem, adunând membru cu membru,

$$N(n+\alpha b) - N(n) = \frac{\alpha}{c} + \frac{1}{c}\left\{\left(\frac{n}{b}\,\middle|\,c\right) - \left(\frac{n+\alpha b}{b}\,\middle|\,c\right)\right\} \tag{75}$$

oricare ar fi numerele întregi n și α.

Pe baza formulei (71), deducem din (75),

$$N(n+\alpha b+\beta c) - N(n+\beta c) = N(n+\alpha b) - N(n),$$

oricare ar fi numerele întregi n, α, β. Făcând $n = 0$ deducem de aici

$$N(\alpha b+\beta c) = [N(\alpha b) - N(0)] + [N(\beta c) - N(0)] + N(0), \tag{76}$$

Dar din (75) deducem, făcând $n = 0$,

$$N(\alpha b) - N(0) = \frac{\alpha}{c} - \frac{1}{c}(\alpha\,|\,c). \tag{77}$$

In mod analog avem

$$N(\beta c) - N(0) = \frac{\beta}{b} - \frac{1}{b}(\beta\,|\,b). \tag{78}$$

Fie acum n un număr întreg oarecare și să determinăm numerele întregi α, β astfel ca să avem

$$n = \alpha b + \beta c .$$

Atunci din $n \equiv \alpha b \pmod{c}$, $n \equiv \beta c \pmod{b}$ rezultă că $(\alpha\,|\,c) = \left(\frac{n}{b}\,\middle|\,c\right)$, $(\beta\,|\,b) = \left(\frac{n}{c}\,\middle|\,b\right)$.

Ținând seamă de $N(0) = 1$ și de formulele (76), (77), (78), deducem formula (74).

Lema 11 este deci demonstrată.

29. — In cazul ecuației (73) putem ușor calcula numerele M', M''. Avem

$$M' = 1,\quad M'' = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1$$

maximul fiind atins când $n \equiv 0 \pmod{bc}$, iar minimul când $n \equiv -b-c \pmod{bc}$.

Se verifică imediat că pentru ca inegalitatea (59) să fie satisfăcută este necesar și suficient ca cel puțin unul din numerele b, c să fie egal cu 1.[7]

Fie deci $b = 1$. Avem atunci $R(n) = \frac{n}{c}$ și $M' - M'' = \frac{c-1}{c} < 1$ așa că rezultatele § precedent permit să enunțăm

TEOREMA 5. — *Numărul $N(n)$ relativ la ecuația $x+cy = n$ este egal oricare ar fi numărul întreg n, cu:*

I. *Intregul cel mai apropiat de numărul* $\frac{2n+c+2\theta}{2c}$, $(0 < \theta < 1)$.

II. *Intregul cuprins în numărul* $\frac{n+c+\theta_2}{c}$, $(0 \leq \theta_2 < 1)$.

II'. *Intregul care cuprinde numărul* $\frac{n+\theta_1}{c}$, $(0 < \theta_1 \leq 1)$.

---

[7]) Inegalitatea (59) revine la $1 < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ care nu poate fi satisfăcută pentru b, $c \geq 2$.

Un enunţ particular simplu este următorul:

Numărul N(n) *relativ la ecuaţia* $x+cy=n$ *este egal cu întregul care cuprinde numărul* $\frac{2n+1}{2c}$, *oricare ar fi numărul întreg* n.

30. — In cazul $m=2$ putem uşor demonstra direct necesitatea condiţiei teoremei 1. Să presupunem că în ecuaţia (73) b şi c sunt două numere naturale oarecari. Fie d c.m.m.d.c. al acestor numere. Atunci $b=db_1$, $c=dc_1$, unde b_1, c_1 sunt două numere naturale prime între ele. Dacă presupunem $d>1$ avem

(79) $$\mathrm{N}(dn+1)=0,\quad \mathrm{N}(dn)=\mathrm{N}(n;b_1,c_1),$$

oricare ar fi numărul întreg n.

Prima egalitate rezultă din faptul că $bx+cy$ se divide cu d oricare ar fi numerele întregi x, y, iar $dn+1$ este prim cu d. A doua egalitate (79) rezultă din faptul că orice soluţie a ecuaţiei $bx+cy=d(b_1x+c_1y)=dn$ este o soluţie a ecuaţiei $b_1x+c_1y=n$ şi reciproc.

Să presupunem acum că problema III ar avea o soluţie R(n).

Prima formulă (79) ne arată atunci că

(80) $$\mathrm{R}(dn+1)=\lambda$$

λ fiind o constantă şi oricare ar fi n.

A doua formulă (79), împreună cu (74), ne arată că

(81) $$\mathrm{R}(dn)=\frac{n}{b_1c_1}+\lambda'$$

λ' fiind o constantă, oricare ar fi n.

Insă din (80) rezultă că $\mathrm{R}(n)=\lambda$ iar din (81) rezultă că $\mathrm{R}(n)=\frac{n}{db_1c_1}+\lambda'$, oricare ar fi n. Ar trebui să avem

$$\lambda=\frac{n}{db_1c_1}+\lambda'$$

oricare ar fi n, ceeace este vizibil imposibil. Proprietatea este deci demonstrată.

§ 7.

31. — Să considerăm acum cazul $m=3$ şi fie deci ecuaţia

(82) $$ax+by+cz=n,$$

a, b, c, fiind trei numere naturale *două câte două prime între ele*. Notaţiile prescurtate se vor referi acum la această ecuaţie.

Pentru a exprima numărul N(n) vom introduce următoarea funcţie

(83) $$(n;q\,|\,p)=\frac{1}{p^2}\sum_{i=0}^{p-1} i(n-qi\,|\,p)$$

unde p, q sunt două numere naturale prime între ele.

Este uşor de văzut că avem

(84) $$(n';q'\,|\,p)=(n'';q''\,|\,p),\ \text{dacă } n'\equiv n'',\ q'\equiv q''\ (\mathrm{mod}\ p)$$

Avem şi formula

(85) $$(n+1;q\,|\,p)-(n;q\,|\,p)=\frac{p-1}{2p}-\frac{1}{p}\left(\frac{n+1}{q}\,|\,p\right)$$

a cărei demonstraţie se face observând că membrul întâi este egal cu

$$\frac{1}{p^2}\sum_{i=0}^{p-1} i\,[(n+1-qi\,|\,p)-(n-qi\,|\,p)]$$

şi că avem

$$(n+1-qi\,|\,p)-(n-qi\,|\,p)=\begin{cases}1, & \text{dacă } qi\not\equiv n+1\ (\mathrm{mod}\ p)\\ -p+1, & \text{dacă } qi\equiv n+1\ (\mathrm{mod}\ p)\end{cases}$$

deoarece numerele $n-qi$, $i=0,1,\ldots,p-1$ formează un sistem complet de resturi (mod p).

Formula (83) se mai poate scrie

$$(n;q\,|\,p)=\frac{1}{p^2}\sum_{i=0}^{p-1} i(nq'-iq'\,|\,p)$$

unde $q'=\left(\frac{1}{q}\,|\,p\right)$. Acest lucru rezultă din faptul că dacă $n-qj\equiv i$ (mod p) vom avea şi $j\equiv nq'-iq'$ (mod p).

Rezultă că avem

(86) $$(n;q\,|\,p)=(n_1;q'\,|\,p),\ \text{dacă } qq'\equiv 1,\ n_1\equiv nq'\quad (\mathrm{mod}\ p).$$

In fine mai observăm că

(87) $$(n;q\,|\,1)=0,$$

oricare ar fi n şi q.

32. — Vom demonstra acum

LEMA 12. — *Dacă* a, b, c *sunt două câte două prime între ele, numărul* N(n), *corespunzător ecuaţiei* (82), *este dat de formula*

(88) $$\mathrm{N}(n)=\mathrm{R}(n)+\mathrm{G}(n)$$

unde

(89) $$\mathrm{R}(n)=\frac{n(n+a+b+c)}{2abc},$$

(90) $$\mathrm{G}(n)=(nc';c'b\,|\,a)-(0;c'b\,|\,a)+(na';a'c\,|\,b)-(0;a'c\,|\,b)+$$
$$+(nb';b'a\,|\,c)-(0;b'a\,|\,c)+1$$

$$a'=\left(\frac{1}{a}\,|\,b\right),\ b'=\left(\frac{1}{b}\,|\,c\right),\ c'=\left(\frac{1}{c}\,|\,a\right)$$ [8]

8) Numerele a', b', c' sunt asociatele numerelor a, b, c, faţă de modulele b, c, a respective.

