

TENSIUNI TERMICE IN TUBURI CU PEREȚI SUBȚIRI IN CAZUL UNUI CÂMP TERMIC SIMETRIC FAȚĂ DE AXĂ

DE
NĂMETI LADISLAU

Comunicare prezentată în ședința de comunicări din 29 Octombrie 1952
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

Problema aceasta s'a născut la proiectarea cazanelor de aburi cu trecere forțată. Aceste cazane constau în principiu dintr'o singură țevă lungă, așezată potrivit, prin care trece apa. Țeava primește căldura din exterior, apa se încălzește și dela un anumit loc începe să se evaporeze. Coeficientul de transmitere a căldurii la peretele interior al țevii se schimbă foarte mult într'o anumită porțiune relativ foarte scurtă a țevii. Prin urmare câmpul de temperatură în materialul peretelui va fi foarte neuniform în acest domeniu. Această neuniformitate a câmpului termic dă naștere unor tensiuni termice, care solicită rezistența materialului.

De fapt țevile fierbătoare ale acestor cazane se rup destul de des în regiunea de despărțire a apei și aburului. Aceste tensiuni termice trebuie deci calculate pentru a putea judeca și stăpâni primejdia de rupere.

I. Câmpul termic.

Temperatura t verifică următoarea ecuație (v. fig. 1):

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

cu condițiile la frontieră:

$$\begin{aligned} \text{pe peretele interior} \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0-\frac{s}{2}} &= \alpha t \Big|_{r=r_0-\frac{s}{2}} \\ \text{pe peretele exterior} \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\frac{s}{2}} &= Q \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{la capetele țevii} \quad \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\pm l} = 0. \quad (3)$$

Pentru țeava ilimitată în loc de (3) prescriem ca t să rămână mărginit. Observăm, că α este o funcțiune de x .

II. Starea de deformațiuni

Punem următoarele condiții și ipoteze de aproximare:

1. Grosimea peretelui este mică față de raza medie a țevii (r_0).
2. Deplasările unui punct sunt mici față de r_0 .
3. Elemente de linie care înaintea deformațiunii au fost drepte și perpendiculare pe suprafața medie, rămân așa și după deformație.
4. Deformațiunile sunt mici.

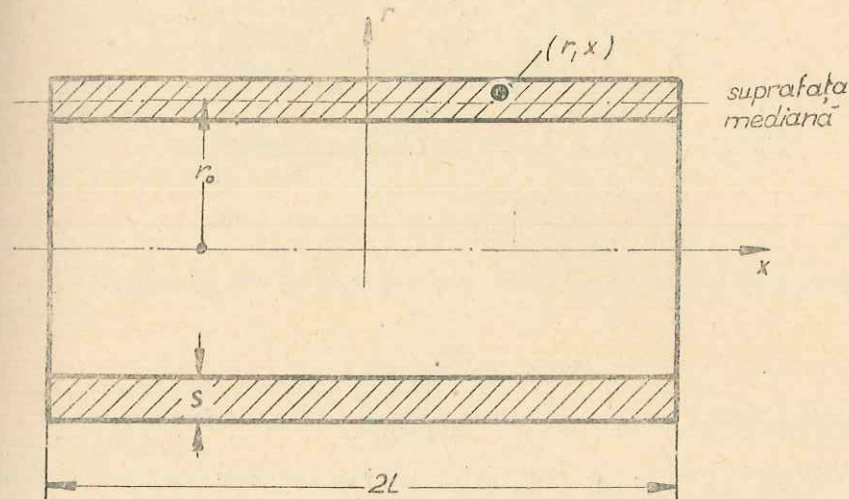


Fig. 1.

Găsim următoarele relații (vezi fig. 2).

Coordonatele unui punct:

Înaintea deformării $r = r_0 + u$; x .

După deformare $r + \rho = r_0 + u + \rho$; $x + \xi$.

