INTEGRAREA UNEI ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE CARE INTERVINE IN PROBLEMA CALCULULUI TENSIUNILOR TERMICE IN TUBURILE FIERBĂTOARE ALE CAZANELOR CU TRECERE FORŢATĂ ŞI ALE CAZANELOR CU RADIAŢIE

DE

D. V. IONESCU şi L. NÉMETI.

Comunicare prezentată de Prof. T. POPOVICIU, m. coresp. Acad. R.P.R., în şedinţa din 29 Octombrie 1952 a Filialei Cluj a Acad. R.P.R.

1. Problema pusă de tov. Ing. L. Németi în lucrarea sa „Tensiuni termice în tuburi cu pereţi subţiri în cazul unui câmp termic simetric faţă de axă", se reduce în prima parte în cazul unui tub limitat şi de lungime 2 L, la integrarea ecuaţiei cu derivate parţiale

$$(1 + y)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

cu următoarele condiţii la limită

$$\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{y=\epsilon} = 1. \tag{2}$$

şi

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=-\epsilon} = \gamma(z)\, u\Big|_{y=-\epsilon} \tag{3}$$

unde

$$\gamma(z) = \begin{cases} \gamma^- & \text{dacă } z < 0 \\ \gamma^+ & \text{dacă } z > 0 \end{cases} \qquad (\gamma^+ > \gamma^- > 0) \tag{4}$$

iar γ^- şi γ^+ sunt constante, precum şi la condiţiile

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\pm L} = 0, \tag{5}$$

relative la capetele tubului.

Vom arăta în această notă o metodă de integrare a ecuaţiei cu derivate parţiale (1) cu condiţiile (2), (3), (4) şi (5) reducând-o la rezolvarea unui sistem infinit de ecuaţii liniare.

2. Observăm întâi că funcţia

$$u_0 = (1+\varepsilon)\log(1+y) \tag{6}$$

verifică ecuaţia cu derivate parţiale (1) şi condiţiile la limită (2) şi (5).

Făcând schimbarea de funcţie

$$u = u_0 + v \tag{7}$$

vedem că funcţia v satisface la ecuaţia cu derivate parţiale

$$(1+y)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

iar condiţiile la limită (2) şi (5) devin

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=\varepsilon} = 0 \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=\pm L} = 0 . \tag{10}$$

Vom determina acum integrale ale ecuaţiei cu derivate parţiale (8) care verifică condiţiile (9) şi (10), întrebuinţând metoda lui Fourier.

Se caută întâi o integrală de forma

$$v = Y(y)\,Z(z) . \tag{11}$$

Pentru ca condiţiile (9) şi (10) să fie împlinite vom alege pe $Y(y)$ şi $Z(z)$ astfel ca

$$Y'(\varepsilon) = 0 \tag{12}$$

şi

$$Z'(\pm L) = 0. \tag{13}$$

Suntem astfel conduşi la ecuaţiile

$$(1+y)Y'' + Y' - \lambda^2(1+y)Y = 0 \tag{14}$$

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0. \tag{15}$$

Condiţiile (13) sunt împlinite dacă alegem

$$Z = A_n \cos\frac{n\pi z}{L}, \qquad \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

unde $n = 1, 2, \ldots$, sau dacă alegem

$$Z = B_n \sin\frac{(2n1+)\pi z}{2L}, \qquad \lambda = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$$

unde $n = 0, 1, \ldots$

In primul caz ecuaţia (14) devine

$$(1+y)Y'' + Y' - \frac{n^2\pi^2}{L^2}(1+y)Y = 0 \tag{16}$$

şi vom nota cu $\varphi_n(y)$ integrala ei care satisface la condiţiile

$$\varphi_n(\varepsilon) = 1, \qquad \varphi_n'(\varepsilon) = 0 . \tag{16'}$$

In al doilea caz ecuaţia (14) devine

$$(1+y)Y'' + Y' - \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4L^2}(1+y)Y = 0 , \tag{17}$$

şi vom nota cu $\psi_n(y)$ integrala ei care satisface la condiţiile

$$\psi_n(\varepsilon) = 1, \qquad \psi_n'(\varepsilon) = 0 . \tag{17'}$$

Ecuaţiile (16) şi (17) sunt ecuaţii cunoscute de tip Bessel.