Pentru demonstrație vom pune și

$$a'' = \left(\frac{1}{a} \mid c\right).\ b'' = \left(\frac{1}{b} \mid a\right),\ c'' = \left(\frac{1}{c} \mid b\right)$$

Pe baza formulelor (24), (74), avem

$$\mathrm{N}(n+c) - \mathrm{N}(n) = \mathrm{N}(n+c;a,b) = \frac{n+c}{ab} - \frac{1}{a}\left(\frac{n+c}{b} \mid a\right) - \frac{1}{b}\left(\frac{n+c}{a} \mid b\right) + 1$$

Insă

$$\left(\frac{n+c}{b} \mid a\right) = \left(\frac{c'n+1}{c'b} \mid a\right),\quad \left(\frac{n+c}{a} \mid b\right) = \left(\frac{c''n+1}{c''a} \mid b\right)$$

și ținând seamă de formula (85) deducem atunci

$$\mathrm{N}(n+c) - \mathrm{N}(n) = \frac{2n+2c+a+b}{2ab} + (c'n+1;c'b \mid a) - (c'n;c'b \mid a) + (c''n+1;c''a \mid b) - (c''n;c''a \mid b)$$

Dacă în această egalitate înlocuim pe n succesiv cu n, $n+c$, $n+2c$, ... și apoi succesiv cu $n-c$, $n-2c$, ..., dacă observăm că i fiind un număr întreg oarecare,

$$c'(n+ic) \equiv c'n + i \pmod a,\quad c''(n+ic) \equiv c''n+i \pmod b$$

și în fine dacă adunăm membru cu membru egalitățile astfel obținute, deducem

$$\mathrm{N}(n+\mu c) - \mathrm{N}(n) = \mu\,\frac{2n+\mu c+a+b+c}{2ab} + (c'n+\mu;c'b \mid a) - (c'n;c'b \mid a) + (c''n+\mu;c''a \mid b) - (c''n;c''a \mid b)$$

oricare ar fi numerele întregi n și μ.

Punând $\mu = ab$, unde α este un număr întreg și ținând seamă de (84), deducem

$$(91)\quad \mathrm{N}(n+\alpha bc) - \mathrm{N}(n) = \alpha\,\frac{2n+\alpha bc+a+b+c}{2a} + (c'n+\alpha b;c'b \mid a) - (c'n;c'b \mid a)$$

oricare ar fi numerele n și α.

Dacă în această formulă înlocuim pe n cu $n+\beta ac$ și ținem seamă iarăși de (84), deducem

$$(92)\quad \mathrm{N}(n+\alpha bc+\beta ca) - \mathrm{N}(n+\alpha bc) - \mathrm{N}(n+\beta ca) + \mathrm{N}(n) = \alpha\beta c,$$

oricare ar fi numerele întregi n, α, β.

Făcând aici $n=0$, obținem

$$(93)\quad \mathrm{N}(\alpha bc+\beta ca) - \mathrm{N}(\alpha bc) - \mathrm{N}(\beta ca) + \mathrm{N}(0) = \alpha\beta c$$

și în mod analog deducem

$$(93')\quad \begin{cases} \mathrm{N}(\beta ca+\gamma ab) - \mathrm{N}(\beta ca) - \mathrm{N}(\gamma ab) + \mathrm{N}(0) = \beta\gamma a, \\ \mathrm{N}(\gamma ab+\alpha bc) - \mathrm{N}(\gamma ab) - \mathrm{N}(\alpha bc) + \mathrm{N}(0) = \gamma\alpha b, \end{cases}$$

oricare ar fi numerele întregi α, β, γ.

Membrul întâi al formulei (92) fiind independent de n deducem, egalând valorile acestei expresii pentru $n=0$ și $n = \gamma ab$,

$$\begin{aligned}(94)\quad \mathrm{N}(\alpha bc+\beta ca+\gamma ab) = {} & [\mathrm{N}(\beta ca+\gamma ab) - \mathrm{N}(\beta ca) - \mathrm{N}(\gamma ab) + \mathrm{N}(0)] + \\ & + [\mathrm{N}(\gamma ab+\alpha bc) - \mathrm{N}(\gamma ab) - \mathrm{N}(\alpha bc) + \mathrm{N}(0)] + \\ & + [\mathrm{N}(\alpha bc+\beta ca) - \mathrm{N}(\alpha bc) - \mathrm{N}(\beta ca) + \mathrm{N}(0)] + \\ & + [\mathrm{N}(\alpha bc) - \mathrm{N}(0)] + [\mathrm{N}(\beta ca) - \mathrm{N}(0)] + [\mathrm{N}(\gamma ab) - \mathrm{N}(0)] + \mathrm{N}(0).\end{aligned}$$

Din (91), făcând $n=0$, deducem

$$(95)\quad \mathrm{N}(\alpha bc) - \mathrm{N}(0) = \alpha\,\frac{\alpha bc+a+b+c}{2a} + (\alpha b;c'b \mid a) - (0;c'b \mid a)$$

și la fel obținem

$$(95')\quad \begin{cases} \mathrm{N}(\beta ca) - \mathrm{N}(0) = \beta\,\dfrac{\beta ca+a+b+c}{2b} + (\beta c;a'c \mid b) - (0;a'c \mid b), \\ \mathrm{N}(\gamma ab) - \mathrm{N}(0) = \gamma\,\dfrac{\gamma ab+a+b+c}{2c} + (\gamma a;b'a \mid c) - (0;b'a \mid c). \end{cases}$$

Ținând seamă de formulele (93), (93′), (95), (95′) și observând că $\mathrm{N}(0) = 1$, formula (94) devine

$$\mathrm{N}(\alpha bc+\beta ca+\gamma ab) = \frac{(\alpha bc+\beta ca+\gamma ab)^2 + (a+b+c)(\alpha bc+\beta ca+\gamma ab)}{2abc} + (\alpha b;c'b \mid a) - (0;c'b \mid a) + (\beta c;a'c \mid b) - (0;a'c \mid b) + (\gamma a;b'a \mid c) - (0;b'a \mid c) + 1$$

Insă n fiind un număr întreg, iar numerele bc, ca, ab, fiind prime între ele, putem totdeauna găsi numerele întregi α, β, γ astfel ca

$$\alpha bc + \beta ca + \gamma ab = n.$$

Avem atunci

$$\alpha b \equiv nc' \pmod a),\quad \beta c \equiv na' \pmod b),\quad \gamma a \equiv nb' \pmod c)$$

și se vede imediat că lema 12 rezultă.

Dacă $a=1$, avem și $a'=a''=1$. Dacă mai observăm că pe baza formulei (86) avem

$$(nb';b'a \mid c) = (na'';a''b \mid c)$$

deducem

$$\mathrm{R}(n;1,b,c) = \frac{n(n+b+c+1)}{2bc},$$

$$\mathrm{G}(n;1,b,c) = (n;c \mid b) - (0;c \mid b) + (n;b \mid c) - (0;b \mid c) + 1$$

In fine pentru $a = b = 1$ vom avea

$$\mathrm{R}(n;1,1,c) = \frac{n(n+c+2)}{2c},$$

$$\mathrm{G}(n;1,1,c) = (n;1 \mid c) - (0;1 \mid c) + 1$$

33. — Înainte de a merge mai departe vom stabili următoarea proprietate a sumelor (83):

LEMA 13. — *Avem formula*

$$(-n-1-q;q\,|\,p) = (n;q\,|\,p)$$

oricare ar fi numărul întreg n.

Pentru a demonstra lema să punem

$$T_n = (n;q\,|\,p) - (-n-1-q;q\,|\,p).$$

Pe baza formulei (85) avem atunci

$$T_{n+1} - T_n = \frac{p-1}{p} - \frac{1}{p}\left[\left(\frac{n+1}{q}\,|\,p\right) + \left(\frac{-n-1-q}{q}\,|\,p\right)\right]$$

Insă din

$$\left(\frac{n+1}{q}\,|\,p\right) q \equiv n+1, \quad \left(\frac{-n-1-q}{q}\,|\,p\right) q \equiv -n-1-q \pmod p$$

deducem

$$\left(\frac{n+1}{q}\,|\,p\right) + \left(\frac{-n-1-q}{q}\,|\,p\right) \equiv -1 \pmod p$$

de unde

$$\left(\frac{n+1}{q}\,|\,p\right) + \left(\frac{-n-1-q}{q}\,|\,p\right) = p-1.$$

Avem prin urmare $T_{n+1} = T_n$ oricare ar fi n şi rezultă de aici că

(96)
$$T_n = T_0$$

Vom arăta acum că

(97)
$$T_0 = 0.$$

Pentru aceasta avem, ţinând seamă de (85),

$$T_0 = (0;q\,|\,p) - (-1-q;q\,|\,p) = (0;q\,|\,p) - (-q;q\,|\,p) + [(-q;q\,|\,p) - (-1-q;q\,|\,p)] = (0;q\,|\,p) - (-q;q\,|\,p) + \frac{p-1}{2p} - \frac{1}{p}\left(\frac{-q}{q}\,|\,p\right) =$$

$$= (0;q\,|\,p) - (-q;q\,|\,p) - \frac{p-1}{2p}.$$

Dar

$$(0;q\,|\,p) - (-q;q\,|\,p) = \frac{1}{p^2}\sum_{i=0}^{p-1} i(-qi\,|\,p) - \frac{1}{p^2}\sum_{i=0}^{p-1} i(-q(i+1)\,|\,p) =$$

$$= \frac{1}{p^2}\sum_{i=0}^{p-1}(-qi\,|\,p) = \frac{p-1}{2p}$$

căci $-qi$, $i = 0,1,\dots,p-1$ formează un sistem complect de resturi (mod p).

Formula (97) rezultă, iar din (96) rezultă atunci că $T_n = 0$, oricare ar fi n şi lema 13 este demonstrată.

