# CÂTEVA FORMULE DE CUADRATURĂ MECANICĂ

DE

D. V. IONESCU

*Comunicare prezentată de Prof. TIBERIU POPOVICIU, m. coresp. Acad. R. P. R., în şedinţa din 17 Martie 1951 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.*

## 1. O formulă de cuadratură analoagă formulei clasice a lui Gauss.

1. Să considerăm integrala

$$I=\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx \tag{1}$$

în care $p(x)$ este o funcţie dată, finită şi integrabilă în intervalul închis şi finit $[a, b]$. Mai presupunem că funcţia $p(x)$ este nenegativă în intervalul $[a, b]$, neidentic nulă şi astfel încât integrala $\int_a^b p(x)dx$ să aibă o valoare pozitivă. Funcţia $f(x)$ este presupusă continuă în intervalul $[a,b]$ şi cu derivate succesive până la ordinul $2n+i+k$.

In această lucrare vom da o formulă de cuadratură pentru integrala (1), în care vor interveni valori ale funcţiei $f(x)$ în interiorul intervalului $[a, b]$ şi valori ale lui $f(x)$ şi ale derivatelor succesive până la ordinul $n+i-1$ în punctul $a$ şi până la ordinul $n+k-1$ în punctul $b$.

In acest scop vom întrebuinţa o metodă dată de J. Radon [4], care ne va conduce în mod natural la formula pe care o avem în vedere.

In intervalul $[a, b]$, luăm punctele $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ arbitrare astfel ca

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b \tag{2}$$

şi la fiecare interval $(x_{h-1}, x_h)$ ataşăm funcţia $\varphi_h(x)$ integrală a ecuaţiei diferenţiale

$$\varphi_h^{(2n+i+k)}(x)=(-1)^{i+k}p(x) \qquad (h=1,2,\ldots,n+1) \tag{3}$$

Funcţiile $\varphi_h(x)$ vor mai satisface şi alte condiţii, pe care le vom preciza mai departe.

Inlocuind integrala I cu suma integralelor relativ la intervalele



$(x_{h-1}, x_h)$ şi înlocuind pe $p(x)$ pe rând cu $(-1)^{i+k}\varphi_h^{(2n+i+k)}(x)$ vom putea scrie

$$I=(-1)^{i+k}\sum_{h=1}^{n+1}\int_{x_{h-1}}^{x_h}\varphi_h^{(2n+i+k)}(x)\,f(x)\,dx\,.$$

Folosind formula de integrare prin părţi generalizată, vom avea

$$I=(-1)^{i+k}\sum_{h=1}^{n+1}\Big[\varphi_h^{(2n+i+k-1)}(x)\,f(x)-\varphi_h^{(2n+i+k-2)}(x)\,f'(x)+\cdots+ (-1)^{(2n+i+k-1)}\varphi_h(x)\,f^{(2n+i+k-1)}(x)\Big]_{x_{h-1}}^{x_h}+\sum_{h=1}^{n+1}\int_{x_{h-1}}^{x_h}\varphi_h(x)\,f^{(2n+i+k)}(x)\,dx\,. \tag{4}$$

Să alegem funcţiile $\varphi_h(x)$ astfel, ca în formula (4) să dispară cât mai mulţi termeni. In acest scop vom introduce următoarele condiţii:

$$\varphi_h^{(l)}(x_h)=\varphi_{h+1}^{(l)}(x_h) \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\ldots,n \\ l=0,1,\ldots,2n+i+k-2\end{pmatrix} \tag{5}$$

precum şi condiţiile:

$$\varphi_1^{(l)}(a)=0 \qquad (l=0,1,\ldots,n+k-1) \tag{6}$$

şi

$$\varphi_{n+1}^{(l)}(b)=0 \qquad (l=0,1,\ldots,2n+i-1) \tag{7}$$

Vom arăta mai departe că funcţiile $\varphi_h(x)$ sunt bine determinate de condiţiile (5), (6), (7).

Cu această determinare a funcţiilor $\varphi_h(x)$, formula (4) se simplifică şi se transformă în următoarea *formulă generală de cuadratură mecanică*,

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}C_j\,f(x_j)+\sum_{l=0}^{n+i-1}A_l\,f^{(l)}(a)+\sum_{l=0}^{k-1}B_l\,f^{(l)}(b)+R \tag{8}$$

unde

$$C_j=(-1)^{i+k}\left[\varphi_j^{(2n+i+k-1)}(x_j)-\varphi_{j+1}^{(2n+i+k-1)}(x_j)\right] \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

$$A_l=(-1)^{i+k}\,\varphi_1^{(2n+i+k-l-1)}(a) \qquad (l=0,1,\ldots,n+i-1) \tag{10}$$

$$B_l=(-1)^{i+k}\,\varphi_{n+1}^{(2n+i+k-l-1)}(b) \qquad (l=0,1,\ldots,k-1) \tag{11}$$

şi

$$R=\int_a^b\varphi(x)\,f^{(2n+i+k)}(x)\,dx\,. \tag{12}$$

unde $\varphi(x)$ este funcţia care coincide cu $\varphi_h(x)$ în intervalele $(x_{h-1}\, x_h)$.

2. Să determinăm funcțiile $\varphi_h(x)$. Integrala ecuației diferențiale (3) pentru $h=n+1$, care satisface condițiile (7) se găsește imediat. Notând

$$\psi(x)=\int_a^b \frac{(u-x)^{2n+i+k-1}}{(2n+i+k-1)!}\,p(u)\,du-\frac{1}{(2n+i+k-1)!}\sum_{h=0}^{k-1} C_{2n+i+k-1}^{h}\,\lambda_h(l-x)^{2n+i+k-1} \tag{13}$$

unde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ sunt $k$ constante arbitrare, avem

$$\varphi_{n+1}(x)=\psi(x) \tag{14}$$

Integrând apoi ecuația (3) pentru $h=n$, cu condițiile (5) în care $h=n$, se găsește

$$\varphi_n(x)=\psi(x)-K_n\frac{(x_n-x)^{2n+i+k-1}}{(2n+i+k-1)!} \tag{14'}$$

unde $K_n$ este o constantă arbitrară.

Continuând în același mod se ajunge la

$$\varphi_1(x)=\psi(x)-\sum_{j=1}^{n} K_j\frac{(x_j-x)^{2n+i+k-1}}{(2n+i+k-1)!} \tag{14''}$$

unde $K_1, K_2, \dots, K_n$ sunt constante arbitrare.

Constantele $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ și $K_1, K_2, \dots, K_n$ se determină scriind că și condițiile (6) sunt satisfăcute. Se ajunge astfel la sistemul de ecuații lineare.

$$\sum_{r=0}^{-1} C_{2n+i+k-h}^{r}\,\lambda_r\,(b-a)^{2n+i+k-h-r}+\sum_{j=1}^{n} K_j\,(x_j-a)^{2n+i+k-h} =\int_a^b p(x)(x-a)^{2n+i+k-h}\,dx \tag{15}$$

unde $h=1,2,\dots,n+k$.

