PROPRIETĂȚI ALE UNOR SUPRAFEȚE SPECIALE $h(z) = f(x) + g(y)$

DE

LASCU BAL

Comunicare prezentată la Sesiunea universităților « V. Babeș » și « Bolyai » din Cluj, din 27 mai 1958

În nomografie se urmărește rezolvarea aproximativă a ecuațiilor sau sistemelor de ecuații cu ajutorul nomogramelor. Pentru aceasta se folosesc diverse tipuri de nomograme, printre care se remarcă prin simplitate în utilizare și exactitate cele care conțin rețele de drepte sau scări rectilinii. Această rezolvare pretinde ca ecuațiile să îndeplinească anumite condiții [1]. Astfel pentru rezolvarea ecuației

$$F(x, y, z) = 0$$

cu ajutorul unei nomograme formată din trei fascicule de drepte sau din trei scări rectilinii, ecuația trebuie să îndeplinească condiția lui Saint-Robert. În acest caz ecuația cu trei variabile este de forma

$$h(z) = f(x) + g(y). \tag{1}$$

Dacă funcțiile h, f și g îndeplinesc anumite condiții de continuitate și derivabilitate, ecuația (1) reprezintă o clasă importantă de suprafețe. Această clasă conține ca niște cazuri particulare cunoscutele tipuri de suprafețe

$$z = f(x) + g(y),$$

suprafețe de translație,

$$f(z) = x^2 + y^2$$

suprafețe de rotație și cuadricele.

După cunoștința noastră, aceste suprafețe nu au fost suficient studiate. Recent, profesorul Maurice Frechet [2] într-un memoriu de peste 50 de pagini determină suprafețele minima de tipul (1). Radó Francisc într-o lucrare publicată în acest volum pornește de la ecuația funcțională care caracterizează ecuația (1) și rezolvă cu o metodă proprie numeroase ecuații funcționale care intervin în nomografie.

În această lucrare ne-am propus să studiem suprafețele riglate și desfășurabile de acest tip și cîteva tipuri de configurații particulare de familii de curbe situate pe aceste suprafețe.

Presupunem că funcțiile $h(z)$, $f(x)$ și $g(y)$ sînt continuu derivabile de ori de cîte ori avem nevoie și admit o inversă. În acest caz suprafețele de tipul (1) pot fi reprezentate parametric prin ecuațiile

$$x = \varphi(u),\ y = \psi(v),\ z = \chi(u+v). \tag{2}$$

Coeficienții celor două forme fundamentale se calculează cu ușurință cu ajutorul derivatelor celor trei funcții φ, ψ și χ,

$$E = \varphi'^2+\chi'^2,\ F=\chi'^2,\ G=\psi'^2+\chi'^2,\ EG-F^2=(\varphi'\psi')^2+(\varphi'\chi')^2+(\varphi'\psi')^2,$$

$$D = \frac{\psi'(\varphi'\chi''-\chi'\varphi'')}{\sqrt{EG-F^2}},\ D' = \frac{\varphi'\psi'\chi''}{\sqrt{EG-F^2}},\ D'' = \frac{\varphi'(\psi'\chi''-\chi'\psi'')}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Condiția ca suprafețele (2) să fie desfășurabile este

$$\varphi'^2\psi'\chi'\psi''\chi'' + \psi'^2\varphi'\chi'\varphi''\chi'' - \chi'^2\varphi'\psi'\varphi''\psi'' = 0$$

sau, presupunînd că derivatele φ', ψ', χ', φ'', ψ'' și χ'' nu se anulează identic,

$$\frac{\chi'}{\chi''} = \frac{\varphi'}{\varphi''} + \frac{\psi'}{\psi''}. \tag{3}$$

Aceasta este o ecuație funcțională între trei funcții care depind de variabilele u, v, și $u+v$. Pentru găsirea soluției rezolvăm mai întîi ecuația funcțională de formă cunoscută,

$$A(u+v) = B(u) + C(v) \tag{4}$$

și găsim

$$A(u+v) = a(u+v),\ B(u) = au,\ C(v) = av \quad (a \text{ fiind constantă})$$

Ecuația diferențială (3) conduce prin simple cuadraturi la următoarele ecuații parametrice ale suprafețelor desfășurabile reale

$$\begin{aligned} x &= M_1(u+a)^m + N_1, \\ y &= M_2(v+b)^m + N_2, \\ z &= M_3(u+v+a+b)^m + N_3, \end{aligned} \tag{5}$$

unde m, M_i, N_i a și b sînt numere reale.

Ecuația funcțională care caracterizează suprafețele riglate se exprimă destul de complicat cu ajutorul derivatelor de ordinul 3 ale funcțiilor φ, ψ și χ și nu am abordat-o în acest articol.