34. — Să revenim la problema noastră. Vom demonstra următoarea

TEOREMA 6. — *Funcţia G(n), periodică şi de perioadă abc, este simetrică faţă de centrul de simetrie* $-\frac{a+b+c}{2}$ [9]).

Bineînţeles că funcţia $G(n)$ are, din cauza periodicităţii, o infinitate de centre de simetrie.

Teorema se exprimă prin egalitatea

$$G(-a-b-c+1-k) = G(k-1),$$

oricare ar fi numărul întreg k, sau prin alte egalităţi analoage.

Pe baza formulei (90) este destul să demonstrăm proprietatea pentru fiecare din funcţiile

(98)
$$(nc';c'b\,|\,a), \quad (na';a'c\,|\,b), \quad (nb';b'a\,|\,c).$$

Pentru prima din aceste funcţii proprietatea revine la egalitatea

$$(c'(k-1);c'b\,|\,a) = (-c'(k-1)-1-c'b;c'b\,|\,a)$$

care este adevărată pe baza lemei 13. La fel se demonstrează proprietatea pentru celelalte două funcţii (98).

Teorema 6 este deci demonstrată.

35. Rezultatele precedente se pot încă preciza.

Dacă o funcţie este periodică de perioadă δ şi dacă are un centru de simetrie n_0, orice punct congruent cu n_0 $\left(\bmod \frac{\delta}{2}\right)$ este un centru de simetrie.

Rezultă din teorema 6 că pentru funcţia $G(n)$ punctul $\nu = \frac{abc-a-b-c}{2}$ este un centru de simetrie. Numerele a, b, c fiind două câte două prime între ele, cel mult unul din ele este par astfel că numărul ν este totdeauna întreg.

Rezultă aşa dar că avem

$$G(\nu+k) = G(\nu-k)$$

oricare ar fi numărul întreg k.

Formula (89) ne dă însă

$$R(\nu+k) - R(\nu-k) = k.$$

---

[9]) funcţia $f(x)$ este simetrică faţă de centrul de simetrie x_0 dacă avem, pentru orice x,

$$f(x_0+x) = f(x_0-x).$$

Avem deci

$$\mathrm{N}(\nu+k)-\mathrm{N}(\nu-k)=k, \tag{99}$$

oricare ar fi numărul întreg k.

Dacă n este negativ și $>-a-b-c$ avem $\mathrm{N}(n)=0$, după cum rezultă din definiția numărului $\mathrm{N}(n)$. Din (99) rezultă deci

$$\mathrm{N}(2\nu+i)=\nu+i,\quad i=1,2,\ldots,a+b+c-1.$$

Ținând seamă de formulele (88) și (89) și făcând calculele găsim

$$\mathrm{G}(2\nu+i)=\frac{i(a+b+c-i)}{2abc},\quad i=1,2,\ldots,a+b+c-1\ . \tag{100}$$

Șirul

$$\mathrm{G}(0),\ \mathrm{G}(1),\ldots,\mathrm{G}(abc-1)$$

care formează o perioadă a șirului $\{\mathrm{G}(n)\}$ se desparte deci în două secțiuni

$$\mathrm{G}(0),\quad \mathrm{G}(1),\ldots,\mathrm{G}(2\nu), \tag{101}$$

$$\mathrm{G}(2\nu+1),\ \mathrm{G}(2\nu+2),\ldots,\mathrm{G}(abc-1) \tag{102}$$

fiecare fiind simetric în sensul că termenii egal depărtați de extremi sunt egali. Mai mult încă formula (100) ne arată că șirul (102) este constituit de valorile unui polinom de gradul al doilea (are diferența a treia nulă).

In cazul particular $2\nu<0$, care are loc dacă și numai dacă cel puțin două din numerele a, b, c sunt egale cu 1[10]), șirul (101) dispare și rămâne numai șirul simetric (102). In acest caz de altfel $\nu=-1$.

36. — Pentru a încheia acest § vom da o demonstrație directă necesității condiției din teorema 1 în cazul particular $m=3$.

Vom presupune acum că în ecuația (82) a, b, c sunt trei numere naturale oarecare.

Se știe că numerele a, b, c, se pot totdeauna scrie sub forma [6]

$$a=db_1c_1a_2,\quad b=dc_1a_1b_2,\quad c=da_1b_1c_2,$$

unde $d, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sunt 7 numere naturale astfel că:

1° a_1, b_1, c_1 sunt două câte două prime între ele,

2° a_2, b_2, c_2 sunt două câte două prime între ele,

3° perechile $a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ c_1, c_2$ sunt grupe de două numere prime între ele.

Numărul d este c.m.m.d.c. al numerelor a, b, c iar dc_1, da_1, db_1 sunt respectiv c.m.m.d.c. al grupelor de câte două numere $a, b;\ b, c;\ c, a$.

---

10) Inegalitatea $2\nu<0$ revine la (*) $1<\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$. Dacă cel puțin două din numerele a, b, c sunt >1 avem, fixând convenabil notațiile, $a\geqq 1$, $b\geqq 2$, $c\geqq 3$, de unde $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\leqq 1$, care contrazice inegalitatea (*).

Condiția necesară și suficientă ca numerele a, b, c să fie două câte două prime între ele este ca să avem $d=a_1=b_1=c_1=1$.

Să presupunem că această condiție nu este îndeplinită dar că ar exista o soluție $\mathrm{R}(n)$ a problemei III. Distingem atunci două cazuri:

1°. $d>1$. In acest caz, ca la Nr. 30, se vede că

$$\mathrm{N}(da_1b_1c_1n+1)=0, \tag{103}$$

oricare ar fi n.

Avem însă și

$$\mathrm{N}(da_1b_1c_1n)=\mathrm{N}(n;a_2,b_2,c_2). \tag{104}$$

Intr'adevăr, orice soluție a ecuației

$$ax+by+cz=d(b_1c_1a_2x+c_1a_1b_2y+a_1b_1c_2z)=da_1b_1c_1n$$

este o soluție a ecuației

$$b_1c_1a_2x+c_1a_1b_2y+a_1b_1c_2z=a_1b_1c_1n \tag{105}$$

și reciproc. Avem deci

$$\mathrm{N}(da_1b_1c_1n)=\mathrm{N}(a_1b_1c_1n;b_1c_1a_2,\ c_1a_1b_2,\ a_1b_1c_2). \tag{106}$$

Dar dacă avem (105), numerele întregi x, y, z sunt respectiv divizibile cu a_1, b_1, c_1, pe baza proprietăților semnalate ale numerelor $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. Rezultă că soluțiile ecuației

$$b_1c_1a_2x+c_1a_1b_2y+a_1b_1c_2z=a_1b_1c_1(a_2x'+b_2y'+c_2z')=a_1b_1c_1n$$

corespund biunivoc cu soluțiile ecuației $a_2x+b_2y+c_2z=n$. Avem prin urmare

$$\mathrm{N}(a_1b_1c_1n;b_1c_1a_2,\ c_1a_1b_2,\ a_1b_1c_2)=\mathrm{N}(n;a_2,b_2,c_2) \tag{107}$$

Formula (104) rezultă din (106) și (107).

Din formulele (103) și (104) deducem respectiv

$$\mathrm{R}(da_1b_1c_1n+1)=\lambda, \tag{108}$$

$$\mathrm{R}(da_1b_1c_1n)=\frac{n(n+a_2+b_2+c_2)}{2a_2b_2c_2}+\lambda' \tag{109}$$

oricare ar fi n, iar λ, λ' fiind constante.

Dar din (108) rezultă $\mathrm{R}(n)=\lambda$ iar din (109) rezultă $\mathrm{R}(n)=\frac{dn(n+aa_1+bb_1+cc_1)}{2abc}+\lambda'$. Ar trebui deci să avem

$$\lambda=\frac{dn(n+aa_1+bb_1+cc_1)}{2abc}+\lambda'$$

oricare ar fi n, ceea ce este vizibil imposibil.

2°. $d=1$. In acest caz cel puțin unul dintre numerele a_1, b_1, c_1

este > 1. Fie, pentru fixarea notaţiilor, $c_1 > 1$. Pentru simplificarea discuţiei putem presupune n pozitiv.