3. Să arătăm cum se rezolvă sistemul de ecuații lineare (15). Se scriu ultimele $k+1$ ecuații (15), în care $l=1,2,\dots,n$ și le înmulțim respectiv cu

$$(l-a)^{k+l-1},\ C_{k+l-1}^{1}(b-a)^{k+l-2},\ \dots\ (-1)^{k+l-1}C_{k+l-1}^{k+l-1}$$

primul multiplicator referindu-se la ultima ecuație (15). Se arată că prin această operație termenii în $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ dispar și se ajunge astfel la ecuația în $K_1, K_2, \dots, K_n$

$$\sum_{j=1}^{n} K_j\,(x_j-a)^{n+i}(l-x_j)^{k+l-1}=\int_a^b p(x)\,(x-a)^{n+i}(l-x)^{k+l-1}\,dx. \tag{16}$$

Făcând $l=1,2,\dots,n$ vom avea un sistem de $n$ ecuații în $K_1, K_2, \dots, K_n$. Notând:

$$K_j\,(x_j-a)^{n+i}(l-x_j)^{k}=\overline{K_j} \qquad (j=1,2,\dots,n) \tag{17}$$



și

$$p(x)\,(x-a)^{n+i}(b-x)^{k} = p_2(x) \tag{18}$$

se ajunge la sistemul de ecuații lineare

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{K_j}\,x_j^{r}=\int_a^b p_2(x)\,x^{r}\,dx \qquad (r=0,1,\dots,n-1) \tag{19}$$

pentru determinarea lui $K_1, K_2, \dots, K_n$. Acest sistem este compatibil, deoarece determinantul lui este determinantul V a n d e r m o n d e al absciselor distincte $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Odată rezolvat sistemul (19), ecuațiile (17) ne vor da valorile lui $K_1, K_2, \dots, K_n$. Purtând acestea în ultimele $k$ ecuații (15) vom avea sistemul de ecuații în $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$

$$\sum_{r=0}^{k-1} C_{n+i+h}^{r}\,\lambda_r\,(b-a)^{n+i+h-r}=\int_a^b p(x)\,(x-a)^{n+i+h}\,dx-\sum_{j=1}^{n} K_j\,(x_j-a)^{n+i+h} \tag{20}$$

unde $h = 0,1,\dots,k-1$.

Determinantul acestui sistem în $\lambda_0, \frac{\lambda_1}{b-a}, \dots, \frac{\lambda_{k-1}}{(b-a)^{k-1}}$, fiind egal cu 1, sistemul este compatibil.

Cu aceasta funcțiile $\varphi^h(x)$ integrale ale ecuațiilor diferențiale (3) și care satisfac condițiile (5), (6) și (7) sunt perfect determinate. Calculul a arătat *unicitatea* lor.

4. Din formulele (14), (14'), (14'') se deduce că

$$\varphi_h(r)-\varphi_{h+1}(x)=-K_h\frac{(x_h-x)^{2n+i+k-1}}{(2n+i+k-1)!} \qquad (h=1,2,\dots,n) \tag{21}$$

Derivând aceste ecuații de $2n+i+k-1$ ori în raport cu $x$, și făcând $x = x_h$, se obțin formule care, comparate cu formulele (9), ne conduc să scriem

$$K_1 = C_1,\ K_2 = C_2, \dots, K_n = C_n. \tag{22}$$

In toate formulele care vor urma vom putea scrie $C_1, C_2, \dots, C_n$ în loc de $K_1, K_2, \dots, K_n$.

5. Să privim acum în ecuațiile de mai sus pe $x_1, x_2, \dots, x_n$ ca necunoscute. Să ne întrebăm dacă nu este posibil să determinăm pe $x_1, x_2, \dots, x_n$ astfel, ca funcția $\varphi_1(x)$ să satisfacă în afară de condițiile (6) în punctul $a$ și condițiile

$$\varphi_1^{(l)}(\,)=0 \qquad (l = n+k,\ n+k+1, \dots, 2n+k-1) \tag{23}$$

Dacă problema aceasta este posibilă, atunci formula (8) se scrie sub forma

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n} C_j\,f(x_j)+\sum_{l=0}^{i-1} A_l\,f^{(l)}(a)+\sum_{l=0}^{k-1} B_l\,f^{(l)}(b)+R. \tag{24}$$

Ţinând seama de condiţiile (6) şi (23), suntem conduşi la sistemul de ecuaţii

$$\sum_{r=0}^{k-1} C^{r}_{i+h}\lambda_r (b-a)^{i+h-r}+\sum_{j=1}^{n} C_j (x_j-a)^{i+h}=\int_a^b p(x)(x-a)^{i+h}\,dx \tag{25}$$

unde $h=0,1,\ldots,2n+k-1$.

Numărul acestor ecuaţii este $2n+k$, iar necunoscutele sunt $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}, C_1, C_2, \ldots, C_n$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Eliminând ca la No. 3 pe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ şi notând

$$C_j (x_j-a)^i (b-x_j)^k = C'_j \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{26}$$

şi

$$p(x)\,(x-a)^i (x-q)^k = p_3(x) \tag{27}$$

vom obţine sistemul de ecuaţii în $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\sum_{j=1}^{n} C'_j x_j^r=\int_a^b p_3(x)\,x^r\,dx \tag{28}$$

unde $r=0,1,\ldots,2n-1$.

Acest sistem intervine în formula de cuadratură mecanică a lui Stieltjes [5], care constă în determinarea constantelor $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ şi a absciselor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel ca să avem identitatea

$$\int_a^b p_3(x)\,F(x)\,dx=C'_1F(x_1)+C'_2F(x_2)+\cdots+C'_nF(x_n) \tag{29}$$

pentru orice polinom $F(x)$ de gradul $2n-1$.

Este suficient să se scrie că identitatea (29) este satisfăcută pentru $F(x)=1, x, \ldots, x^{2n-1}$, ca să se obţină ecuaţiile (28).

Eliminând pe $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ între ecuaţiile (28) se arată că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile ecuaţiei

$$Q_n(x)=\begin{vmatrix} 1 & x\ldots & x^n \\ c_0 & c_1\ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n\ldots & c_{2n-1}\end{vmatrix} \tag{30}$$

unde

$$c_\alpha=\int_a^b p_3(x)\,x^\alpha\,dx \qquad (\alpha=0,1,\ldots,2n-1)$$

Sub această formă se vede imediat că avem

$$\int_a^b p_3(x)\,Q_n(x)\,x^k\,dx=0,$$



pentru $k=0,1,\ldots,n-1$, sau

$$\int_a^b p_3(x)\,Q_n(x)\,Q_m(x)\,dx=0 \qquad (n\neq m) \tag{31}$$

ceeace dovedeşte că *polinoamele $Q_n(x)$ formează un şir de polinoame ortogonale faţă de funcţia $p_3(x)$.*

Datorită ipotezei că funcţia $p(x)$ şi deci $p_3(x)$ dată de formula (27) nu se anulează în intervalul deschis $(a, b)$ se ştie, după cum a arătat Stieltjes (5), că *ecuaţia (30) are rădăcinile reale, distincte şi cuprinse între $a$ şi $b$.*

Deci problema pusă la începutul acestui număr este posibilă, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt determinate de ecuaţia (30) apoi primele $n$ ecuaţii (28) ne vor da valorile lui $C'_1, C_2, \ldots, C'_n$ iar ecuaţiile (26) ne vor da valorile lui $C_1, C_2, \ldots, C_n$ Tot Stieltjes [5] a demonstrat că coeficienţii $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ sunt pozitivi, de unde rezultă că şi *coeficienţii $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt pozitivi.*

Am stabilit astfel formula (24), care face obiectul principal al acestei lucrări. Ea este analoagă cu formula clasică de cuadratură a lui Gauss şi a lui Stieltjes [5] şi le cuprinde pe acestea, după cum vom vedea mai departe.