Înainte de a trece la țesuturi pe suprafețele de tipul (1), menționăm că studiul topologic al țesuturilor a fost inițiat de prof. W. B l a s c h k e [3] și s-au elaborat

numeroase lucrări, în deosebi la sfîrșitul deceniului al treilea și în deceniul patru al acestui secol cu tematica « Topologische Fragen der Differentialgeometrie ».

T. D u b o u r d i e u [4], caracterizează țesuturile cu ajutorul unui invariant ρ, numit *invariant topologic*. Dacă familiile de curbe ale țesutului se scriu sub formă diferențială

$$L_i = \varphi_i(u, v)\,du + \psi_i(u, v)\,dv \qquad (i = 1, 2, 3),$$

întotdeauna se pot determina aceste forme astfel ca să avem

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0,$$

sau

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,$$
$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0.$$

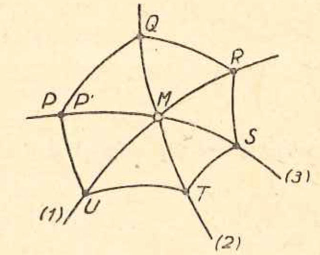

Fig. 1

Dacă notăm

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \psi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 \\ \varphi_1 & \psi_1 \end{vmatrix},$$

atunci $D \neq 0$ reprezintă condiția cu familia de curbe să formeze un țesut într-un domeniu în care sînt definite funcțiile φ_i și ψ_i

Notînd cu Λ_i operatorul

$$\Lambda_i = \frac{1}{D}\left(\psi_i \frac{\partial}{\partial u} - \varphi_i \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

și cu

$$\rho_i = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial v}\right),$$

atunci

$$\rho \equiv \Lambda_1 \rho_2 - \Lambda_2 \rho_1 \equiv \Lambda_2 \rho_3 - \Lambda_3 \rho_2 \equiv \Lambda_3 \rho_1 - \Lambda_1 \rho_3, \tag{6}$$

este invariantul topologic al țesutului.

Printre țesuturile de ordinul trei sînt remarcabile cele exagonale, care au următoarea proprietate de închidere.

Dacă M este un punct al suprafeței prin care trece cîte o curbă din fiecare familie (fig. 1), atunci luăm un punct P pe o curbă din familia (3). Ducem prin P curba corespunzătoare din familia (1) care taie în Q curba dată din familia (2). Prin Q ducem curba corespunzătoare din familia (3), care taie curba dată din (1) în R și continuăm această construcție pînă ajungem din nou la curba inițială în punctul P'. Dacă punctele P și P' coincid, atunci exagonul $P\,Q\,R\,S\,T\,U\,P'$ se închide și țesutul se numește *exagonal*. Această proprietate se verifică ușor la țesutul format din trei fascicule de drepte paralele.

G. T h o m s e n [5] a demonstrat că țesuturile exagonale se aplică topologic pe trei fascicule de drepte paralele iar J. D u b o u r d i e u [4] a arătat că condiția necesară și suficientă pentru ca un țesut de ordinul trei să fie exagonal este obținută prin anularea invariantului topologic ρ. Această condiție este ușor de verificat cînd se dau familiile ţesutului sau formele diferenţiale ale acestor familii. Să demonstrăm o serie de teoreme în legătură cu ţesuturi particulare situate pe suprafeţele de tip (1).

T e o r e m a I. *Fiind dată o suprafaţă*

$$z = f(x, y),$$

condiţia necesară şi suficientă pentru ca ţesutul format din familiile

$$\begin{aligned} x &= const., \\ y &= const., \\ z &= const., \end{aligned} \tag{7}$$

să fie exagonal este ca suprafaţa să fie de forma (1), *adică*

$$h(z) = f(x) + g(y).$$

Formele diferenţiale ale familiilor le putem scrie

$$\begin{aligned} -f_x\, dx &= 0, \\ -f_y\, dy &= 0, \\ f_x\, dx + f_y\, dy &= dz = 0. \end{aligned}$$

Invariantul topologic are expresia

$$\rho = \frac{1}{f_x f_y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \frac{f_x}{f_y}.$$

Condiţia

$$\rho = 0, \tag{8}$$

dacă $f_x \neq 0$, $f_y \neq 0$, conduce la

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{f_x}{f_y}}{\partial x\, \partial y} = 0, \tag{9}$$

care este tocmai condiţia lui Saint Robert. Rezultă de aici

$$z = h^{-1}[f(x) + g(y)]$$

sau

$$h(z) = f(x) + g(y).$$

T e o r e m a I I. *Ţesutul format din curbele de nivel ale suprafeţei* (1), *curbele de cea mai mare pantă şi una din familiile curbelor de coordonate este exagonal.*

Considerînd suprafaţa dată prin ecuaţiile (2), se găsesc pentru familiile considerate, formele diferenţiale

$$\begin{aligned} \chi'^2\, d(u + v) + \psi'^2\, dv &= 0, \\ -\psi'^2\, dv &= 0, \\ -\chi'^2 (u + v)\, d(u + v) &= 0. \end{aligned}$$

Aceste forme fiind diferenţiale totale exacte, este evident că verifică condiţia (8).