Suntem astfel conduşi de integralele

$$v_0 = B_0\,\psi_0(y)\sin\frac{\pi z}{2L}$$

$$v_n = A_n\,\varphi_n(y)\cos\frac{n\pi z}{L} + B_n\,\psi_n(y)\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2L}$$

Făcând schimbarea de variabilă

$$\zeta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi z}{2L} \tag{18}$$

formulele precedente devin

$$v_0 = -B_0\,\psi_0(y)\cos\zeta$$

$$v_n = (-1)^n\left[A_n\,\varphi_n(y)\cos 2n\zeta - B_n\,\psi_n(y)\cos(2n+1)\zeta\right]$$

şi în această formulă putem da lui n valorile $1, 2, \ldots$

Deducem astfel că funcţia

$$\begin{aligned} u &= (1+\varepsilon)\log(1+y) - B_0\,\psi_0(y)\cos\zeta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[A_n\,\varphi_n(y)\cos 2n\zeta - B_n\,\psi_n(y)\cos(2n+1)\zeta\right] \end{aligned} \tag{19}$$

verifică ecuaţia cu derivate parţiale (1) şi condiţiile la limită (2) şi (5).

Rămâne să se determine constantele $A_1, A_2, \ldots ;\ B_0, B_1, \ldots,$ astfel ca funcţia (19) să verifice şi condiţiile (3).

3. Prin schimbarea de variabilă (18), funcţia $\gamma(z)$ definită de formula (4), devine o funcţie de ζ, pe care o vom nota cu $\gamma(\zeta)$ şi care este definită de

$$\gamma(\zeta) = \begin{cases} \gamma^+ & \text{pentru } \frac{\pi}{2} < \zeta \leqslant \pi \\ \gamma^- & \text{pentru } 0 \leqslant \zeta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{20}$$

Desvoltăm funcţia $\gamma(\zeta)$ într'o serie de cosinusuri în intervalul $[0, \pi]$, făcând o prelungire a funcţiei prin simetrie în intervalul $[-\pi, 0]$. După cum se ştie, avem

$$\gamma(\zeta) = \frac{\gamma^- + \gamma^+}{2} - \frac{2(\gamma^+ - \gamma^-)}{\pi}\left(\frac{\cos\zeta}{1} - \frac{\cos 3\zeta}{3} + \cdots\right) \tag{21}$$

Acest lucru fiind precizat, să scriem că funcţia u dată de formula (19) verifică condiţia (3). Obţinem ecuaţia

$$\begin{aligned} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - B_0 \psi_0'(-\varepsilon) \cos\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [A_n \varphi_n'(-\varepsilon) \cos 2n\zeta - B_n \psi_n'(-\varepsilon) \cos(2n+1)\zeta] \\ = \gamma(\zeta) \{ (1+\varepsilon) \log(1-\varepsilon) - B_0 \psi_0(-\varepsilon) \cos\zeta \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [A_n \varphi_n(- \quad \cos 2n\zeta - B_n \psi_n(-\varepsilon) \cos(2n+1)\zeta \} \end{aligned} \tag{22}$$

Pentru a determina coeficienţii $B_0, B_1, \ldots; A_1, A_2, \ldots$, procedăm ca la determinarea coeficienţilor unei serii Fourier. Inmulţind ambii membri ai formulei (22) cu $\frac{1}{\pi} \sin n\zeta\, d\zeta$ şi integrând dela $-\pi$ la $+\pi$ se obţin, ţinând seama de desvoltarea (21), identităţi, pentru $n = 1, 2, \ldots$ Inmulţind însă cu $\frac{1}{\pi} \cos n\zeta d\zeta$ unde $n = 0, 1, \ldots$ şi integrând dela $-\pi$ la $+\pi$ se obţine, ţinând seama de desvoltarea (21), un sistem infinit de ecuaţii liniare care determină pe $A_1, A_2, \ldots$ şi $B_0, B_1, \ldots$

Dacă se notează

$$\begin{aligned} A_k \varphi_k(-\varepsilon) &= A_k' \qquad (k = 1, 2, \ldots) \\ B_h \psi_h(-\varepsilon) &= B' \qquad (h = 0, 1, \ldots) \end{aligned} \tag{23}$$

şi apoi

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi}{\gamma^+ - \gamma^-}\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{\gamma^+ + \gamma^-}{2}(1+\varepsilon)\log(1-\varepsilon)\right] \\ b_p &= -\frac{(1+\varepsilon)\log(1-\varepsilon)}{(2p+1)^2} \end{aligned} \tag{24}$$

unde $p = 0, 1, \ldots$, precum şi

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{\pi}{2(\gamma^+ - \gamma^-)\varphi_p(-\varepsilon)}\left[\frac{\gamma^- + \gamma^+}{2}\varphi_p(-\varepsilon) - \varphi_p'(-\varepsilon)\right] \qquad (p = 1, \ , \ldots) \\ \nu_p &= \frac{\pi}{2(\gamma^+ - \gamma^-)(2p+1)\psi_p(-\varepsilon)}\left[\frac{\gamma^- + \gamma^+}{2}\psi_p(-\varepsilon) - \psi_p'(-\varepsilon)\right] \qquad (p = 0, 1, \ldots) \end{aligned} \tag{25}$$

se obţine pentru determinarea necunoscutelor A_k, B_h' sistemul infinit de ecuaţii lineare.