Deosebirea dintre formula generală de cuadratură (8) şi formula de cuadratură (24) stă în faptul că în formula (8) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt arbitrare, pe când în formula (24) $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sunt rădăcinile reale distincte şi cuprinse între $a$ şi $b$ ale polinomului $Q_n(x)$ dat de formula (30). Apoi în formula generală (8), funcţiile $\varphi_h(x)$ satisfac ecuaţiile diferenţiale (3), şi condiţiile (5), (6), (7), pe când în formula (24) aceste funcţii mai satisfac şi condiţiile (23). Această deosebire face ca în membrul al doilea al formulei (24) să avem $n$ termeni mai puţini ca în formula (8).

Dacă notăm cu $\varphi(x)$ funcţia care coincide cu $\varphi_h(x)$ în intervalele $[x_{h-1}, x_h]$, $(h=1,2,\ldots,n+1)$, observăm că în formula (24), atât restul R, cât şi toţi coeficienţii $C_1, C_2, \ldots, C_n, A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$ se exprimă cu ajutorul lui $\varphi(x)$.

Avem întâi

$$R=\int_a^b \varphi(x)\,f^{(2n+i+k)}(x)\,dx \tag{32}$$

Apoi, datorită condiţiilor (5), funcţia $\varphi(x)$ este continuă în intervalul închis $[a, b]$, împreună cu toate derivatele succesive până la ordinul $2n+i+k-2$, inclusiv. Derivata de ordinul $2n+i+k-1$ este însă discontinuă în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, care sunt puncte de discontinuitate de speţa întâia. Salturile corespunzătoare ale lui $\varphi^{(2n+i+k-1)}(x)$ în valoare absolută sunt tocmai coeficienţii $C_1, C_2, \ldots, C_n$ din formula (24). In mod precis, avem

$$C_j=(-1)^{i+k}[\varphi^{(2n+i+k-1)}(x_j-0)-\varphi^{(2n+i+k-1)}(x_j+0)] \tag{33}$$

pentru $j=1,2,\ldots,n$.

In punctul $a$ avem

$$\varphi^{(l)}(a)=0 \qquad (l=0,1,\ldots,2n+k-1) \tag{34}$$

și

(35) $$A_l = (-1)^{i+k-l-1}\,\varphi^{(2n+i+k-l-1)}(a) \qquad (l = 0, 1, \ldots, i-1)$$

In punctul $b$ avem:

(36) $$\varphi^{(l)}(b) = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, 2n+i-1)$$

și

(37) $$B_l = (-1)^{i+k+l}\,\varphi^{(2n+i+k-l-1)}(b) \qquad (l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

6. Funcția $\varphi(x)$ din formula (24) mai are o proprietate importantă și anume: *curba $y = \varphi(x)$ are un singur extremum în intervalul deschis $(a, b)$*. Aceasta rezultă din condițiile (5) din punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și din condițiile (34) și (36) relative la punctele $a$ și $b$.

Intr'adevăr să presupunem că ar exista două puncte $\xi_{11}$, $\xi_{12}$ din intervalul deschis $(a, b)$, în care funcția $\varphi(x)$ ar avea câte un extremum. Ar urma ca derivata $\varphi'(x)$ să se anuleze în punctele $\xi_{11}$, $\xi_{12}$, la care mai adăugăm și punctele $a$ și $b$. Derivata $\varphi''(x)$ fiind continuă în $[a, b]$, aplicând teorema lui Rolle, vom deduce că ea se va anula în punctele $\xi_{21}$, $\xi_{22}$, $\xi_{23}$ din $(a, b)$, la care adăugăm și punctele $a$ și $b$. Acest raționament se va continua, până se ajunge la concluzia că *derivata $\varphi^{(2n+i+k-2)}(x)$ se va anula în $2n+3$ puncte*

(38) $$\xi_{2n+i+k-2,1}\,;\quad \xi_{2n+i+k-2,2}\,, \ldots,\ \xi_{2n+i+k-2,2n+3}$$

*din intervalul deschis $(a, b.)$*

Să observăm că în intervalul închis $[x_{h-1}, x_h]$ nu pot exista trei din punctele $\xi$ ale șirului (38). Intr'adevăr derivata $\varphi^{(2n+i+k-1)}(x)$ fiind continuă în intervalul $[x_{h-1}, x_h]$ s'ar anula în două puncte din acest interval, iar derivata

$$\varphi^{(2n+i+k)}(x) = (-1)^{i+k} p(x)$$

s'ar anula într'un punct din intervalul deschis $(a, b)$, ceeace este imposibil, deoarece s'a presupus că funcția $p(x)$ nu se anulează între $a$ și $b$.

Deci în intervalele $(a, x_1]$, $(x_1, x_2], \ldots, (x_n, b)$ nu pot exista decât câte cel mult două puncte din șirul (38), astfel încât numărul lor nu poate să fie decât cel mult $2(n+1) = 2n+2$. Dar s'a văzut că numărul punctelor șirului (38) este $2n+3$. S'a ajuns astfel la o contrazicere, de unde rezultă că funcția $\varphi(x)$ nu poate să aibă decât un singur extremum în intervalul $(a, b.)$.

7. O consecință a teoremei precedente este că *funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(a, b)$*.

Dacă notăm

(39) $$S = \int_a^b \varphi(x)\,dx\,,$$

expresia (32) a restului R, din formula (24) poate să fie scrisă sub forma

(40) $$R = \mu\, S$$

unde $\mu$ este un număr cuprins între marginea inferioară și marginea superioară a derivatei $f^{(2n+i+k)}(x)$ în intervalul $(a, b)$.



Dacă derivata $f^{(2n+i+k)}(x)$ este continuă în intervalul $(a, b)$, putem scrie pe R sub forma:

(41) $$R = S\, f^{(2n+i+k)}(\xi)$$

unde $\xi$ este un anumit număr din intervalul $(a, b)$

8. Formula de cuadratură (8) este importantă din punctul de vedere al calculului practic. Să presupunem că aplicăm formula de cuadratură (24) luând pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului $Q_n(x)$. Insă aceste rădăcini sunt în general numere iraționale și dacă facem calcule efective, suntem obligați să ne oprim la valori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ ori cât de apropiate de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dacă am lua ca valoare apropiată a integralei (1) suma

(42) $$\sum_{j=1}^{n} C_j f(\overline{x}_j) + \sum_{l=0}^{i-1} A_l f^{(l)}(a) + \sum_{l=0}^{k-1} B_l f^{(l)}(b)$$

și am spune că restul este egal cu

(43) $$R = \int_a^b \varphi(x) f^{(2n+i+k)}(x)\,dx\,,$$

am comite o eroare, deoarece formula (24) nu este valabilă decât dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile exacte ale polinomului $Q_n(x)$.