Mai avem

$$u^x = u(1 + k) \quad k \ll 1$$

$$\alpha \approx \frac{d\rho_0}{dx}$$

Deplasările punctului se calculează, neglijând mărimile mici de ordinul II.

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 - u(1 - \cos \alpha) + u k \cos \alpha \approx \rho_0 + u k \\ \xi &= \xi_0 - u(1 + k) \sin \alpha \approx \xi_0 - u \frac{d\rho_0}{dx} \end{aligned} \quad (4)$$

Alungirile vor fi

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\xi_0}{dx} - u \frac{d^2\rho_0}{dx^2} \\ \varepsilon_r &= \frac{\rho}{r} = \frac{\rho_0 + u k}{r_0 + u} \approx \frac{\rho_0}{r_0} \\ \varepsilon_r &= \frac{d\rho}{dr} \text{ nu se va folosi.} \end{aligned} \quad (5)$$

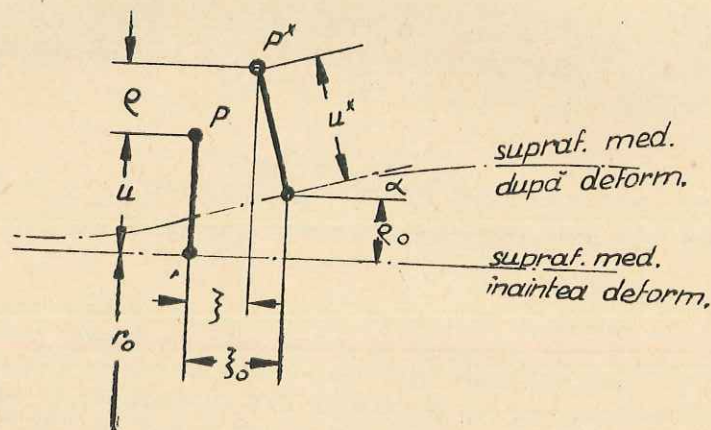


Fig. 2.

III. Tensiunile.

Aici presupunem că materialul țevii se supune legilor lui Hooke, că are un coeficient de dilatare termică (β) constant. Mai presupunem că țeava este fără sarcini (fără forțe exterioare).

Deci $\sigma_r = 0$ la ambii pereți. Peretele fiind subțire, σ_r va fi mic de ordin doi. Il presupunem deci ca fiind nul.

Notăm $\delta = \beta t$

Legea lui Hooke ne dă

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_t) + \delta \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu\sigma_x) + \delta \end{aligned} \quad (6)$$

sau

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{d\xi}{dx} + \mu \frac{\rho}{r} - u \frac{d^2\rho}{dx^2} - (1+\mu)\delta \right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\mu \frac{d\xi}{dx} + \frac{\rho}{r} - \mu u \frac{d^2\rho}{dx^2} - (1+\mu)\delta \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Notăm cu

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma du & M &= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma u du \\ \theta &= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \delta du & \psi &= \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \delta u du \end{aligned} \quad (8)$$

găsim

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Es}{1-\mu^2} \left[\xi' + \mu \frac{\rho}{r} - (1+\mu) \frac{\theta}{s} \right] \\ N_t &= \frac{Es}{1-\mu^2} \left[\mu \xi' + \frac{\rho}{r} - (1+\mu) \frac{\theta}{s} \right] \\ M_x &= -\frac{Es^3}{12(1-\mu^2)} \left[\rho'' + 12(1+\mu) \frac{\psi}{s^3} \right] \\ M_t &= -\frac{Es^3}{12(1-\mu^2)} \left[\mu \rho'' + 12(1+\mu) \frac{\psi}{s^3} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Menționăm că am omis indicele 0, adică r, ρ, ξ se referă la suprafața mediană.

IV. Condițiile de echilibru.

La suprafețele unui element de volum (fig. 3) se aplică următoarele forțe și momente.

