# FORMULE DE CUADRATURĂ CU NODURI EXTERIOARE

DE

D. V. IONESCU

*Comunicare prezentată la Sesiunea Academiei R.P.R. din 27 septembrie 1957*

În această lucrare vom studia formule de cuadratură cu noduri exterioare intervalului de integrare și vom face un studiu amănunțit al restului lor. Vom face de asemenea o comparație între marginile superioare ale valorilor absolute ale resturilor din formulele de cuadratură cu noduri exterioare și din unele cu noduri interioare, din care va rezulta că formule de cuadratură cu noduri interioare tratate în această lucrare sînt preferabile formulelor de cuadratură cu noduri exterioare.

În lucrare se insistă asupra formulelor de cuadratură cu noduri exterioare care provin din formulele de interpolare ale lui Newton cu noduri în progresie aritmetică la stînga, ale lui Bessel și ale lui Stirling.

După cum se știe unele formule de integrare numerică ale ecuațiilor diferențiale, cum sînt formulele lui Adams, Nyström sau Störmer, se stabilesc folosind formulele de cuadratură, care provin din formulele de interpolare ale lui Newton cu noduri în progresie aritmetică la stînga. Discuția acestor formule de integrare numerică, ținînd seama de rezultatele acestei lucrări o vom prezenta într-o altă lucrare.

## § 1. **Formule cu noduri simple**

1. Să considerăm integrala

$$I = \int_a^b p(x) f(x)\, dx, \tag{1}$$

unde funcția $f(x)$ este de clasa $C^{n+m}$ într-un interval $[\alpha, \beta]$, care cuprinde intervalul $[a, b]$, adică funcția $f(x)$ este continuă împreună cu primele ei $n + m$ derivate în intervalul $[\alpha, \beta]$, iar $p(x)$ este o funcție integrabilă pozitivă în intervalul $[a, b]$ putîndu-se anula în capetele acestui interval. La această integrală atașăm nodurile

$x_1', x_2', x_3', \ldots, x_m'$ la dreapta lui $b$, în ordine crescătoare și nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la stînga lui $a$, în ordine descrescătoare, toate nodurile fiind cuprinse în intervalul $[\alpha, \beta]$. Vrem să stabilim o formulă de cuadratură de forma

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) + \\ + A_1' f(x_1') + A_2' f(x_2') + \ldots + A_n' f(x_m') + R \tag{2}$$

și să-i studiem restul.

La intervalele $[x_n, x_{n-1}], \ldots, [a, b], \ldots, [x_{m-1}', x_m']$ atașăm funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$ astfel ca să avem

$$\varphi_i^{(n+m)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq n+1 \\ p(x) & \text{dacă } i = n+1 \end{cases} \tag{3}$$

Putem scrie integrala (1) sub forma

$$I = \int_{x_n}^{x_{n-1}} \varphi_1^{(n+m)}(x) f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_1}^{a} \varphi_n^{(n+m)}(x) f(x)\, dx + \int_a^b \varphi_{n+1}^{(n+m)}(x) f(x)\, dx + \\ + \int_b^{x_1'} \varphi_{n+2}^{(n+m)}(x) f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{m-1}'}^{x_m'} \varphi_{n+m+1}^{(n+m)}(x) f(x)\, dx. \tag{4}$$

La fiecare integrală din formula (4), vom aplica formula de integrare prin părți generalizată, și vom obține

$$I = \left[\varphi_1^{(n+m-1)}(x) f(x) - \varphi_1^{(n+m-2)}(x) f'(x) + \ldots + (-1)^{n+m-1} \varphi_1(x) f^{(n+m-1)}(x)\right]_{x_n}^{x_{n-1}} + \\ + (-1)^{n+m} \int_{x_n}^{x_{n-1}} \varphi_1(x) f^{(n+m)}(x)\, dx + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + \left[\varphi_n^{(n+m-1)}(x) f(x) - \varphi_n^{(n+m-2)}(x) f'(x) + \ldots + (-1)^{n+m-1} \varphi_n(x) f^{(n+m-1)}(x)\right]_{x_1}^{a} + \\ + (-1)^{n+m} \int_{x_1}^{a} \varphi_n(x) f^{(n+m)}(x)\, dx + \\ + \left[\varphi_{n+1}^{(n+m-1)}(x) f(x) - \varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(x) f'(x) + \ldots + (-1)^{n+m-1} \varphi_{n+1}(x) f^{(n+m-1)}(x)\right]_a^b + \\ + (-1)^{n+m} \int_a^b \varphi_{n+1}(x) f^{(n+m)}(x)\, dx +$$