In calculele practice se va recurge atunci la formula generală de cuadratură (8), luând $x_1 = \overline{x}_1, \ldots, x_n = \overline{x}_n$. In acest caz, dacă luăm ca valoare apropiată a integralei de mai sus expresia (42), unde $C_1$, $C_2, \ldots, C_n$ $A_0, A_1, \ldots A_{i-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$ au valorile care corespund la $x_1 = \overline{x}_1, \ldots, x_n = \overline{x}_n$, eroarea este dată de formula (43), la care însă trebue să mai adăugăm și termenii corectivi din formula (8)

(44) $$\sum_{l=i}^{n+i-1} A_l f^{(l)}(a)\,.$$

9. Să facem o aplicație a formulei de cuadratură a formulei (24) luând $n = 1$, $i = 1$, $k = 1$. In acest caz $f(x)$ fiind o funcție continuă cu derivate succesive până la ordinul al patrulea, avem formula

(45) $$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = A_0 f(a) + C_1 f(x_1) + B_0 f(b) + R$$

In această formulă avem

$$x_1 = \frac{\displaystyle\int_a^b p(x)(x-a)(b-x)\,x\,dx}{\displaystyle\int_a^b p(x)(x-a)(b-x)\,dx}$$

$$
(46)\qquad
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\left[\int_a^b p(x)(x-a)(b-x)\,dx\right]^3}{\int_a^b p(x)(x-a)^2(b-x)\,dx \int_a^b p(x)(x-a)(b-x)^2\,dx}\\[2ex]
A_0 &= \frac{\int_a^b\int_a^b p(x_1)p(x_2)(b-x_1)(b-x_2)(x_2-x_1)^2\,dx_1dx_2}{2(b-a)\int_a^b p(x)(x-a)^2(b-x)\,dx}\\[2ex]
B_0 &= \frac{\int_a^b\int_a^b p(x_1)p(x_2)(x_1-a)(x_2-a)(x_2-x_1)^2\,dx_1dx_2}{2(b-a)\int_a^b p(x)(x-a)(b-x)^2\,dx}
\end{aligned}
$$

Din aceste formule se vede că $x_1$ este cuprins între $a$ și $b$, iar coeficienții $A_0$, $B_0$, $C_1$ sunt pozitivi.

Restul R din formula (45) este dat de formula

$$
(47)\qquad R=\int_a^b \varphi(x)\, f^{(IV)}(x)\,dx
$$

unde funcția $\varphi(x)$ este compusă din funcția $\varphi_1(x)$ în intervalul $(a, x_1)$ și din funcția $\varphi_2(x)$ în intervalul $(x_1, b)$. Acestea sunt integrale ale ecuației

$$
(48)\qquad \varphi^{(IV)}(x) = p(x)
$$

care satisfac la condițiile

$$
(48')\qquad \varphi_1(a)=\varphi_1'(a)=\varphi_1''(a)=0,\quad \varphi_2(b)=\varphi_2'(b)=\varphi_2''(b)=0
$$

$$
(48'')\qquad \varphi_1(x)=\varphi_2(x),\quad \varphi_1'(x_1)=\varphi_2'(x_1),\quad \varphi_1''(x_1)=\varphi_2''(x_1)
$$

In cazul particular $p(x) = 1$, formula (45) se reduce la formula clasică a lui Simpson; $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ au expresiile:

$$
(49)\qquad \varphi_1(x)=\frac{(x-a)^3}{24}\left(x-\frac{2b+a}{3}\right),\quad \varphi_2(x)=\frac{(b-x)^3}{24}\left(\frac{2a+b}{3}-x\right)
$$

care sunt date și în memoriul lui J. Radon [4].

Curba $y = \varphi(x)$ este situată sub axa $0x$, ea este tangentă la axa $0x$ în punctele $x = a$, $x = b$, are două puncte de inflexiune pentru $x = \frac{2a+b}{3}$



$x=\frac{a+2b}{3}$ și cele două ramuri $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ se racordează în punctul $x = \frac{a+b}{2}$ în care avem relațiile (48").

Dacă funcția $f(x)$ are derivata $f^{(IV)}(x)$ continuă în intervalul $(a, b)$, atunci putem scrie expresia (47) a restului R, sub forma:

$$
(49')\qquad R=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(IV)}(\xi)
$$

10. Dacă presupunem în toate chestiunile tratate mai sus la n-rele 1—9 că $i = 0$, vom integra ecuațiile diferențiale

$$
(50)\qquad \varphi_h^{(2n+k)}(x) = (-1)^k p(x) \qquad (h=1,2,\ldots,n+1)
$$

cu condițiile următoare:

$$
(51)\qquad \varphi_h^{(l)}(x_h)=\varphi_{h+1}^{(l)}(x_h) \qquad \left(\begin{matrix}h=1,2,\ldots,n\\ l=0,1,\ldots,2n+k-2\end{matrix}\right)
$$

și

$$
(52)\qquad \varphi_1^{(l)}(a)=0 \qquad (l=0,1,\ldots,n-1)
$$

$$
(53)\qquad \varphi_{n+1}^{(l)}(b)=0 \qquad (l=0,1,\ldots,2n+k-1)
$$

și vom fi conduși la formula de cuadratură

$$
(54)\qquad \int_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j)+\sum_{l=0}^{n+k-1} A_l f^{(l)}(a)+R
$$

Notând cu $\varphi(x)$ funcția care coincide pe rând cu $\varphi_h(x)$ în intervalul $(x_{h-1}, x_h)$ unde $h = 1, 2, \ldots, n+1$, avem

$$
(55)\qquad C_j=(-1)^k\left[\varphi^{(2n+k-1)}(x_j-0)-\varphi^{(2n+k-1)}(x_j+0)\right] \qquad (j=1,2,\ldots,n)
$$

$$
(56)\qquad A_l=(-1)^{k+l-1}\varphi^{(2n+l-k-1)}(\;) \qquad (l=0,1,\ldots,n+k-1)
$$

și

$$
(57)\qquad R=\int_a^b \varphi(x)f^{(2n+k)}(x)\,dx
$$

*Este posibil să alegem pe* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *astfel ca în formula* (54) *să avem* $A_k=A_{k+1}=\ldots=A_{k+n-1}=0$?

Pentru aceasta trebue ca $\varphi_1(x)$ să mai verifice în punctul $a$ și condițiile

$$
(52')\qquad \varphi_1^{(l)}(a)=0, \qquad (l=n, n+1,\ldots,2n-1)
$$

Se arată că în acest caz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile ecuației

$$
(58)\qquad S_n(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^n\\ c_0' & c_1' & \ldots & c_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n-1}' & c_n' & \ldots & c_{2n-1}'\end{vmatrix}
$$

unde

$$c'_\alpha = \int_a^b p_4(x)\, x^\alpha\, dx \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2n-1)$$

și

(59) $$p_4(x) = (x-a)^k\, p(x)$$

Se arată că:

$$\int_a^b p_4(x)\, S_n(x)\, S_m(x)\, dx = 0 \qquad (n \neq m)$$

ceeace dovedește că *polinoamele $S_n(x)$ formează un șir de polinoame ortogonale față de funcția $p_4(x)$*. In intervalul deschis $(a,b)$, $p_4(x)$ neanulându-se, *ecuația (58) are toate rădăcinile reale distincte și cuprinse între $a$ și $b$.*

Formula (54) devine formula de cuadratură

(60) $$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j) + \sum_{l=0}^{k-1} A_l f^{(l)}(a) + R$$

care este analoagă formulei lui Stieltjes.

In formula (60) *coeficienții $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt toți pozitivi.*

Se arată că la No. 6, că *funcția $\varphi(x)$ care intră în formula (60) și care determină toți coeficienții $C_j$, $A_l$ precum și restul R, este pozitivă, dovedindu-se că curba $y = \varphi(x)$ are un singur extremum în intervalul deschis $(a, x_n)$.*

Se poate face aceeași observație ca la No. 8, cu privire la calculul numeric apropiat al integralei (1), din care rezultă importanța formulei (54).