Un raţionament analog cu cel de mai sus ne arată că

$$N(a_1b_1c_1n+a_1b_1c_2) = N(nc_1+c_2;c_1a_2, c_1b_2, c_2)$$

Insă dacă avem

$$c_1a_2x+c_1b_2y+c_2z=c_1n+c_2$$

trebue ca $z-1$ să se dividă cu c_1, căci c_1, c_2 sunt prime între ele.
Să presupunem că

(110)
$$z = 1 + c_1 t$$

atunci

$$a_2x+b_2y+c_2t = n.$$

Deoarece $c_1 > 1$, din (110) se vede că numerele z, t sunt totdeauna ambele pozitive sau nule. Rezultă printr'un raţionament simplu că

$$N(nc_1+c_2;c_1a_2, c_1b_2, c_2) = N(n;a_2, b_2, c_2).$$

In definitiv deci

(111)
$$N(a_1b_1c_1n+a_1b_1c_2) = N(n;a_2,b_2,c_2).$$

Din formulele (104) ($d=1$) şi (111) deducem

$$R(a_1b_1c_1n+a_1b_1c_2) = \frac{n(n+a_2+b_2+c_2)}{2a_2b_2c_2} + \lambda$$

$$R(a_1b_1c_1n) = \frac{n(n+a_2+b_2+c_2)}{2a_2b_2c_2} + \lambda'$$

deci

$$R(n) = \frac{(n-c)\,(n-c+aa_1+bb_1+cc_1)}{2abc} + \lambda,$$

$$R(n) = \frac{n(n+aa_1+bb_1+cc_1)}{2abc} + \lambda'$$

prin urmare

$$\frac{n(n+aa_1+bb_1+cc_1)}{2abc} + \lambda' = \frac{(n-c)\,(n-c+aa_1+bb_1+cc_1)}{2abc} + \lambda,$$

oricare ar fi n iar λ, λ' fiind nişte constante. Este uşor de văzut că acest lucru este imposibil.

Cu aceasta proprietatea urmărită este complet demonstrată.

§ 8.

37. — Ne vom ocupa acum de rezolvarea problemelor I, II, II' în cazul $m=3$. Am văzut că este suficient să presupunem că unul din coeficienţi este egal cu 1. Fie deci ecuaţia

(112)
$$x + by + cz = n,$$

unde, cum am văzut, putem presupune numerele b, c prime între ele.

Pentru fixarea notaţiilor vom presupune $b \leq c$. Atunci avem sau $b=c=1$ sau $b < c$. Notaţiile prescurtate se vor referi acum la ecuaţia (112),

38. — Să presupunem întâi că $b=1$. Pe baza celor stabilite mai sus avem atunci

$$\nu = -1, \quad G(i-2) = \frac{i(c+2-i)}{2c}, \quad i = 1, 2, \ldots, c+1$$

$$M' = \max_{i=0,1,\ldots,c-1} \{G(i)\}, \qquad M'' = \min_{i=0,1,\ldots,c-1} \{G(i)\}$$

Calculul lui M' şi M'' se face uşor observând că $G(n)$, pentru valorile considerate ale lui n este un polinom de gradul al doilea şi că un polinom de gradul al doilea este o funcţie convexă sau concavă simetrică în raport cu punctul său de extremum relativ ca centru de simetrie. Un astfel de calcul va fi repetat de mai multe ori în cele ce urmează.

Făcând calculele găsim

$$M' = \begin{cases} \dfrac{(c+2)^2}{8c}, & \text{pentru } c \text{ par} \\ \dfrac{(c+1)\,(c+3)}{8c}, & \text{pentru } c \text{ impar} \end{cases}$$

$$M'' = \frac{c+1}{2c}$$

deci

$$M' - M'' = \begin{cases} \dfrac{c}{8}, & \text{pentru } c \text{ par,} \\ \dfrac{c^2-1}{8c}, & \text{pentru } c \text{ impar} \end{cases}$$

Se vede că problemele I, II, II' au soluţii dacă şi numai dacă $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Rezultatul final va fi enunţat mai jos.

39. — Să presupunem acum că $b > 1$. Avem atunci neapărat $b < c$ şi $\nu \geq 0$.

Dacă punem

$$M'_1 = \max_{i=0,1,\ldots,\nu} \{G(i)\}, \qquad M''_1 = \min_{i=0,1,\ldots,\nu} \{G(i)\}$$

$$M'_2 = \max_{i=1,2,\ldots,b+c} \{G(2\nu+i)\} \qquad M''_2 = \min_{i=1,2,\ldots,b+c} \{G(2\nu+i)\}$$

vom avea

(113)
$$M' = \max\,\{M'_1, M'_2\}, \qquad M'' = \min\,\{M''_1, M''_2\}$$

Am obţinut astfel nişte formule care vor servi la calculul efectiv al extremelor M', M''.

Numerele M_2', M_2'' se calculează ca la Nr. 38, folosind formula (100), în care punem $a=1$.

Un calcul simplu ne dă

$$(114)\qquad M_2' = \begin{cases} \dfrac{(b+c+1)^2}{8bc}, & \text{dacă } b, c \text{ sunt de paritate diferită,} \\[2ex] \dfrac{(b+c)(b+c+2)}{8bc}, & \text{dacă } b, c \text{ sunt ambele impare} \end{cases}$$

$$M_2'' = \frac{b+c}{2bc}$$

Calculul numerelor M_1', M_1'' se poate simplifica pe baza următoarei

LEMA 14. — *Dacă* $0 \leqq n < bc$, *avem* $0 \leqq \mathrm{N}(n;b,c) \leqq 1$.

Prima inegalitate este evidentă. Este destul să demonstrăm deci a doua inegalitate. Această inegalitate înseamnă că ecuația $bx+cy = n$, pentru $0 \leqq n < bc$ are cel mult o soluție în numere întregi nenegative. Să presupunem contrarul și fie atunci x, y; x', y' două soluții ale acestei ecuații. Avem $bx+cy = bx'+cy' < bc$ de unde

$$0 \leqq x, x' < c, \qquad 0 \leqq y, y' < b$$

$$x \equiv x' \pmod{c}, \qquad y \equiv y' \pmod{b}$$

care atrage după sine $x = x'$, $y = y'$.

Lema 14 este deci demonstrată.

Dacă acum ținem seamă de:

1°. Inegalitatea $\nu < bc-1$,

2°. Lema 14,

3°. Formula

$$(115)\qquad \mathrm{N}(n+1) - \mathrm{N}(n) = \mathrm{N}(n+1;b,c),$$

4°. Faptul că polinomul $\mathrm{R}(n) = \dfrac{n(n+b+c+1)}{2bc}$ este crescător pentru $n \geqq 0$,

găsim imediat

$$(116)\qquad M_1' = \max_{0 \leqq bx+cy \leqq \nu} \{\mathrm{G}(bx+cy)\}, \quad M_1'' = \min_{0 \leqq bx+cy-1 \leqq \nu} \{\mathrm{G}(bx+cy-1)\}$$

unde x, y parcurg toate valorile întregi nenegative posibile.

In aplicații $\mathrm{G}(n)$ se calculează din formula $\mathrm{G}(n) = \mathrm{N}(n) - \mathrm{R}(n)$, evaluând direct pe $\mathrm{N}(n)$. Vom face mai jos astfel de aplicații.

40. — Fie s câtul și r restul împărțirii lui c prin b. Deci $c = sb+r$, $0 < s$, $0 < r < b$ iar r este prim cu b.

Dacă $0 \leqq n < c$, ecuația (112) nu poate să fie satisfăcută decât pentru $z = 0$, iar necunoscuta y ia atunci valorile $0, 1, \ldots, \left[\dfrac{n}{b}\right]$. Rezultă deci că

$$\mathrm{N}(n) = \mathrm{N}(n;1,b), \text{ dacă } 0 \leqq n < c.$$

Insă

$$(117)\qquad \mathrm{N}(n;1,b) = \left[\frac{n}{b}\right] + 1,$$

oricare ar fi n.

Avem prin urmare

$$(118)\qquad \mathrm{N}(n) = \left[\frac{n}{b}\right] + 1, \text{ dacă } 0 \leqq n < c.$$

Din această formulă rezultă că $\mathrm{N}((s-1)b) = \mathrm{N}(sb-1) = s$ și un calcul elementar ne arată că

$$M' - M'' \geqq \mathrm{G}\left((s-1)b\right) - \mathrm{G}(sb-1) = \mathrm{R}(sb-1) - \mathrm{R}\left((s-1)b\right) = \\ = \frac{3sb(b-1)+r(b-1)}{2b(sb+r)}.$$

Problemele I, II, II′ nu vor avea nici o soluție dacă acest raport este $\geqq 1$. O condiție necesară pentru ca aceste probleme să aibă o soluție este deci ca acest raport să fie < 1, condiție care se poate scrie sub forma $sb(b-3) - r(b+1) < 0$ sau

$$(119)\qquad \frac{sb(b-3)}{b+1} < r.$$

Pentru a găsi o altă delimitare să luăm $n = (s+1)b$. In acest caz ecuația (112) nu poate să fie satisfăcută decât dacă $z = 0$ sau 1. Rezultă, ținând seamă de (117), că

$$\mathrm{N}\left((s+1)b\right) = \mathrm{N}\left((s+1)b;1,b\right) + \mathrm{N}(b-r;1,b) = s+3.$$

Avem atunci

$$M' \geqq \mathrm{G}\left((s+1)b\right) = s+3 - \frac{(s+1)b\,[2(s+1)b + r + 1]}{2b(sb+r)}.$$

Pe de altă parte, pe baza formulelor (113) și (114), avem

$$M'' \leqq M_2'' = \frac{(s+1)b+r}{2b(sb+r)}.$$

Rezultă că

$$M' - M'' \geqq \frac{2b\,[(s-1)b - s + 1] + r\,[(s+5)b - 1]}{2b(sb+r)}.$$

de unde, procedând ca mai sus, se deduce o a doua condiție necesară pentru posibilitatea problemelor I, II, II′, condiție care se scrie

$$-2b(b+s+1) + r\,[(s+3)\,b - 1] < 0,$$

sau

$$(120)\qquad r < \frac{2b(b+s+1)}{(s+3)\,b-1}.$$

Din inegalitățile (119), (120), ținând seamă de valorile posibile ale lui b, r şi s se deduc valorile lui b, c care satisfac ambele aceste inegalităţi. Numai în aceste cazuri problemele I, II, II' pot avea soluţii.