$$+ \left[\varphi_{n+2}^{(n+m-1)}(x) f(x) - \varphi_{n+2}^{(n+m-2)}(x) f'(x) + \ldots + (-1)^{n+m-1} \varphi_{n+2}(x) f^{(n+m-1)}(x)\right]_b^{x_1'} + \\ + (-1)^{n+m} \int_b^{x_1'} \varphi_{n+2}(x) f^{(n+m)}(x)\, dx + \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + \varphi_{n+m+1}^{(n+m-1)}(x) f(x) - \varphi_{n+m+1}^{(n+m-2)}(x) f'(x) + \ldots + (-1)^{n+m-1} \varphi_{n+m+1}(x) f^{(n+m-1)}(x)\Big]_{x_{m-1}'}^{x_m'} + \\ + (-1)^{n+m} \int_{x_{m-1}'}^{x_m'} \varphi_{n+m+1}(x) f^{(n+m)}(x)\, dx. \tag{5}$$

Dacă alegem funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$ astfel ca ele să îndeplinească condițiile la limită

$$\varphi_1(x_n) = 0,\ \varphi_1'(x_n) = 0, \ldots, \varphi_1^{(n+m-2}(x_n) = 0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \varphi_2(x_{n-1}) = \varphi_1(x_{n-1}),\ \varphi_2'(x_{n-1}) = \varphi_1'(x_{n-1}), \ldots, \varphi_2^{(n+m-2)}(x_{n-1}) = \varphi_1^{(n+m-2)}(x_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1) = \varphi_{n-1}(x_1),\ \varphi_n'(x_1) = \varphi_{n-1}'(x_1), \ldots, \varphi_n^{(n+m-2)}(x_1) = \varphi_{n-1}^{(n+m-2)}(x_1) \end{cases} \tag{7}$$

$$\varphi_{n+1}(a) = \varphi_n(a),\ \varphi_{n+1}'(a) = \varphi_n'(a), \ldots, \varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(a) = \varphi_n^{(n+m-2)}(a), \\ \varphi_{n+1}^{(n+m-1)}(a) = \varphi_n^{(n+m-1}(a) \tag{8}$$

$$\varphi_{n+2}(b) = \varphi_{n+1}(b),\ \varphi_{n+2}'(b) = \varphi_{n+1}'(b), \ldots, \varphi_{n+2}^{(n+m-2)}(b) = \varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(b), \\ \varphi_{n+2}^{(n+m-1)}(b) = \varphi_{n+1}^{(n+m-1)}(b) \tag{9}$$

$$\begin{cases} \varphi_{n+3}(x_1') = \varphi_{n+2}(x_1'),\ \varphi_{n+3}'(x_1') = \varphi_{n+2}'(x_1'), \ldots, \varphi_{n+3}^{(n+m-2)}(x_1') = \varphi_{n+2}^{(n+m-2)}(x_1') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n+m+1}(x_{m-1}') = \varphi_{n+m}(x_{m-1}'),\ \varphi_{n+m+1}'(x_{m-1}') = \varphi_{n+m}'(x_{m-1}'), \ldots, \\ \varphi_{n+m+1}^{(n+m-2)}(x_{m-1}') = \varphi_{n+m}^{(n+m-2)}(x_{m-1}') \end{cases} \tag{10}$$

$$\varphi_{n+m+1}(x_m') = 0,\ \varphi_{n+m+1}'(x_m') = 0, \ldots, \varphi_{n+m+1}^{(n+m-2)}(x_m') = 0, \tag{11}$$

atunci formula (5) se reduce la

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) + \\ + A_1' f(x_1') + A_2' f(x_2') + \ldots + A_m' f(x_m') + (-1)^{n+m} \int_{x_n}^{x_m'} \varphi(x) f^{(n+m)}(x)\, dx, \tag{12}$$

adică am obținut o formulă de cuadratură de forma (2) în care restul $R$ este nul cînd funcția $f(x)$ este înlocuită cu un polinom oarecare de gradul $n+m-1$.

În formula (12), avem

$$\begin{aligned}
A_n &= -\varphi_1^{(n+m-1)}(x_n)\\
A_{n-1} &= \varphi_1^{(n+m-1)}(x_{n-1}) - \varphi_2^{(n+m-1)}(x_{n-1})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_1 &= \varphi_{n-1}^{(n+m-1)}(x_1) - \varphi_n^{(n+m-1)}(x_{n-1})\\
A_1' &= \varphi_{n+2}^{(n+m-1)}(x_1') - \varphi_{n+3}^{(n+m-1)}(x_1')\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_{m-1}' &= \varphi_{n+m}^{(n+m-1)}(x_{m-1}') - \varphi_{n+m+1}^{(n+m-1)}(x_{m-1}')\\
A_m' &= \varphi_{n+m+1}^{(n+m-1)}(x_m')
\end{aligned} \tag{13}$$

În formula de cuadratură (12), restul este

$$R = (-1)^{n+m}\int_{x_n}^{x_m'} \varphi(x) f^{(n+m)}(x)\,dx, \tag{14}$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide pe rînd cu $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . . , $\varphi_{n+m+1}(x)$ în intervalele $[x_n,\ x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, . . ., $[x_{m-1}',\ x_m']$.