Ca aplicație să alegem $n = k = 1$; vom avea formula

(61) $$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = A_0 f(a) + C_1 f(x_1) + R,$$

pe care o deducem din formula (60). Avem

(62)
$$x_1 = \frac{\int_a^b p(x)(x-a)\, x\, dx}{\int_a^b p(x)(x-a)\, dx}$$

$$A_0 = \frac{\int_a^b \int_a^b p(x_1)\, p(x_2)\, (x_2 - x_1)^2\, dx_1 dx_2,}{\int_a^b p(x)(x-a)^2\, dx}$$



$$C_1 = \frac{\left[\int_a^b p(x)(x-a)\, dx\right]^2}{\int_a^b p(x)(x-a)^2\, dx}$$

Se vede bine că $x_1$, este cuprins între $a$ și $b$, și că $A_0, C_1$ sunt pozitivi, conform teoriei generale. Restul R este dat de formula

(63) $$R = \int_a^b \varphi(x) f'''(x)\, dx\,,$$

unde funcția $\varphi(x)$ este compusă din $\varphi_1(x)$ în intervalul $(a, x_1)$ și $\varphi_2(x)$ în intervalul $(x_1, b)$. Acestea sunt integralele ecuației

(64) $$\varphi'''(x) = -p(x)$$

care satisfac condițiile:

(65) $$\varphi_1(a) = \varphi'_1(a) = 0, \qquad \varphi_2(b) = \varphi'_2(b) = 0$$

(66) $$\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1)\,, \qquad \varphi'_1(x_1) = \varphi'_2(x_1)$$

Când $p(x) = 1$, formula (61) devine:

(67) $$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right] + R$$

și avem:

(68) $$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^2}{6}\left[\frac{a+3b}{4} - x\right], \quad \varphi_2(x) = \frac{(b-x)^3}{6}$$

Curba $y = \varphi(x)$ este tangentă în $a$ și $b$ la axa $0x$, are un maximum pentru $x = \dfrac{a+b}{2}$ are un punct de inflexiune pentru $x = \dfrac{3a+b}{4}$ și ramurile $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ se racordează în punctul $x_1 = \dfrac{a+2b}{3}$, în care avem relațiile (66).

Dacă $f'''(x)$ este o funcție continuă în intervalul $(a, b)$, avem pentru expresia (63) a lui R,

(69) $$R = \frac{(b-a)^4}{216} f'''(\xi)$$

unde $\xi$ este un număr cuprins între $a$ și $b$.

11. Dacă presupunem în toate chestiunile tratate la n-rele 1—9 că $i = k = 0$, vom integra ecuațiile diferențiale

(70) $$\varphi_h^{(n)}(x) = p(x) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n+1)$$

cu condiţiile următoare

(71) $$\varphi_h^{(l)}(x_h)=\varphi_{h+1}^{(l)}(x_h) \qquad \begin{pmatrix} h=1,2,\dots,n \\ l=0,1,\dots,2n-2 \end{pmatrix}$$

şi

(72) $$\varphi_1^{(l)}(a)=0 \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

(73) $$\varphi_{n+1}^{(l)}(b)=0 \qquad (l=0,1,\dots,2n-1)$$

suntem conduşi la formula de cuadratură

(74) $$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}C_j f(x_j)+\sum_{l=0}^{n-1}A_l f^{(l)}(a)+R.$$

Notând cu $\varphi(x)$ funcţia care coincide pe rând cu $\varphi_h(x)$ în intervalul $(x_{h-1}, x_h)$ unde $h=1,2,\dots,n+1$, avem

(75) $$C_j=\varphi^{(2n-1)}(x_j-0)-\varphi^{(2n-1)}(x_j+0) \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

(76) $$A_l=(-1)^{l+1}\,\varphi_1^{(2n-l-1)}(a) \qquad (l=0,1,\dots,n-1)$$

şi

(77) $$R=\int_a^b \varphi(x)f^{(2n)}(x)\,dx$$

Ca şi mai sus ne putem întreba *dacă este posibil să se aleagă* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *astfel ca în formule (74) să avem* $A_0=A_1=\dots=A_{n-1}=0$. In acest caz $\varphi_1(x)$ mai verifică în punctul $a$ şi condiţiile

(78) $$\varphi_1^{(l)}(a)=0 \qquad (l=n, n+1, \dots, 2n-1)$$

Se arată că $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt rădăcinile reale distincte şi cuprinse între $a$ şi $b$ ale ecuaţiei

(79) $$T_n(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^n \\ c_0'' & c_1'' & \dots & c_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1}'' & c_n'' & \dots & c_{2n-1}'' \end{vmatrix}=0$$

unde

$$c_\alpha''=\int_a^b p(x)x^\alpha\,dx \qquad (\alpha=0,1,\dots,2n-1)$$

Se ajunge pe această cale la formula clasică a lui Stieltjes

(80) $$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}C_j f(x_j)+R$$

în care toţi coeficienţii $C_j$ sunt pozitivi.

*Se demonstrează că la No. 6, datorită condiţiilor (72), (73) şi (78)*



*că funcţia $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalul $(a,b)$ arătându-se că curba $y=\varphi(x)$ are un singur maximum în intervalul deschis $(x_1, x_n)$.*

Se poate face aceeaşi observare ca la no. 8, cu privire la calculul aproximativ al integralei (1), când se întrebuinţează formula (80) a lui Stieltjes, din care va rezulta importanţa formulei de cuadratură (74).

Ca aplicaţie a formulei (1) să alegem $n=1$. Vom avea

(81) $$\int_a^b p(x)f(x)\,dx = C_1 f(x_1) + R$$

unde

(82) $$x_1=\frac{\int_a^b p(x)\,x\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}$$

$$C_1=\int_a^b p(x)\,dx$$

şi

(83) $$R=\int_a^b \varphi(x)f''\,dx$$

unde $\varphi(x)$ coincide în intervalele $(a, x_1)$, $(x_1, b)$ cu integralele ecuaţiei diferenţiale

(84) $$\varphi''(x)=p(x)$$

care satisface condiţiile

(85) $$\varphi_1(a)=\varphi_1'(a)=0 \qquad \varphi_2(b)=\varphi_2'(b)=0.$$
$$\varphi_1(x_1)=\varphi_2(x_1).$$

Când $p(x)=1$, formula (81), se reduce la

(86) $$\int_a^b f(x)\,d(x)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+R,$$

şi avem

(87) $$\varphi_1(x)=\frac{(x-a)^2}{2}, \qquad \varphi_2(x)=\frac{(b-x)^2}{2}$$

Curba $y=\varphi(x)$ este tangentă la axa $0x$ în punctele a şi b şi ramurile $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ se racordează în punctul $x=\frac{a+b}{2}$, unde avem relaţia (85).

Dacă $f''(x)$ este continuă în intervalul $(a,b)$ avem:

(88) $$R=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$$

unde $\xi$ este un număr cuprins între $a$ şi $b$.