Făcând această discuţie care nu prezintă nici o dificultate, găsim că problemele I, II, II' pot avea soluţii numai în următoarele 9 cazuri:

Tabloul 1.

Cazul	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
b	2	3	3	4	4	5	5	7	8
c	$2s+1$	$3s+1$	$3s+2$	5	7	7	8	11	13

Vom discuta mai departe aceste 9 cazuri. Această discuţie se bazează pe determinarea efectivă a numerelor M', M''.

41. 1. — *Cazul* I. Avem $\nu = s-1$, s fiind un număr natural. Pe baza formulelor (116) avem

$$(121) \quad M_1' = \max_{i=0,1,\dots,\left[\frac{s-1}{2}\right]} \{G(2i)\}, \quad M_1'' = \min_{i=1,2,\dots,\left[\frac{s}{2}\right]} \{G(2i-1)\}$$

Ţinând seamă de (118) găsim

$$G(2i) = i+1 - \frac{i(i+s+2)}{2s+1} = \frac{i(s-1-i)+2s+1}{2s+1}, \quad i = 0, 1, \dots, \left[\frac{s-1}{2}\right]$$

$$G(2i-1) = i - \frac{(2i-1)(2i+2s+3)}{4(2s+1)} = \frac{4i(s-i)+2s+3}{4(2s+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, \left[\frac{s}{2}\right].$$

Un calcul direct ne dă atunci

$$M_1' = \begin{cases} \dfrac{s^2+6s+5}{4(2s+1)}, & \text{pentru } s \text{ impar}, \\ \dfrac{s^2+6s+4}{4(2s+1)}, & \text{pentru } s \text{ par}, \end{cases}$$

$$M_1'' = \frac{6s-1}{4(2s+1)}.$$

Pe baza formulelor (114) avem

$$M_2' = \frac{(s+2)^2}{4(2s+1)}, \qquad M_2'' = \frac{2s+3}{4(2s+1)}.$$

Se vede uşor că $M_1' > M_2'$, $M_1'' \geqq M_2''$. Rezultă deci $M' = M_1''$, $M'' = M_2''$.

Este de observat că acest rezultat rămâne valabil şi pentru $s=1$ deşi în acest caz a doua formulă (121) nu există. Dacă însă $s=1$, avem $M' = M_1'' = G(0) = 1$.

In definitiv

$$M' - M'' = \begin{cases} \dfrac{s^2+4s+2}{4(2s+1)}, & \text{dacă } s \text{ este impar}, \\ \dfrac{s^2+4s+1}{4(2s+1)}, & \text{dacă } s \text{ este par}. \end{cases}$$

Se verifică imediat că problemele I, II, II' au soluţii dacă şi numai dacă $s = 1, 2, 3, 4$.

41. 2. — *Cazul* II. Avem $\nu = 3s-1$. Procedând ca mai sus avem

$$M_1' = \max_{i=0,1,\dots,s-1} \{G(3i)\}, \qquad M_1'' = \min_{i=1,2,\dots,s} \{G(3i-1)\}$$

unde

$$G(3i) = i+1 - \frac{i(3i+3s+5)}{2(3s+1)} = \frac{3i(s-1-i)+2(3s+1)}{2(3s+1)}, \quad i = 0, 1, \dots, s-1,$$

$$G(3i-1) = i - \frac{(3i-1)(3i+3s+4)}{6(3s+1)} = \frac{3i(3s-1-3i)+3s+4}{6(3s+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

de unde

$$M_1' = \begin{cases} \dfrac{3s^2+18s+11}{8(3s+1)}, & \text{dacă } s \text{ este impar}, \\ \dfrac{3s^2+18s+8}{8(3s+1)}, & \text{dacă } s \text{ este par}, \end{cases}$$

$$M_1'' = \frac{2}{3(3s+1)}.$$

Avem deasemenea

$$M_2' = \begin{cases} \dfrac{(3s+5)^2}{24(3s+1)}, & \text{dacă } s \text{ este impar}, \\ \dfrac{(s+2)(3s+4)}{8(3s+1)}, & \text{dacă } s \text{ este par}, \end{cases}$$

$$M_2'' = \frac{3s+4}{6(3s+1)}$$

Se vede uşor că $M_1' > M_2'$, $M_2'' > M_1''$ aşa că $M' = M_1'$, $M'' = M_1''$ şi deducem

$$M' - M'' = \begin{cases} \dfrac{9s^2+54s+17}{24(3s+1)}, & \text{dacă } s \text{ este impar}, \\ \dfrac{9s^2+54s+8}{24(3s+1)}, & \text{dacă } s \text{ este par}, \end{cases}$$

Problemele I, II, II' au soluţii dacă şi numai dacă $s = 1, 2$.

41. 3. — *Cazul* III. Avem $\nu = 3s$ şi procedând ca la cazul II,

$$M_1' = \max_{i=0,1,\dots,s} \{G(3i)\}, \quad M_1'' = \min_{i=1,2,\dots,s} \{G(3i-1)\}$$

unde

$$G(3i) = i+1 - \frac{3i(i+s+2)}{2(3s+2)} = \frac{i(3s-2-3i)+2(3s+2)}{2(3s+2)}, \quad i = 0, 1, \dots, s,$$

$$G(3i-1) = i - \frac{(3i-1)(3i+3s+5)}{6(3s+2)} = \frac{9i(s-i)+3s+5}{6(3s+2)}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Deducem de aici

$$M_1' = \begin{cases} \dfrac{3s^2+20s+16}{8(3s+2)}, & \text{dacă } s \text{ este par,} \\[2mm] \dfrac{3s^2+20s+17}{8(3s+2)}, & \text{dacă } s \text{ este impar,} \end{cases}$$

$$M_1'' = \frac{3s+5}{6(3s+2)}.$$

Avem deasemenea

$$M_2 = \begin{cases} \dfrac{3(s+2)^2}{8(3s+2)}, & \text{dacă } s \text{ este par,} \\[2mm] \dfrac{(3s+5)(3s+7)}{24(3s+2)}, & \text{dacă } s \text{ este impar,} \end{cases}$$

$$M_2'' = \frac{3s+5}{6(3s+2)}.$$

Se vede că $M_1' > M_2'$, $M_1'' = M_2''$, deci $M' = M_1'$ $M'' = M_1$ şi deducem

$$M' - M'' = \begin{cases} \dfrac{9s^2+48s+28}{24(3s+2)}, & \text{dacă } s \text{ este par,} \\[2mm] \dfrac{9s^2+48s+31}{24(3s+2)}, & \text{dacă } s \text{ este impar.} \end{cases}$$

Problemele I, II, II′ au soluţii dacă şi numai dacă $s = 1, 2, 3$.

41. 4. — *Cazurile* IV—IX. Aceste 6 cazuri le putem trata împreună. Calculând pe M_1' M_1'' găsim următoarele valori

Tabloul 2.

Cazul	IV	V	VI	VII	VIII	IX
M′	$\frac{9}{8}$	$\frac{8}{7}$	1	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{14}{13}$
M″	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{5}{77}$	$-\frac{1}{26}$

Pentru a arăta cum se obţine acest tablou va fi suficient să executăm calculele într'unul din cazuri. Vom alege pentru aceasta cazul IX. Avem atunci $\nu = 41$ şi $R(n) = \dfrac{n(n+22)}{208}$. Pentru calcularea numerelor M_1', M_1'' folosim formulele (116). Numerele întregi nenegative de forma $8x+13y$ care verifică inegalităţile $0 \leq 8x+13y \leq 41$ sunt

0, 8, 13, 16, 21, 24, 26, 29, 32, 34, 37, 39, 40.

Pe baza lemei 14 şi a formulei (115), valorile lui $N(n)$ pentru aceste valori succesive ale lui n sunt numerele naturale consecutive dela 1 până la 13 inclusiv. Pe baza formulei $G(n) = N(n) - R(n)$ obţinem valorile lui $G(n)$ pentru valorile lui n care intervin în determinarea lui M_1'. Obţinem astfel următorul

Tabloul 3.

n	0	8	13	16	21	24	26	29	32	34	37	39	40
$N(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$R(n)$	0	$\frac{15}{13}$	$\frac{35}{16}$	$\frac{38}{13}$	$\frac{903}{208}$	$\frac{69}{13}$	6	$\frac{1479}{208}$	$\frac{108}{13}$	$\frac{119}{13}$	$\frac{2183}{208}$	$\frac{183}{16}$	$\frac{155}{13}$
$G(n)$	1	$\frac{11}{13}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{137}{208}$	$\frac{9}{13}$	1	$\frac{185}{208}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{11}{13}$	$\frac{105}{208}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{14}{13}$

Rezultă de aici că $M_1' = \dfrac{14}{13}$.