T e o r e m a I I I. *Ţesutul format din traiectoriile ortogonale liniilor de coordonate şi liniile de cea mai mare pantă sau traiectoriile ortogonale familiei $u - v =$ const. este exagonal.*

Formele diferenţiale ale acestor familii sînt

$$\begin{aligned} \chi'^2\, d(u + v) + \varphi'^2\, du &= 0, \\ \chi'^2\, d(u + v) + \psi'^2\, dv &= 0, \\ 2\chi'^2\, d(u + v) + \varphi'^2\, du + \psi'^2\, dv &= 0, \\ \varphi'^2\, du - \psi'^2\, dv &= 0 \end{aligned}$$

şi verifică, oricum ar fi luate cîte trei, condiţia (8).

T e o r e m a I V. *Reţelele formate din traiectoriile ortogonale liniilor de coordonate, din liniile de cea mai mare pantă şi traiectoriile ortogonale familiei $u - v =$ = const. sînt diagonale.*

Familiile acestor reţele sînt

$$\begin{aligned} A(u + v) + B(u) &= C_1, \quad 2A(u + v) + B(u) + C(v) = C_3, \\ A(u + v) + C(v) &= C_2, \quad B(u) - C(v) = C_4, \end{aligned}$$

unde

$$A'(u + v) = \chi'^2, \quad B'(u) = \varphi'^2, \quad C'(v) = \psi'^2.$$

Notînd cu u_1 şi v_1 curbele din prima reţea şi cu u_2 v_2, curbele din cea de-a doua reţea, se vede că între curbele celor două sisteme avem relaţiile

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + v_1, \\ v_2 &= u_1 - v_1, \end{aligned}$$

care caracterizează, după W. B l a s c h k e [3], reţelele diagonale.

Aceste teoreme aplicate la suprafeţe particulare din suprafeţele de tip (1) dau ţesuturi între familii interesante de curbe. Ele sînt valabile şi pentru orice suprafaţă, dar în aceste cazuri familiile nu conţin nici liniile de nivel nici liniile de cea mai mare pantă.

Catedra de geometrie,
Universitatea « V. Babeş » — Cluj

СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ $h(z) = f(x) + g(y)$

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Автор занимается классом поверхностей типа (1), встречающихся в номографии. Они содержат, в качестве частных случаев, поверхности вращения, трансляционные поверхности и поверхности второго порядка. Автор определяет затем развертывающиеся поверхности типа (1). Их параметри-

ческие уравнения выражаются формулами (5). Далее рассматриваются некоторые шестиугольные ткани на рассматриваемых поверхностях, причем семейства этих тканей являются пересечениями координатных плоскостей с поверхностью и их ортогональными траекториями. Для этого используются результаты Дюбурдье [3].

PROPRIÉTÉS DE CERTAINES SURFACES SPÉCIALES $h(z) = f(x) + g(y)$

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur s'occupe d'une classe de surfaces du type (1), intervenant en nomographie. Elles comprennent, comme des cas particuliers, les surfaces de rotation, les surfaces de translation et les quadriques. L'auteur détermine ensuite les surfaces développables du type (1). En continuant, il examine quelques réseaux hexagonaux situés sur les surfaces considérées, les familles de ces réseaux étant les intersections des plans de coordonnées avec la surface et leurs trajectoires orthogonales. A cette fin, on se sert des résultats de J. Dubourdieu [3].

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bal, F. Rado, *Lecții de nomografie*. Ed. tehnică, București, 1956.
2. M. Fréchet, *Détermination des surfaces minima du type* $a(x) + b(y) = c(z)$. Rend. circ. mat. di Palermo, ser. II, **5**, 238–260 (1956); idem **6**, 5–12, (1957).
3. W. Blaschke, G. Bol, *Geometrie der Gewebe*. J. Springer, Berlin, 1938.
4. M. J. Dubourdieu, *Questions topologiques de géométrie différentielle*. Mem. des Sci. Mat., Paris, fasc. **78** (1936).
5. G. Thomsen, *Un teorema topologico sulle schiere di curve*. Boll. della Unione Mat. Ital., **6**, 80–85 (1927).