2. *Determinarea coeficienților $A_i$ și $A_k'$.* Pentru a determina coeficientul $A_i$ din formula (12) vom înlocui $f(x)$ cu polinomul $P_i(x)$ care se anulează în toate nodurile afară de nodul $x_i$ în care ia valoarea 1. Avem

$$P_i(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})}\cdot\frac{(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\cdot\frac{(x-x_1')\ldots(x-x_m')}{(x_i-x_1')\ldots(x_i-x_m')}. \tag{15}$$

Polinomul $P_i(x)$ este de gradul $n+m-1$. Atunci formula (12) dă

$$A_i = \int_a^b P_i(x)\,dx. \tag{16}$$

*Semnul lui $A_1$ este semnul lui $(-1)^{i-1}$.* Într-adevăr să observăm că dacă $x \in [a, b]$, atunci avem $\frac{x-x_k'}{x_i-x_k'} > 0$, pentru $k = 1, 2, \ldots, m$; de asemenea avem $\frac{x-x_{i+l}}{x_i'-x_{i+l}} > 0$ pentru $l = 1,2,\ldots, n-i$; în fine avem $\frac{x-x_j}{x_i+x_j} < 0$ pentru $= 1, 2, \ldots, i-1$.

Deci polinomul $P_i(x)$ are semnul lui $(-1)^{i-1}$ în intervalul $[a,b]$, și atunci din formula (16) rezultă că $A_i$ are semnul lui $(-1)^{i-1}$.

Pentru a determina coeficientul $A_k'$ din formula (12), vom înlocui $f(x)$ cu polinomul $Q_k(x)$ care se anulează în toate nodurile afară de nodul $x_k$ în care ia valoarea 1. Avem

$$jQ_k(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_k)}{(x_k'-x_1)\ldots(x_k'-x_k)}\,\frac{(x-x_1')\ldots(x-x_{k-1}')}{(x_k'-x_1')\ldots(x_k'-x_{k-1}')}\,\frac{(x-x_{k+1}')\ldots(x-x_m')}{(x_k'-x_{k+1}')\ldots(x_k'-x_m')}. \tag{17}$$



Polinomul $Q_k(x)$ fiind de gradul $n+m-1$, formula (12) ne dă

$$A_k' = \int_a^b Q_k(x)\,dx. \tag{18}$$

*Semnul lui $A_k'$ este $(-1)^{k-1}$.* Într-adevăr observăm că dacă $x \in [a,b]$ atunci avem $\frac{x-x_i}{x_k'-x_i} > 0$ pentru $i=1,2,\ldots, n$; de asemenea avem $\frac{x-x_{k+l}'}{x_k'-x_{k+l}'} > 0$ pentru $l=1,2,\ldots, m-k$; în sfîrșit avem $\frac{x-x_j'}{x_k'-x_j} < 0$ pentru $j = 1,2,\ldots, k-1$.

Deci polinomul $Q_k(x)$ are în intervalul $[a,b]$ semnul lui $(-1)^{k-1}$. și prin urmare $A_k'$ are semnul lui $(-1)^{k-1}$.

*Coeficienții $A_1, A_2, \ldots, A_n$ au deci semnele alternante, $A_i$ fiind pozitiv. De asemenea coeficienții $A_1', A_2', \ldots, A_m'$ au semnele alternate, $A_1'$ fiind pozitiv.*

3. *În formula de cuadratură* (12) *restul R nu poate fi nul, pentru orice polinom de grad mai mare ca $m+n-1$.*

Într-adevăr dacă restul $R$ din formula (12) ar fi nul pentru un polinom de grad mai mare ca $m+n-1$ ar trebui ca formula (12) să fie verificată de polinomul

$$P(x) = (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}(x'_1-x)^{\alpha_1'}(x_2'-x)^{\alpha_2'}\ldots(x_m'-x)^{\alpha_m'}$$

unde $\alpha_i \geqslant 1$ și $\alpha_k' \geqslant 1$. În acest caz polinomul $P(x)$ ar fi pozitiv în intervalul $[a,b]$, deoarece fiecare factor al lui este pozitiv. Membrul întîi al formulei (12) ar fi pozitiv, pe cînd membrul al doilea ar fi nul, ceea ce este imposibil.

În particular rezultă că *nu poate exista o formulă de cuadratură de tipul lui Gauss cu noduri exterioare.*

4. *Determinarea funcțiilor* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$. Ecuațiile diferențiale (3) împreună cu condițiile la limită (6), (7), (8), (9), (10), (11), determină funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$.