Pentru a determina pe M_1'' observăm că numerele întregi nenegative de forma $8x+13y-1$ care verifică inegalităţile $0 \leq 8x+13y-1 \leq 41$ sunt

7, 12, 15, 20, 23, 25, 28, 31, 33, 36, 38, 39, 41.

Pentru aceleaşi motive ca mai sus, valorile lui $N(n)$ pentru aceste valori succesive ale lui n sunt numerele naturale consecutive dela 1 până la 13 inclusiv. Obţinem astfel

Tabloul 4.

n	7	12	15	20	23	25	28	31	33	36	38	39	41
$N(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$R(n)$	$\frac{203}{208}$	$\frac{51}{26}$	$\frac{555}{208}$	$\frac{105}{26}$	$\frac{1035}{208}$	$\frac{1175}{208}$	$\frac{175}{26}$	$\frac{1643}{208}$	$\frac{1815}{208}$	$\frac{261}{26}$	$\frac{285}{26}$	$\frac{183}{16}$	$\frac{2583}{208}$
$G(n)$	$\frac{5}{208}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{69}{288}$	$-\frac{1}{26}$	$\frac{5}{208}$	$\frac{73}{208}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{21}{208}$	$\frac{57}{208}$	$-\frac{1}{26}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{121}{208}$

Rezultă de aici că $M_1'' = -\frac{1}{26}$.

Revenind la tabloul 1, vedem că în cazurile IV, V, VIII, IX avem $M_1' - M_1'' > 1$ şi deci cu atât mai mult $M' - M'' > 1$. In aceste cazuri problemele I, II, II' nu au nici o soluţie.

Rămân încă de examinat mai departe cazurile VI, VII. Formulele (114) ne dau

Tabloul 5.

Cazul	M_2'	M_2''
VI	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{35}$
VII	$\frac{49}{80}$	$\frac{13}{80}$

Rezultă, comparând cu tabloul 1, că

în cazul VI : $M' = 1$, $M'' = \frac{1}{35}$, $M' - M'' = \frac{34}{35} < 1$,

în cazul VII : $M' = 1$, $M'' = \frac{1}{10}$, $M' - M'' = \frac{9}{10} < 1$.

In aceste cazuri problemele I, II, II' au deci soluţii.

In definitiv avem deci:

TEOREMA 7. — *In cazul $m = 3$ problemele I, II, II' au soluţii în şi numai în următoarele 18 cazuri, numerotate dela 1° la 18°.*

Tabloul 6.

Cazul	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
b şi c	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	2,3	2,5

Cazul	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°
b şi c	2,7	2,9	3,4	3,7	3,5	3,8	3,11	5,7	5,8

In toate cazurile unul cel puţin din coeficienţii ecuaţiei (1) este egal cu 1, iar ceilalţi doi coeficienţi b şi c sunt daţi în tabloul 6 alăturat.

42. — Vom da şi soluţiile problemelor I, II, II' în cele 18 cazuri 1° — 18° puse în evidenţă.

In tabloul următor figurează valorile lui M', M'', M' — M'' şi ale polinomului R(n) sub forma $\frac{n(n+b+c+1)}{2bc}$. Polinoamele P(n), Q(n), S(n) se pot obţine sub forma $R(n) + \frac{\lambda}{2bc}$ iar în tablou este dat intervalul de variaţie a lui λ pentru cele trei polinoame.

Tabloul 7.

Cazul	M'	M''	M'—M''	R(n)	interv. de var. al lui λ pentru		
					P(n)	Q(n)	S(n)
1°	1	1	0	$\frac{n(n+3)}{2}$	(1,3)	[2,4)	(0,2]
2°	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{n(n+4)}{4}$	(2,5)	[4,7)	(0,3]
3°	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{n(n+5)}{6}$	(3,7)	[6,10)	(0,4]
4°	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{n(n+6)}{8}$	(5,9)	[9,13)	(1,5]
5°	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{n(n+7)}{10}$	(7,11)	[12,16)	(2,6]
6°	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{n(n+8)}{12}$	(10,13)	[16,19)	(4,7]
7°	$\frac{10}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{n(n+9)}{14}$	(13,15)	[20,22)	(6,8]
8°	1	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{n(n+6)}{12}$	(6,11)	[12,17)	(0,5]
9°	1	$\frac{7}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{n(n+5)}{20}$	(10,17)	[20,27)	(0,7]
10°	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{23}{28}$	$\frac{n(n+10)}{28}$	(18,23)	[32,37)	(4,9]
11°	$\frac{10}{9}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{29}{36}$	$\frac{n(n+12)}{36}$	(22,29)	[40,47)	(4,11]
12°	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{n(n+8)}{24}$	(12,16)	[24,28)	(0,4]
13°	1	$\frac{2}{21}$	$\frac{19}{21}$	$\frac{n(n+11)}{42}$	(21,25)	[42,46	(0,4
14°	1	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{n(n+9}{30}$	(15,23)	[30,38)	(0,8

Tabloul 7 (continuare)

Cazul	M'	M''	$M'-M''$	$R(n)$	interv. de var. al lui λ pentru $P(n)$	$Q(n)$	$S(n)$
15°	$\frac{17}{16}$	$\frac{11}{48}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{n(n+12)}{48}$	$(27,35)$	$[51,59)$	$(3,11]$
16°	$\frac{13}{11}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{32}{33}$	$\frac{n(n+15)}{66}$	$(45,47)$	$[78,80)$	$(12,14]$
17°	1	$\frac{1}{35}$	$\frac{34}{35}$	$\frac{n(n+13)}{70}$	$(35,37)$	$[70,72)$	$(0,2]$
18°	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{n(n+14)}{80}$	$(40,48)$	$[80,88)$	$(0,8]$

Pe baza formelor (69) intervalul relativ la polinomul $Q(n)$ se deduce din intervalul relativ la polinomul $P(n)$ prin o translaţie egală cu bc iar intervalul relativ la polinomul $S(n)$ prin o translaţie egală cu $-bc$. Intervalul relativ la $Q(n)$ este închis la stânga, iar cel relativ la $S(n)$ este închis la dreapta, extremităţile respective corespunzând soluţiilor excepţionale definite la Nr. 25.

Soluţiile excepţionale ale problemelor II, II′ sunt date în următorul tablou.

Tabloul 8.

Cazul	$Q(n)$	$S(n)$
1°	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
2°	$\frac{(n+2)^2}{4}$	$\frac{(n+1)(n+3)}{4}$
3°	$\frac{(n+2)(n+3)}{6}$	$\frac{(n+1)(n+4)}{6}$
4°	$\frac{(n+3)^2}{8}$	$\frac{(n+1)(n+5)}{8}$
5°	$\frac{(n+3)(n+4)}{10}$	$\frac{(n+1)(n+6)}{10}$
6°	$\frac{(n+4)^2}{12}$	$\frac{(n+1)(n+7)}{12}$
7°	$\frac{(n+4)(n+5)}{14}$	$\frac{(n+1)(n+8)}{14}$
8°	$\frac{n^2+6n+12}{12}$	$\frac{(n+1)(n+5)}{12}$
9°	$\frac{n^2+8n+20}{20}$	$\frac{(n+1)(n+7)}{20}$
10°	$\frac{n^2+10n+32}{28}$	$\frac{(n+1)(n+9)}{28}$
11°	$\frac{n^2+12n+40}{36}$	$\frac{(n+1)(n+11)}{36}$
12°	$\frac{n^2+8n+24}{24}$	$\frac{n^2+8n+4}{24}$
13°	$\frac{n^2+11n+42}{42}$	$\frac{n^2+11n+4}{42}$
14°	$\frac{n^2+9n+30}{30}$	$\frac{(n+1)(n+8)}{30}$
15°	$\frac{n^2+12n+51}{48}$	$\frac{(n+1)(n+11)}{48}$
16°	$\frac{n^2+15n+78}{66}$	$\frac{(n+1)(n+14)}{66}$
17°	$\frac{n^2+13n+70}{70}$	$\frac{n^2+13n+2}{70}$
18°	$\frac{n^2+14n+80}{80}$	$\frac{n^2+14n+8}{80}$

43. — Soluţii particulare interesante sunt acelea în care de ex. polinomul $P(n)$, $Q(n)$ sau $S(n)$ se descompune în produsul a doi factori liniari cu coeficienţi raţionali. Din tabloul 7 se deduce că există o infinitate de astfel de polinoame $P(n)$ şi o infinitate de astfel de polinoame $S(n)$ în toate cele 18 cazuri. Există o infinitate de astfel de polinoame $Q(n)$ în cazurile 1°, 3°, 5°, 7°, există unul sigur (care este evident soluţia excepţională) în cazurile 2°, 4°, 6° şi nu există nici unul în celelalte 11 cazuri.

Pentru demonstrarea acestor afirmaţii este destul în prealabil să observăm că polinomul $n(n+b+c+1)+\lambda$ se poate descompune în doi factori de gradul întâi cu coeficienţi raţionali numai dacă $(b+c+1)^2-4\lambda \geq 0$.

Constatăm acum, pe de o parte, că avem o infinitate, unul singur sau nici un polinom $P(n)$, $Q(n)$ sau $S(n)$ de forma căutată după cum intervalul de variaţie a lui λ corespunzător are cu intervalul $\left(-\infty, \frac{(b+c+1)^2}{4}\right]$ o infinitate, unul singur sau nici un punct comun.