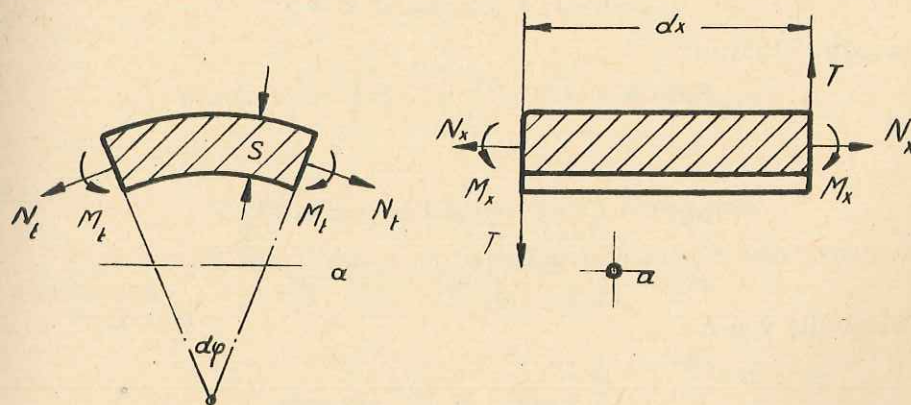


Fig. 3.

La suprafețe laterale: forța normală N_t și momentul M_t .
La suprafețe frontale: forța normală N_x , cea tangențială T și mo-

mentul M_x , celelalte forțe și momente dispar din motive de simetrie. Echilibrul de deplasare în direcția x dă:

$$N'_x = 0. \quad (10)$$

Echilibrul de deplasare în direcția r dă:

$$r T' = N_t. \quad (11)$$

Echilibrul de rotație în jurul axei a dă:

$$T = M'_x. \quad (12)$$

Din (10) avem, folosind și condiția lipsei de forțe exterioare

$$N_x = 0. \quad (13)$$

Din (1) și (12)

$$r M''_x = N_t. \quad (14)$$

Eliminând ζ din (13) și (14) găsim

$$\rho^{IV} + \frac{12}{s^2 r^2} (1 - \mu^2) \rho = \frac{12}{s^3 r} (1 - \mu^2) \theta - \frac{12}{s^3} (1 + \mu) \psi''. \quad (15)$$

Aceasta este ecuația rezolvantă a problemei. Integrala verifică la următoarele condiții la limită:

Pentru țeava limitată

$$x = \pm l: M_x = 0 \rightarrow \rho'' + 12(1 + \mu) \frac{\psi}{s^3} = 0 \quad (16)$$

$$T = 0 \rightarrow \rho''' + 12(1 + \mu) \frac{\psi'}{s^3} = 0.$$

Pentru țeava ilimitată

$$x \rightarrow \pm \infty: \rho \text{ mărginit și } \rho' \rightarrow 0. \quad (17)$$

Cunoscând ρ găsim

$$N_x = 0$$

$$N_t = E \left(\frac{s}{r} \rho - \theta \right)$$

$$M_x = - \frac{E s^3}{12(1 - \mu^2)} \left[\rho'' + 12(1 + \mu) \frac{\psi}{s^3} \right] \quad (18)$$

$$M_t = - \frac{E s^3}{12(1 - \mu^2)} \left[\mu \rho'' + 12(1 + \mu) \frac{\psi}{s^3} \right]$$

și tensiunile vor fi

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \pm 6 \frac{M_x}{s^3} \\ \sigma_t &= \frac{N_t}{s} \pm 6 \frac{M_t}{s^2} \\ \sigma_r &\approx 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{semnul de sus referindu-se} \\ \text{la suprafața exterioară} \\ \text{interioară a peretelui} \end{array} \quad (19)$$