## 2. Cazul $n = 0$.

12. Să reluăm integrala (1) şi să facem asupra lui $p(x)$ aceleaşi ipoteze ca la no. 1, iar despre $f(x)$ să presupunem că este continuă şi are derivate succesive până la ordinul $i+k$. La integrala (1) să ataşăm ecuaţia diferenţială

$$\varphi^{(i+k)}(x)=(-1)^{i+k}p(x) \tag{89}$$

pe care s'o integrăm cu condiţiile la limită

$$\varphi^{(l)}(a)=0, \qquad (l=0,1,\ldots,k-1) \tag{90}$$

$$\varphi^{(l)}(b)=0, \qquad (l=0,1,\ldots,i-1) \tag{91}$$

Procedând ca la No. 1, se ajunge la formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{l=0}^{i-1}A_l f^{(l)}(a)+\sum_{l=0}^{k-1}B_l f^{(l)}(b)+R, \tag{92}$$

unde

$$A_l=(-1)^{i+k-l-1}\varphi^{(i+k-l-1)}(a) \qquad (l=0,1,\ldots,i-1) \tag{93}$$

$$B_l=(-1)^{i+k-l}\varphi^{(i+k-l-1)}(b) \qquad (l=0,1,\ldots,k-1) \tag{94}$$

iar

$$R=\int_a^b\varphi(x)f^{(i+k)}(x)\,dx. \tag{95}$$

13. Se arată că funcţia $\varphi(x)$ este bine determinată de ecuaţia diferenţială (89) şi de condiţiile (90), (91). Ea este dată de formula

$$\varphi(x)=\int_a^b p(u)\frac{(u-x)^{i+k-1}}{(i+k-1)!}du-\frac{1}{(i+k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}C^j_{i+k-1}\lambda_j(b-x)^{i+k-j-1} \tag{96}$$

unde constantele $\lambda_j$ sunt determinate de sistemul de ecuaţii

$$\sum_{j=0}^{k-1}C^j_{i+h}\lambda_j(b-a)^{i+h-j}=\int_a^b p(u)(u-a)^{i+h}du \qquad (h=0,1,\ldots,k-1) \tag{97}$$

care se poate transforma în:

$$\sum_{j=0}^{h}C^j_{i-h}\lambda_{k-h+j-1}(b-a)^{i-j}=(-1)^{k-h-1}\int_a^b p(u)(u-a)^i(b-u)^{k-h-1}du. \tag{98}$$

$$(h=0,1,\ldots,k-1)$$

Prima din aceste ecuaţii determină pe $\lambda_{k-1}$, a doua pe $\lambda_{k-2}$, ultima pe $\lambda_0$.

14. Se arată ca la no. 6, că *funcţia $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(a,b)$*, demonstrându-se că curba $y=\varphi(x)$ nu poate să aibă două extreme în intervalul deschis $(a, b)$.



Ca urmare a acestei teoreme rezultă, că dacă derivata $f^{(i+k)}(x)$ este continuă în intervalul $(a,b)$, putem scrie expresia (95) a restului R sub forma

$$R=S f^{(i+k)}(\xi) \tag{99}$$

unde $\xi$ este un număr cuprins între $a$ şi $b$, iar S este

$$S=\int_a^b\varphi(x)\,dx \tag{100}$$

15. Deoarece s'a demonstrat că funcţia $\varphi(x)$ din formula (95) păstrează un semn constant în intervalul $(a,b)$, se poate aplica la formula (95) formulele de cuadratură din §. 1, adică formulele (24), (60), sau (80), presupunând, bine înţeles, că funcţia $f(x)$ are toate derivatele care figurează în calcule.

Să înlocuim în formula (92) pe $i$ şi $k$ cu $i'$ şi $k'$, iar coeficienţii $A_\alpha$ şi $B_\beta$ unde $\alpha=1,2,\ldots,i'-1$, $\beta=1,2,\ldots,k'-1$, cu $A'_\alpha$ şi $B'_\beta$.

Aplicând formula de cuadratură (24) suntem conduşi la o formulă de cuadratură de forma

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{j=0}^{n}C_j f^{(i'+k')}(x_j)+\sum_{\alpha=0}^{i'-1}A'_\alpha f^{(\alpha)}(a)+\sum_{\alpha=0}^{i-1}A_\alpha f^{(i'+k'+\alpha)}(a)+\sum_{\beta=0}^{k'-1}B'_\beta f^{(\beta)}(b)+\sum_{\beta=0}^{k-1}B_\beta f^{(i'+k'+\beta)}(b)+R \tag{101}$$

unde restul R are expresia

$$R=\int_a^b\psi(x)f^{(2n+i+k+i'+k')}(x)\,dx. \tag{102}$$

In formula (101) coeficienţii $A'_\alpha$ şi $B'_\beta$ sunt daţi de formulele (93), (94), în care se înlocuieşte $i$ şi $k$ cu $i'$ şi $k'$. Coeficienţii $A_\alpha$, $B_\beta$, $C_j$; abscisele $x_j$, precum şi funcţia $\psi(x)$ se determină aşa cum s'a explicat la no. 5.

*Formula (101) arată în cazul $i=k=o$ că, după cum se pot determina constantele $C_j$ şi absciesele $x_j$ astfel ca să avem formula lui* Stieltjes

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}C_j f(x_j)+R$$

*în care restul $R$ să fie nul pentru polinoame arbitrare de gradul $2n-1$, tot aşa se pot determina constantele $C_j$, $A'_\alpha$, $B'_\beta$ şi absciesele $x_j$, astfel ca să avem formula:*

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}C_j f^{(i'+k')}(x_j)+\sum_{\alpha=0}^{i'-1}A'_\alpha f^{(\alpha)}(a)+\sum_{\beta=0}^{k'-1}B'_\beta f^{(\beta)}(b)+R \tag{103}$$

*în care restul $R$ să fie nul pentru polinoame arbitrare de gradul $2n+i'+k'-1$.*

*In cazul când $i \neq 0$ și $k \neq 0$, formula (101) arată că se mai poate adăuga la termenii din membrul al doilea al formulei (103), termenii*

$$\sum_{\alpha=0}^{i-1} A_\alpha f^{(i'+k'+\alpha)}(a) + \sum_{\beta=0}^{k-1} B_\beta f^{(i'+k'+\beta)}(b)$$

*astfel ca restul R să fie nul, pentru polinoame arbitrare de gradul $2n+i+k+i'+k'-1$.*

16. Vom examina acum un caz particular al formulei (92), alegând

$$p(x) = (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\alpha-1} \tag{104}$$

unde $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Vom scrie formula (92) sub forma:

$$\int_a^b (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\alpha-1} f(x)\,dx \tag{105}$$

$$= (b-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta)\left[\sum_{\alpha=0}^{i-1} \lambda_\alpha \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(a) + \sum_{\beta=0}^{k-1} \mu_\beta \frac{(b-a)^\beta}{\beta!} f^{(\beta)}(b)\right] + R$$

unde $B(\alpha,\beta)$ este funcția euleriană de prima speță

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt \tag{106}$$

și vom arăta că *coeficienții $\lambda_\alpha$, $\mu_\beta$ sunt independenți de $a$ și $b$.*

Știm că formula (105) este verificată de un polinom arbitrar de gradul $i+k-1$. Pentru a determina coeficienții $\lambda_s$ înlocuim în ecuația (105) pe $f(x)$ cu $(b-x)^{k+s}$ unde $s = 0, 1, \ldots, i-1$.