Pe de altă parte valorile lui $\frac{(b+c+1)^2}{4}$ pentru cele 18 cazuri sunt succesiv egale cu $\frac{9}{4}$, 4, $\frac{25}{4}$, 9, $\frac{49}{4}$, 16, $\frac{81}{4}$, 9, 16, 25, 36, 16, $\frac{121}{4}$, $\frac{81}{4}$, 36, $\frac{225}{4}$, $\frac{169}{4}$, 49.

44. — Pentru a pune în evidenţă câteva din aceste soluţii vom examina trei forme particulare.

I. Să căutăm polinomul $P(n)$, $Q(n)$ sau $S(n)$ în care diferenţa rădăcinilor este un număr întreg. Polinomul căutat este atunci de forma $\frac{(n+u)(n+u+v)}{2bc}$, unde u este un număr raţional, iar v un număr întreg care se poate presupune nenegativ.

Rezultă de aici că trebue să avem

$$2u+v=b+c+1, \quad u(u+v)=\lambda,$$

de unde

$$(b+c+1)^2-v^2=4\lambda.$$

Vedem imediat că avem un număr finit de soluţii, λ trebuind să aparţină intervalului dat în tabloul 7.

Făcând toate calculele găsim soluţiile cuprinse în următorul tablou.

Tabloul 9.

Cazul	P (n)	Q (n)	S (n)
1°	$\frac{(2n+3)^2}{8}$, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $\frac{(2n+1)(2n+5)}{8}$	$\frac{(2n+3)^2}{8}$, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $\frac{(2n+1)(2n+5)}{8}$
2°	$\frac{(n+2^2)}{4}$, $\frac{(2n+3)(2n+5)}{16}$, $\frac{(n+1)(n+3)}{4}$	$\frac{(n+2)^2}{4}$	$\frac{(n+1)(n+3)}{4}$, $\frac{(2n+1)(2n+7)}{16}$
3°	$\frac{(2n+5)^2}{24}$, $\frac{(n+2)(n+3)}{6}$, $\frac{(2n+3)(2n+7)}{24}$, $\frac{(n+1)(n+4)}{6}$	$\frac{(2n+5)^2}{24}$, $\frac{(n+2)(n+3)}{6}$	$\frac{(n+1)(n+4)}{6}$, $\frac{(2n+1)(2n+9)}{24}$
4°	$\frac{(2n+5)(2n+7)}{32}$, $\frac{(n+2)(n+4)}{8}$, $\frac{(2n+3)(2n+9)}{32}$	$\frac{(n+3)^2}{8}$	$\frac{(n+1)(n+5)}{8}$, $\frac{(2n+1)(2n+11)}{32}$
5°	$\frac{(n+2)(n+5)}{10}$, $\frac{(2n+3)(2n+11)}{40}$	$\frac{(2n+7)^2}{40}$, $\frac{(n+3)(n+4)}{10}$	$\frac{(n+1)(n+6)}{10}$, $\frac{(2n+1)(2n+13)}{40}$
6°	$\frac{(n+2)(n+6)}{12}$	$\frac{(n+4)^2}{12}$	$\frac{(n+1)(n+7)}{12}$
7°	$\frac{(n+2)(n+7)}{14}$	$\frac{(2n+9)^2}{56}$, $\frac{(n+4)(n+5)}{14}$	$\frac{(n+1)(n+8)}{14}$
8°	$\frac{(n+3)^2}{12}$, $\frac{(2n+5)(2n+7)}{48}$, $\frac{(n+2)(n+4)}{12}$, $\frac{(2n+3)(2n+9)}{48}$	—	$\frac{(n+1)(n+5)}{12}$, $\frac{(2n+1)(2n+11)}{48}$
9°	$\frac{(n+4)^2}{20}$, $\frac{(2n+7)(2n+9)}{80}$, $\frac{(n+3)(n+5)}{20}$, $\frac{(2n+5)(2n+11)}{80}$, $\frac{(n+2)(n+6)}{20}$	—	$\frac{(n+1)(n+7)}{20}$, $\frac{(2n+1)(2n+15)}{80}$

Tabloul 9 (continuare)

Cazul	P (n)	Q (n)	S (n)
10°	$\frac{(2n+7)(2n+13)}{112}$, $\frac{(n+3)(n+7)}{28}$, $\frac{(2n+5)(2n+15)}{112}$	—	$\frac{(n+1)(n+9)}{28}$, $\frac{(2n+1)(2n+19)}{112}$
11°	$\frac{(n+3)(n+9)}{36}$, $\frac{(2n+5)(2n+19)}{144}$	—	$\frac{(n+1)(n+11)}{36}$, $\frac{(2n+1)(2n+23)}{144}$
12°	$\frac{(2n+7)(2n+9)}{96}$, $\frac{(n+3)(n+5)}{24}$, $\frac{(2n+5)(2n+11)}{96}$	—	$\frac{(2n+1)(2n+15)}{96}$
13°	$\frac{(n+3)(n+8)}{42}$, $\frac{(2n+5)(2n+17)}{168}$	—	—
14°	$\frac{(2n+9)^2}{120}$, $\frac{(n+4)(n+5)}{30}$, $\frac{(2n+7)(2n+11)}{120}$, $\frac{(n+3)(n+6)}{30}$, $\frac{(2n+5)(2n+13)}{120}$	—	$\frac{(n+1)(n+8)}{30}$, $\frac{(2n+1)(2n+17)}{120}$
15°	$\frac{(2n+9)(2n+15)}{192}$, $\frac{(n+4)(n+8)}{48}$, $\frac{(2n+7)(2n+17)}{192}$	—	$\frac{(n+1)(n+11)}{48}$, $\frac{(2n+1)(2n+23)}{192}$
16°	—	—	$\frac{(n+1)(n+14)}{66}$
17°	$\frac{(n+4)(n+9)}{70}$	—	—
18°	$\frac{(2n+11)(2n+17)}{320}$, $\frac{(n+5)(n+9)}{80}$, $\frac{(2n+9)(2n+19)}{320}$	—	$\frac{(2n+1)(2n+27)}{320}$

Acest tablou conține în particular toate soluțiile în care polinoamele P(n), Q(n), S(n) sunt patrate perfecte.

II. Să căutăm soluțiile în care polinomul P(n), Q(n) sau S(n) este, afară de un factor (evident) rațional, un produs de două numere întregi consecutive, oricare ar fi n.

Polinomul căutat este atunci de forma $\frac{(un+v)(un+v+1)}{w}$, unde u este un număr natural, v un număr întreg și w un număr rațional. Prin identificare se găsește

$$\frac{u^2}{w}=\frac{1}{2bc}, \quad \frac{u(2v+1)}{w}=\frac{b+c+1}{2bc}, \quad \frac{v(v+1)}{w}=\frac{\lambda}{2bc}.$$

De aici rezultă $w = 2bcu^2$, deci w este un număr natural. Mai avem

$$u(b+c+1) = 2v+1, \quad \lambda = \frac{(b+c+1)^2u^2-1}{4u^2}. \tag{122}$$

Din prima din aceste formule rezultă că u și $b+c+1$ trebue să fie numere impare. Rezultă atunci că v este un număr natural. Mai rezultă că nu putem avea soluții decât în cazurile 1°, 3°, 5°, 7°, 13°, 14°, 16°, 17°.

Intervalul de variație al membrului al doilea al formulei a doua (122) este

$$\left[\frac{(b+c)\,(b+c+2)}{4}, \ \frac{(b+c+1)^2}{4}\right). \tag{123}$$

Vom avea atâtea soluții câte valori ale membrului al doilea al formulei a doua (112) cad în intervalul de variație a lui λ pentru polinomul respectiv P(n), Q(n), S(n).

III. Să căutăm deasemenea soluțiile în care polinomul P(n), Q(n) sau S(n) este, afară de un factor (evident) rațional, produsul a două numere întregi consecutive de aceeași paritate.

Polinomul căutat este atunci de forma $\frac{(un+v)\ (un+v+2)}{w}$, unde u este un număr natural, v un număr întreg și w un număr rațional. Avem acum

$$\frac{u^2}{w}=\frac{1}{2bc}, \quad \frac{2u(v+1)}{w}=\frac{b+c+1}{2bc}, \quad \frac{v(v+2)}{w}=\frac{\lambda}{2bc}$$

și se deduce iarăși $w = 2bcu^2$ precum și

$$u(b+c+1) = 2(v+1), \quad \lambda = \frac{(b+c+1)^2u^2-4}{4u^2}. \tag{124}$$

Se vede iarăși că v este un număr natural. Trebue însă să distingem două cazuri. Dacă $b+c+1$ este impar, deci în cazurile 1°, 3°, 5°, 7°, 13°, 14°, 16°, 17°, u trebue să fie par (≥ 2) și intervalul de variație a membrului al doilea al celei de a doua formule (124) este tot (123). Dacă însă $b+c+1$ este par, deci în celelalte 10 cazuri, u poate să fie un număr

natural oarecare iar intervalul de variație a membrului al doilea al celei de a doua formule (124) este

$$\left[\frac{(b+c-1)\ (b+c+3)}{4}, \ \frac{(b+c+1)^2}{4}\right). \tag{125}$$

Soluțiile efective se determină ca și în cazul II.