V. Soluționarea rezolvantei

Ecuația (15) este de forma

$$\rho^{IV} - 4\alpha^4 \rho = 4\alpha^4 F.$$

Aplicând metoda variației constantelor, găsim integrala ecuației

$$\begin{aligned} \rho = & -\frac{\alpha}{2} e^{\alpha x} \cos \alpha x \left[\int_0^x F(u) e^{-\alpha u} (\cos \alpha u + \sin \alpha u) du - C_1 \right] + \\ & + \frac{\alpha}{2} e^{\alpha x} \sin \alpha x \left[\int_0^x F(u) e^{-\alpha u} (\cos \alpha u - \sin \alpha u) du - C_2 \right] + \\ & + \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x \left[\int_0^x F(u) e^{\alpha u} (\cos \alpha u - \sin \alpha u) du - C_3 \right] + \\ & + \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x} \sin \alpha x \left[\int_0^x F(u) e^{\alpha u} (\cos \alpha u + \sin \alpha u) du - C_4 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Pentru țeava infinită putem da o formă foarte simplă. Postulând că ρ este mărginit, se calculează imediat constantele. Notând

$$F(u) + F(-u) = 2\Phi(u) \text{ găsim}$$

$$\rho(x) = \int_0^\infty \Phi\left(x + \frac{u}{\alpha}\right) e^{-u} (\cos u + \sin u) du \quad (21)$$

și

$$\rho''(x) = -2\alpha^2 \int_0^\infty \Phi\left(x + \frac{u}{\alpha}\right) e^{-u} (\cos u - \sin u) du.$$

VI. Introducerea mărimilor fără dimensiuni.

Tratarea problemei este mult ușurată, dacă introducem mărimi fără dimensiuni.

Vom nota

$$\frac{r - r_0}{r_0} = y \quad \frac{x}{r_0} = z \quad \frac{s}{2r_0} = \varepsilon \quad \frac{l}{r_0} = L \quad (22)$$

$$\frac{\lambda}{r_0 Q} t = U \quad \frac{r_0 \alpha}{\lambda} = \gamma \quad (23)$$

Vom găsi atunci pentru temperatura:

$$(1+y) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

condițiile de frontieră vor deveni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=\epsilon} &= 1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=-\epsilon} &= \gamma U \Big|_{y=-\epsilon} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=\pm L} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Ecuția rezolvariantă va deveni:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + \frac{3(1-\mu^2)}{\epsilon^2} \varphi = \frac{3(1-\mu^2)}{\epsilon^2} T_0 - 3(1+\mu) \frac{dT_1}{dz^2} \quad (26)$$

unde am notat:

$$\frac{\lambda}{r_0^2 \beta Q} \rho = \varphi \quad \text{și} \quad T_0 = \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} U dy, \quad T_1 = \frac{1}{2\epsilon^3} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} Uy dy. \quad (27)$$

Condițiile la limită sunt:

$$\begin{aligned} z = \pm l: \quad \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= -3(1+\mu) T_1 \\ \frac{d^3 \varphi}{dz^3} &= -3(1+\mu) \frac{dT_1}{dz} \end{aligned} \quad (28)$$

Pentru tensiunile la suprafețele exterioară și interioară ale țevii găsim:

$$S_t = \varphi - T_0 \pm \frac{\epsilon}{1-\mu} \left(\frac{\mu}{1+\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 3T_1 \right) \quad (29)$$

$$S_z = \pm \frac{\epsilon}{1-\mu} \left(\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 3T_1 \right)$$

unde

$$\frac{\lambda}{r_0 \beta Q} \frac{\sigma}{E} = S. \quad (30)$$

VII. O soluție aproximativă.

Simplificăm cazul, presupunând schimbarea coeficientului de transmitere a căldurii ca discontinuă, luăm deci

$$\gamma = \begin{cases} \gamma^+ = \text{const} \\ \gamma^- = \text{const} \end{cases} \quad \text{pentru } z \geq 0, \quad \gamma^+ > \gamma^-. \quad (31)$$