In membrul întâi al ecuației (105) vom avea de calculat integrale de forma

$$J_s = \int_a^b (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\alpha+s-1}\,dx \tag{107}$$

Introducând notația lui Appell

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\ldots\ldots(\lambda+k-1) \quad [\lambda(0) = 1] \tag{108}$$

vom avea:

$$J_s = \frac{(\alpha, s)}{(\alpha+\beta, s)}(b-a)^{s+\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) \tag{109}$$

Ținând seama de aceste formule, coeficienții $\lambda_s$ sunt determinați de sistemul de ecuații lineare

$$\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{k+h}^j \lambda_j = \frac{(\alpha, h+k)}{(\alpha+\beta, h+k)} \qquad (h = 0, 1, \ldots, i-1) \tag{110}$$

De asemenea înlocuind în ecuația (105) pe $f(x)$ cu $(x-a)^{i+r}$ se deduce



sistemul de ecuații lineare

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{i+h}^j \mu_j = \frac{(\beta, i+h)}{(\alpha+\beta, i+h)} \qquad (h = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{111}$$

Sistemele (110), (111), fiind independente de $a$ și $b$, coeficienții $\lambda_j$ și $\mu_j$ din formula de cuadratură (105) sunt independenți de $a$ și $b$.

17. In cazul particular al formulei (105) când $\alpha = \beta$, și $i = k$, cele două sisteme (110), (111) în $(-1)^j \lambda_j$ și $\mu_j$ sunt identice. Se deduce astfel că

$$(-1)^j \lambda_j = \mu_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, k-1)$$

și suntem astfel conduși la următoarea formulă de cuadratură

$$\int_a^b [(x-a)(b-x)]^{\alpha-1} f(x)\,dx \tag{112}$$

$$= (b-a)^{2\alpha-1} B(\alpha,\alpha) \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \mu_r \frac{(b-a)^r}{r!}[f^{(r)}(b) + (-1)^r f^{(r)}(a)] + R$$

în care coeficienții $\mu_r$ sunt dați de ecuațiile lineare

$$\sum_{j=0}^{k-1} C_{k+h}^j \mu_j = \frac{(\alpha\ k+h)}{(\alpha+\beta, k+h)} \qquad (h = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{113}$$

18. Din formula generală (92) se deduce un caz particular important când se alege $p(x) = 1$. Formula care se obține este cunoscută sub numele de formula lui N. Obreschkoff[2]. Integrala ecuației diferențiale

$$\varphi^{(i+k)}(x) = (-1)^{i+k} \tag{114}$$

care satisface condițiile (90) și (91) este

$$\varphi(x) = (-1)^{i+k} \frac{(x-a)^k (b-x)^i}{(i+k)!} \tag{115}$$

și formulele (93), (94) ne arată că

$$A_l = \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{C_i^{l+1}}{C_{i+k}^{l+1}}, \quad B_l = (-)\frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{C_k^{l+1}}{C_{i+k}^{l+1}} \tag{116}$$

Suntem astfel conduși la formula lui N. Obreschkoff[2].

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} \frac{C_k^{l+1}}{C_{i+k}^{l+1}} f^{(l)}(b) + \sum_{l=0}^{i-1} \frac{C_i^{l+1}}{C_{i+k}^{l+1}} \frac{(l-a)^{l+1}}{(l+1)!} f^{(l)}(a) \tag{117}$$

$$+ \frac{(-1)^k}{(i+k)!} \int_a^b (x-a)^k (b-x)^i f^{(i+k)}(x)\,dx.$$

Când $i = k$, formula aceasta devine formula lui K. Petr[3].

$$(118)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \frac{C_k^{l+1}}{C_{2k}^{l+1}} \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} [f^{(l)}(b) + (-1)^l f^{(l)} a]$$

$$+ \frac{(-1)^k}{(2k!)} \int_a^b (x-a)^k (b-x)^k f^{(2k)}(x)\,dx .$$

Formula (105) în care coeficienții $\lambda$ și $\nu_\beta$ au valori numerice independente de $a$ și $b$, determinate de sistemele de ecuații lineare (110) și (111) este o generalizare a formulei (117) a lui N. Obreschkoff[2]. Formula (105) nu numai că-și păstrează forma din ecuația (92) din care provine și ecuația (117), dar și structura coeficienților este aceeași ca în formula (117).

De asemenea formula (112), în care coeficienții $\mu_r$ sunt dați de sistemul de ecuații (113) și care sunt independenți de $a$ și $b$, este o generalizare a formulei (118) a lui K. Petr[3].

### 3. Rădăcinile polinoamelor $Q_n(x)$ în cazul $p(x) = 1$.

19. S'a arătat la no. 5, că abscisele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din formula de cuadratură (24) sunt rădăcinile polinomului $Q_n(x)$ definit de formula (30) și că șirul polinoamelor $Q_n(x)$ este ortogonal în intervalul $(a,b)$ față de funcția $p_3(x)$ definită de formula (27).

Se știe că polinoamele lui Jacobi

$$(119)\qquad J_n(\lambda+\mu-1\ \mu\,;x) = \frac{(x-a)^{1-\mu}\ b-x)^{1-\lambda}}{(\mu, n)(b-a)^n} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^{\mu+n-1} (b-x)^{\lambda+n-1}]$$

unde $\lambda > 0$ și $> 0$, iar simbolul $(\mu, n)$ este definit de formula (108), sunt ortogonale în intervalul $(a, b)$ la funcția $(x-a)^{\mu-1}(b-x)^{\lambda-1}$ adică avem

$$(120)\qquad \int_a^b (x-a)^{\mu-1} (b-x)^{\lambda-1} J_n(\lambda+\mu-1, \mu\,; x)\, J_m(\lambda+\mu-1, \mu\,; x)\,dx = 0$$

pentru $n \neq m$.

Aceste proprietăți ne permit să precizăm rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din formulele (24), (101), (103), în câteva cazuri particulare.

$1^0$. *Să presupunem că în formula (24) avem $p(x) = 1$. In acest caz abscisele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din formula (24) sunt rădăcinile polinomului lui Jacobi $J_n(i+k+1, i+1; x)$.*

Se știe că în cazul particular al formulei (24) când $i = k = 0$, adică în cazul formulei (80) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui Legendre. $J_n(1, 1; x)$.

$2^0$. Să presupunem că în formula (24) avem

$$(121)\qquad p(x) = (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\alpha-1}$$

unde $\alpha$ și $\beta$ sunt numere reale pozitive.

*In acest caz abscisele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din formula (24) sunt rădăcinile polinomului lui* Jacobi, $J_n(\alpha+\beta+i+k-1, \beta+i; x)$.



In cazul $i=k=0$, adică *în cazul formulei (80), dacă $p(x)$ este dată de formula (121) rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui* Jacobi $J_n(\alpha+\beta-1, \beta; x)$.