Pentru a găsi soluțiile în cazurile II, III formăm întâi tabloul intervalelor (123), (125).

Tabloul 10.

Cazul	1°	2°	3°	4°	5°	6°
intervalul (123)	$\left[2, \frac{9}{4}\right)$		$\left[6, \frac{25}{4}\right)$		$\left[12, \frac{49}{4}\right)$	
intervalul (125)		[3,4)		[8,9)		[15,16)

Cazul	7°	8°	9°	10°	11°	12°
intervalul (123)	$\left[20, \frac{81}{4}\right)$					
intervalul (125)		[8,9)	[15,16)	[24,25)	[35,36)	[15,16)

Cazul	13°	14°	15°	16°	17°	18°
intervalul (123)	$\left[30, \frac{121}{4}\right)$	$\left[20, \frac{81}{4}\right)$		$\left[56, \frac{225}{4}\right)$	$\left[42, \frac{169}{4}\right)$	
intervalul (125)			[35,36)			[48,49)

Din examinarea acestui tablou și ținând seamă de intervalul de variație a lui λ dat în tabloul 7, rezultă că în cazul II există o infinitate de polinoame P(n) de acest fel în cazurile 1°, 3° și 14° o infinitate de polinoame Q(n) de acest fel în cazurile 1°, 3°, 5°, 7° și un singur polinom S(n) de acest fel în cazul 1°.

In cazul III există o infinitate de polinoame P(n) de acest fel în cazurile 1°, 2°, 3°, 4°, 8°, 9°, 12°, 14°, o infinitate de polinoame Q(n) de acest fel în cazurile 1°, 3°, 5°, 7° și un singur polinom S(n) de acest fel în cazurile 1°, 2°. Nu toate aceste soluții sunt însă diferite de cele găsite în cazul II. Și anume cele în care u și v sunt ambele pare se reduc evident, prin simplificare cu 4, la soluţii găsite în cazul II. Reciproc, amplificând cu 4, din orice soluţie a cazului II se deduce o soluţie a cazului III.

Soluţiile distincte în cazurile II, III sunt cuprinse în tabloul următor

Tabloul 11.

Cazul	P (n)	Q (n)	S (n)
1°	$\frac{(2n+3)^2t^2-1}{8t^2}$	$\frac{(2n+3)^2t^2-1}{8t^2}$	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
2°	$\frac{(n+2)^2t^2-1}{4t^2}$	—	$\frac{(n+1)(n+3)}{4}$
3°	$\frac{(2n+5)^2t^2-1}{24t^2}$	$\frac{(2n+5)^2t^2-1}{24t^2}$	—
4°	$\frac{(n+3)^2t^2-1}{8t^2}$	—	—
5°	—	$\frac{(2n+7)^2t^2-1}{40t^2}$	—
7°	—	$\frac{(2n+9)^2t^2-1}{56t^2}$	—
8°	$\frac{(n+3)^2t^2-1}{12t^2}$	—	—
9°	$\frac{(n+4)^2t^2-1}{20t^2}$	—	—
12°	$\frac{(n+4)^2t^2-1}{24t^2}$	—	—
14°	$\frac{(2n+9)^2t^2-1}{120t^2}$	—	—

unde t este un număr natural oarecare.

Se pot enunţa diverse proprietăţi particulare asupra cărora este inutil să insistăm.

Facultatea de Matematică şi Fizică a Universităţii „V. Babeş" din Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Euler L., *Introductio in Analysin infinitorum* sau Opera Omnia, S. 1, T. 8.

2a. Sylvester J. J., *Outlines of seven lectures on the partitions of numbers*. Proc. London Math. Soc., 28, 33—96 (1897).

2b. Sylvester J.J., *On a discovery in the partition of numbers*, Quarterly J. of Math., 1, 81—84 (1857).

3a. Weihrauch K., *Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei theilerfremder Coefficienten*, Zeitsch. für Math. u Ph., 20, 97—111 (1875).

3b. Weihrauch K., *Über die Ausdrücke* $\Sigma fn(m)$ *und die Umgestaltungen der Formel für Lösungszahlen*,... ibid., 20, 111—117 (1875).

4. Skolem Th., Nota 14 la cartea *Lehrbuch der Combinatorik* de Dr. E. Netto, ed. II. 1927.

5. Gelfond A. O., *Iscislenie konecinîh raznostei*, Moskva—Leningrad, 1952.

6. Dedekind R., *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Teiler*. Werke, II, 103—147, (1931).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Относительно задачи о партиции чисел

ТИБЕРИУ ПОПОВИЧ

В настоящей работе рассматривается несколько задач в связи с числом $N_m(n)$ решений, в целых числах неотрицательных $x_1, x_2, \dots x_m$ уравнения (1), где $a_1, a_2, \dots a_m$ являются подлинными числами. Задачи этого рода разрабатываются обыкновенно при помощи производной функции (2). Этот метод имеет преимущество в возможности легче различать многие из наблюдаемых особенностей, но всё же и более простые методы, своими простыми арифметическими соображениями, имеют свою собственную цену. Этому последнему методу отдаётся предпочтение в настоящей работе.

Задача, разрешение которой мы наблюдаем, выражается следующим образом:

I. Будучи дано уравнение (1), надо определить многочлен P (n) от n таким образом, чтобы $N_m(n)$ было равно целому ближайшему к P (n), какой бы ни был n.

Частные решения были уже отмечены J. J. Sylvester-ом [2a] и Th. Skolem-ом [4].

В 1—4 §§ мы разбираем задачу предварительную определению многочлена $R_m(n)$ так, чтобы разница $R_m(n)-N_m(n)$ была одинаково ограничена. Это возможно, только лишь если числа $a_1, a_2, \dots, a_m$ стоят два по два простых числа между ними. Анализируя эту задачу, мы снова находим, по нашему мнению, по более прямому пути, некоторые результаты структуры числа $N_m(n)$, в этом случае. В особенности приводится, как, по чисто алгебраическому пути, можно определить многочленную часть $R_m(n)$ из формулы (27).

В 5-ом § возвращаемея к I задаче также как и к задачам II, II' тесно связанных с этой, устанавливая условия, которые периодическая часть $G_m(n)$ из формулы (27) должна выполнять для того, чтобы эти задачи имели решения. Делается вывод, частным образом, что I задача не имеет решений в случаях $m \leqq 5$, $a_i > 1$, $i = 1, 2, \dots$

В 6-ом § решается полностью I задача для $m = 1, 2$. В 7-ом § изучается подробно уравнение (1) в случае $m = 3$ и два по два простых числа между ними. Особенно подчёркивается симметрия периодической функции $G_m(n)$ из формулы (27). Наконец в 8-ом § решается полностью I задача в случае $m = 3$ найдя все 18 решений, которые тщательно исследуются.

RÉSUMÉ

Sur un problème de partition des nombres

par

TIBERIU POPOVICIU

Dans ce travail on examine quelques problèmes concernant le nombre $N_m(n)$ des solutions en entiers non-négatifs $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de l'équation (1), où $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont des nombres naturels donnés. De tels problèmes sont habituellement traités à l'aide de la fonction génératrice (2). Cette méthode permet de prévoir plus aisément les propriétés cherchées, néanmoins les méthodes plus élémentaires, par des considérations arithmétiques simples, ont aussi leur avantage. Dans la suite nous employons surtout cette dernière méthode.

Le problème que nous examinons dans ce travail s'enonce ainsi:

I. *Etant donnée l'équation* (1), *déterminer un polynome* $P(n)$ *en* n *de manière que* $N_m(n)$ *soit égal à l'entier le plus rapproché de* $P(n)$ *et ceci quel que soit* n.

Dans les §§ 1—4 nous examinons le problème préliminaire de la détermination d'un polynome $R_m(n)$ de manière que la différence $R_m(n) - N_m(n)$ soit uniformément bornée. Ceci est possible si, et seulement si les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont deux à deux premiers entre eux. Nous retrouvons, croyons-nous d'une façon plus directe, quelques résultats concernant la structure du nombre $N_m(n)$, dans ce cas. En particulier nous obtenons, par des considérations purement algébriques, la partie polynomiale $R_m(n)$ de la formule (27).

Dans le § 5 nous reprenons le problème I, ainsi que les problèmes voisins II, II′, établissant les conditions auxquelles doit satisfaire la partie périodique $G_m(n)$ de la formule (27), pour que nos problèmes aient des solutions. En particulier, on démontre que le problème I n'a pas de solutions si $m \leq 5$ et $a_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots$

Dans le § 6 nous donnons la solution complète du problème I pour $m = 1, 2$. Dans le § 7 on étudie en détail l'équation (1) dans le cas $m = 3$ et les a_i deux à deux premiers entre eux. En particulier on donne une propriété de symétrie de la fonction périodique $G_m(n)$ de la formule (27). Enfin au § 8 on donne la solution complète du problème I dans le cas $m = 3$ en mettant en évidence ses 18 solutions, qui sont examinées de près.