Funcția

$$U = (1+\epsilon) \left[\ln \frac{1+y}{1-\epsilon} + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1-\epsilon} \right]$$

satisface ecuațiile (24) și (25), însă nu este continuă în domeniu. Pentru o aproximație primă, totuși o considerăm ca soluție și neglijând termenele dela ϵ^2 începând, găsim

$$U = \frac{1+2\epsilon}{\gamma} + y + \epsilon; \quad T_0 = \frac{1+2\epsilon}{\gamma} + \epsilon, \quad T_1 = \frac{1}{3} \quad (32)$$

aplicând metoda din cap. V. pentru țeava infinită, avem

$$\Phi = \frac{1+2\epsilon}{2} \left(\frac{1}{\gamma^+} + \frac{1}{\gamma^-} \right) + \epsilon$$

și găsim

$$\varphi = \Phi = \text{const.}$$

Tensiunile vor fi (29)

$$S_t = \frac{1+2\epsilon}{2} \left(\frac{1}{\gamma^-} - \frac{1}{\gamma^+} \right) \pm \frac{\epsilon}{1-\mu} \quad (33)$$

$$S_z = \pm \frac{\epsilon}{1-\mu}$$

sau revenind la cantități fixe, tensiunea cea mai mare

$$\sigma = \frac{E\beta Q}{2} \left[\frac{1}{1-\mu} \frac{s}{\lambda} + \left(1 + \frac{s}{r_0} \right) \left(\frac{1}{\alpha^-} - \frac{1}{\alpha^+} \right) \right] \quad (34)$$

Această soluție aproximativă însă trebuie să fie considerată ca prea grosolană, așa încât se impune căutarea unei soluții mai exacte a ecuațiilor (24), (25) și deci a celorlalte (26), (28) și (29).

Secția de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

BIBLIOGRAFIE

- Mașinostroenie*, Vol. I, 1948.
Föppl, *Sila și deformația*, 1936.
Timoshenko, *Theory of plates and shells*, 1940.
Handbuch d. Physik, Vol. VI.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Термические напряжения в тонкостенных трубках в случае термического поля симметричного в отношении оси

Л. НЕМЕТИ

Исследуем термические напряжения в длинной трубе, получающей теплоту извне, при постоянной температуре внутренней среды и с коэффициентом теплопроводности на внутреннюю поверхность стенки, варьирующем вдоль трубы.

Задача дана в случае паровых котлов с принудительным ходом.

Даем отношения (1, 2, 3) для термического поля как задачу с осевой симметричностью. Сообщаем решаемое уравнение (15) для подсчета термических напряжений для тонкостенной трубы, применяя к задаче уравнений классическую теорию упругости.

Даем те же отношения, вводя вместо употребляемых физических и геометрических величин, величины без измерений (глава VI).

И, наконец, сообщаем одно точное решение (33, 34) задачи, но только как одну первую приближительность, и показываем, что более тщательное решение термического поля является необходимым.

RĚSUMĚ

Tensions thermiques dans des tubes aux parois minces dans le cas d'un champ thermique symétrique par rapport à l'axe

par

NĚMETI LADISLAV

On cherche les tensions thermiques dans un tube long, qui reçoit la chaleur de l'extérieur, la température du milieu de l'intérieur étant constante et le coefficient de transmission de la chaleur à la surface intérieure de la paroi étant variable le long du tube. Le problème se pose pour les chaudières à vapeurs au passage forcé.

On donne les relations (1, 2, 3) pour le champ thermique, comme un problème à symétrie axiale. On communique l'équation résolvante (15) pour le calcul des tensions thermiques pour le tube à la paroi mince, en appliquant aux problèmes des équations la théorie de l'élasticité classique.

On donne les mêmes relations en introduisant à la place des quantités physiques et géométriques utilisées, des quantités sans dimensions (Chap. VI).

On communique, enfin, une solution explicite (33, 34) du problème, mais uniquement comme une première approximation et on montre qu'une solution plus rigoureuse du problème du champ thermique est nécessaire.