$3^0$. In cazul când $p(x) = 1$, formula (92') devine formula (117) a lui N. Obreschkoff. Am văzut că din formula (92) se deduc formulele de cuadratură (101) și (103). Deci din formula (117) a lui N. Obreschkoff, în care înlocuim pe $i$ cu $i'$ și pe $k$ cu $k'$, vom deduce formula de cuadratură

$$(121)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} C_j f^{(i'+k')}(x_j) + \sum_{\alpha=0}^{i-1} A_\alpha f^{(i'+k'+\alpha)}(a) + \sum_{\beta=0}^{k-1} B_\beta f^{(i'+k'+\beta)}(b)$$

$$+ \sum_{l=0}^{k'-1} (-1)^l \frac{C_{k'}^{l+1}}{C_{i'+k'}^{l+1}} \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} f^{(l)}(b + \sum_{l=0}^{i'-1} \frac{C_{i'}^{l+1}}{C_{i'+k'}^{l+1}} \frac{(b-a)^{l+1}}{(l+1)!} f^{(l)}(a) + R$$

în care restul R, este de forma

$$(122)\qquad R = \int_a^b \psi(x) f^{(N)}(x)\,dx \qquad (N = 2n+i+k+i'+k')$$

funcția $\psi(x)$ fiind de aceleași semn în tot intervalul $(a, b)$.

*In formula (121) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui* Jacobi $J_n(i+k+i'+k'+1, k'+i+1; x)$.

Iată câteva exemple de formule de tipul (121).

Avem formula

$$(123)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \sum_{j=1}^{n} C_j f'(x_j) + R$$

care se deduce din formula (121) luând $i=k=0$ și $i'=1, k'=0$. In această formulă restul R este nul pentru orice polinom de gradul $2n$, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui Jacobi $J_n(2, 1; x)$.

Avem formula

$$(124)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{a-b}{2} [f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} \sum_{j=1}^{n} C_j f''(x_j) + R$$

care se deduce din formula (121) luând $i=k=0$ și $i'=k'=1$.

Restul R este nul dacă $f(x)$ este un polinom oarecare de gradul $2n+1$, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului lui Jacobi $J_n(3, 2; x)$.

*Secția de Matematică*
*a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.*

## BIBLIOGRAFIE


1. Ionescu D. V., *Despre o formulă de cuadratură mecanică*. Academia R.P.R. Lucrările sesiunei generale științifice din 2—12 Iunie 1950, p. 238—243.
2. Obreschkoff N., *Neue Quadraturformeln*. Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1940, No. 4, p. 6—26.
3. Petz K., *Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale*. Casopsis propestovani Matematiky a Fysiky, 1915, 44, p. 454—455.
4. Radon J., *Restausdrücke bei Interpolations- und Quadraturformeln durch bestimmte Integralen*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 1935, 42, p. 389—396.
5. Stieltjes Th-J., *Quelques recherhces sur la théorie des uadratures dites mécaniques*. Annales de l'École Normale Supérieure, 1884, Troisième série, 1, p. 409—426.
6. Valiron G., *Cours d'analyse mathématique. Théorie des fornctions*.



## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

### Несколько формул механических квадратур

Д. В. ИОНЕСКУ

В этой работе рассматривается интеграл (1), в котором $p(x)$ данная конечная и интегрируемая функция неотрицательная в конечном и замкнутом промежутке $[a, b]$ и такая, чтобы интеграл $\int_a^b p(x)\,dx$ был положительным, $(a, x, \ldots, x_n, b)$ будучи каким либо делением промежутка $(a, b)$, на частичных промежутках $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$, присоединяются функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$ интегралы дифференциальных уравнений (3) при граничных условиях (5), (6) и (7).

Такум образом мы приходим к квадратурной формуле (8), в которой коэфициенты $C_j$, $A_e$, $B_c$ и остаточный член R данн формулами (9), (10), (11). (12). В формуле (12) $\varphi$, обозначает функцию совпадающую с $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$ в промежутках $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, l]$.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рассматриваются как неизвестные, то возникает вопрос, возможно ли их определить таким образом, чтобы удовлетворить и условиям (23). Таким образом мы приходим к квадратурной формуле (24), в которой $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — реальные, отличные корни и расположенные между $a$ и $b$ многочлена $Q_n(x) = 0$, данного формулой (30).

Функция $\varphi(x)$, входящая в выражение (30) остаточного члена формулы (24), сохраняет постоянный знак в промежутке $(a, b)$.

В работе под No 10 кратко излагается случай $i = 0$, а под No 11 — случай $i = 0$, $k = 0$.

Случай $n = 0$ — составляет предмет подробного изучения. Мы приходим к формуле квадратуры (92), в которой функция $\varphi(x)$, входящая в выражение (95) остаточного члена R, сохраняет постоянный знак в промежутке $(a, b)$.

Это свойство функции $\varphi(x)$ позволяет через применение квадратурной формулы (24) написать квадратурную формулу (101), составляющую распространение классической формулы Stieltjes-a.

В работе под No 16 изучается случай, когда $p(x)$ дан формулой (104). Мы приходим к квадратурным формулам (105) и (112), являющимся обобщениями формул (117) и (118), принадлежащим Н. Обрешкову и К. Петру.

Под No 19 работы доказывается в случае $p(x) = 1$, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена Якоби $I_n(i+k+1, i+1; x)$. Также в формуле (121), $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена $I_n(i+k+i'+k'+1, k'+i+1, x)$.





## RÉSUMÉ

### Quelques formules de quadrature mécanique

par

D. V. IONESCU

Dans ce Mémoire on considère l'intégrale (1), où $p(x)$ est une fonction donnée finie et intégrable dans l'intervalle fermé et fini $[a, b]$, non négative dans cet intervalle et telle que l'intégrale $\int_a^b p(x)\,dx$ soit positive.

$(a, x_1, \ldots, x_n, b)$ étant une certaine division de l'intervalle $(a, b)$, aux intervalles partiels $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$ on attache les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$ intégrales des équations différentielles (3), avec les conditions aux limites (5), (6) et (7).

On est ainsi conduit à la formule de quadrature (8), où les coefficients $C_j$, $A_l$ et $B_e$ ainsi que le reste R sont données par les formules (9), (10), (11) et (12). Dans la formule (12) $\varphi(x)$ désigne la fonction qui coïncide avec les fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$ dans les intervalles $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant regardées comme des inconnues, on se demande s'il est possible de les déterminer de façon à satisfaire aussi aux conditions (23). On est ainsi conduit à la formule de quadrature (24), les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les racines réelles distinctes et comprises entre $a$ et $b$ du polynôme $Q_n(x) = 0$ donné par la formule (30).

La fonction $\varphi(x)$ qui entre dans l'expression (30) du reste de la formule (24), garde un signe constant dans l'intervalle $(a, b)$. Au No. 10 de ce mémoire on résume le cas $i = 0$, et au No. 11 le cas $i = 0, k = 0$.

Le cas $n = 0$ fait l'objet d'une étude détaillée. On est conduit à la formule de quadrature (92) où la fonction $\varphi(x)$ qui entre dans l'expression (95) du reste R, garde un signe constant dans l'intervalle $(a, b)$. Cette propriété de la fonction $\varphi(x)$ permet, par l'application de la formule de quadrature (24) d'écrire la formule de quadrature (101) qui constitue une extension de la formule classique de Stieltjes.

Au No. 16 de ce mémoire, on étudie le cas où $p(x)$ est donnée par la formule (104). On est conduit de cette façon aux formules de quadratures (105) et (112) qui sont des généralisations des formules (117) et (118) qui sont dues à N. Obreschkoff et K. Petr.

Au no. 19 de ce mémoire on démontre que dans le cas $p(x) = 1$, les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la formule (24) sont les racines du polynôme de Jacobi $J_n(i+k+1, i+1; x)$. De même dans la formule (121), les $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme de Jacobi $J_n(i+k+i'+k'+1, k'+i'+1; x)$.