$$a = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h'}{2h+1}. \tag{26}$$

$$\mu_p A_p' = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h'}{p^2 - (2h+1)^2} \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

$$\nu_p B_p' = b_p + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k'}{\ ^2 - (2 + 1)^2} \qquad (p = 0, 1, \ldots) \tag{28}$$

Am redus astfel integrarea ecuaţiei cu derivate parţiale (1) cu condiţiile (2), (3) şi (5) la rezolvarea sistemului infinit de ecuaţii liniare (26), (27), (28).

După rezolvarea acestui sistem rămâne încă să se studieze convergenţa seriei (19) şi a seriei cu derivatele ei parţiale de primele două ordine în raport cu y şi z.

Secţia de Matematică
a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Németi., *Tensiunile termice în tuburi cu pereţi subţiri în cazul unui câmp termic simetric faţă de axă.* In volumul de faţă.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Интегрирование уравнения с частными производными, входящее в задачу подсчета термического напряжения в сварочных трубах котлов с принудительным ходом и котлов с радиацией

Д. В. ИОНЕСКУ и Л. НЕМЕТИ

В этой заметке мы дали метод интегрирования уравнения с частными производными второго порядка (1) с краевыми условиями (2), (3), и (5), встреченного тов. Немети в одной технической задаче.

Наш метод заключается в случае конечной трубы длиною в 2 L в том, чтобы привести задачу с помощью метода Fourier к решению бесконечной системы линейных уравнений (26), (27), (28), где неизвестные являются A′, A′ . . . и B′, B′ . . .

RÉSUMÉ

L'integration d'une équation aux dérivées partielles qui intervient dans le problème du calcul des tensions thermiques dans les tubes bouilleurs des chaudières au passage forcé et des chaudièrs à radiation

Par

D. V. IONESCU et L. NÉMETI.

Dans cette note nous avons donné une méthode d'intégration pour l'équation aux dérivées partielles du second ordre (1) avec les conditions aux limites (2), (3) et (5), qui a été rencontrée par M. L. Németi dans un problème technique.

Notre méthode consiste, pour le cas d'un tube fini et de longueur 2 L, à ramener le problème par la méthode de Fourier, à la résolution du système infini d'équations linéaires (26), (27), (28) où les inconnues sont A_1', A_2', . . . , et B_0', B_1', . . .

OBSERVAŢIUNI MORFOLOGICE ASUPRA MECANISMULUI DE CREŞTERE A CRISTALELOR HETEROPOLARE

DE

TIHAMER LÁSZLÓ

Comunicare prezentată de Prof. TIBERIU POPOVICIU, m. coresp. Acad. R.P.R., în şedinţa din 23 Septembrie 1950 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

I. INTRODUCERE.

După teoria molecular-cinetică a lui Kossel-Stranski (v. adaos IV. 4), mecanismul creşterii cristalelor constă dintr'o serie continuă de procese energetice repetabile. Cuplarea stabilă a particolelor în reţeaua reticulară se petrece prin cuplări normale mai lente şi prin cuplări tangenţiale mai accelerate, ce se succed în mod periodic. Planuri reticulare noi se formează mai greu, cele în creştere caută în schimb să se constitue cât mai repede. Creşterea stagnează după fiecare formaţiune de plan reticular. Procesul este însoţit de o schimbare pulsativă de volum. Anizotropia vitezei de creştere o determină gradul de saturaţie a planurilor reticulare. Creşterea începe mai verosimil în locurile mai însemnate din punct de vedere reticularo-energetic, în locurile ce asigură degajarea unei cantităţi φ de energie reticularo-moleculară maximă şi anume în cazul cristalelor homopolare în centrele feţelor, în schimb la cristalele heteropolare în vârfuri.

Concepţia molecular-cinetică a creşterii cristalelor a justificat-o formal mai întâiu M. Straumanis (90) la observarea creşterii cristalelor de Mg, ce se cristalizau în faza de vapori, iar Z. Gyulai (33) la cristalele de ClNa, respectiv ClK, ce se cristalizau din vapori şi soluţie apoasă. Justificarea a constat analogizând straturile mobile de creştere (observate pe muchiile şi feţele cristalelor ce cresc repede), seriile de table ce cresc din cristale, treptele de pe feţe şi modul pulsativ de creştere cu mecanismul de creştere cerut de teoria molecular-cinetică.