Într-adevăr din primele $n$ ecuații diferențiale (3) și din condițiile la limită (6) și (7) avem

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \lambda_n\frac{(x-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\\
\varphi_2(x) &= \lambda_n\frac{(x-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_n(x) &= \lambda_n\frac{(x-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots +\\
&\quad + \lambda_1\frac{(x-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}
\end{aligned} \tag{19}$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt $n$ constante arbitrare.

De asemenea din ultimele $m$ ecuații diferențiale (3) și din condițiile (10), (11) rezultă că avem

$$\varphi_{n+m+1}(x) = \mu_m \frac{(x-x_m')^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

$$\varphi_{n+m}(x) = \mu_m \frac{(x-x_m')^{n+m-1}}{(m+n-1)!} + \mu_{m-1} \frac{(x-x_{m-1}')^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{20}$$

$$\varphi_{n+2}(x) = \mu_m \frac{(x-x_m)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \mu_{m-1} \frac{(x-x_{m-1}')^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots + \mu_1 \frac{(x-x_1')^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

unde $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sînt $m$ constante arbitrare.

Din condițiile la limită (8) și din a $n+1$ ecuație diferențială (3) rezultă că

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} p(s)\,ds + \lambda_n \frac{(x-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}. \tag{21}$$

Scriind în sfîrșit că și condițiile (9) sînt verificate din ultima ecuație (20) și din ecuația (21) obținem un sistem de $n+m$ ecuații cu $n+m$ necunoscute $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ care determină aceste necunoscute. Acest sistem este

$$\mu_1 + \ldots + \mu_m \quad - \lambda_1 - \quad \ldots - \lambda_n \quad = \int_a^b p(s)ds$$

$$\mu_1 \frac{b-x_1'}{1!} + \ldots + \mu_m \frac{b-x_m'}{1!} - \lambda_1 \frac{b-x_1}{1!} - \ldots - \lambda_n \frac{b-x_n}{1!} = \int_a^b p(s)(b-s)ds$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_1 \frac{(b-x_1')^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots + \mu_m \frac{(b-x_m')^{n+m-1}}{(m+n-1)!} - \lambda_1 \frac{(b-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} - \ldots - \lambda_n \frac{(b-x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} = \int_a^b p(s)(b-s)^{n+m-1}\,ds$$



sau

$$\mu_1 + \ldots + \mu_m \quad - \lambda_1 \quad - \ldots - \lambda_n \quad = \int_a^b p(s)ds$$

$$\mu x_1' + \ldots + \mu_m x_m' \quad - \lambda_1 x_1 \quad - \ldots - \lambda_n x_n \quad = \int_b^b p(s)sds \tag{22}$$

$$\mu_1 x_1'^{n+m-1} + \ldots + \mu_m x_m'^{m+n-1} - \lambda_1 x_1^{n+m-1} - \ldots - \lambda_n x_n^{n+m-1} = \int_a^b p(s)s^{n+m-1}ds.$$

Determinantul acestui sistem fiind determinantul lui Vandermonde al numerelor $x_1', x_2', \ldots, x_m', x_1, x_2, \ldots, x_n$ este diferit de zero și deci constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ și $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sînt perfect determinate.

*Interpretarea coeficienților* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$. Derivînd de $n+m-1$ or ecuațiile (19) și (20) avem ecuațiile

$$\varphi_1^{(n+m-1)}(x) = \lambda_n$$

$$\varphi_2^{(n+m-1)}(x) = \lambda_n + \lambda_{n-1} \tag{23}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n^{(n+m-1)}(x) = \lambda_n + \lambda_{n-1} + \ldots + \lambda_1$$

$$\varphi_{n+2}^{(n+m-1)}(x) = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m \tag{24}$$

$$\varphi_{n+3}^{(n+m-1)}(x) = \mu_2 + \mu_3 + \ldots + \mu_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{n+m}^{(n+m-1)}(x) = \mu_{m-1} + \mu_m$$

$$\varphi_{n+m+1}^{(n+m-1)}(x) = \mu_m.$$

Ținînd seama atunci de ecuațiile (13) se deduce că

$$\lambda_n = -A_n, \quad \lambda_{n-1} = -A_{n-1}, \ldots, \quad \lambda_1 = -A_1,$$
$$\mu_m = A_m', \mu_{m-1} = A_{m-1}', \ldots, \quad \mu_1 = A_1'. \tag{25}$$

Deci coeficienții $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ se leagă de coeficienții din formula de cuadratură (12) prin formulele (25).

Sistemul de ecuații liniare (22) este rezolvat de la sine dacă ținem seama de ecuațiile (25) și de formulele (16) și (18).

5. *Polinoamele* $\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$ *afară de* $\varphi_{n+1}(x)$ *sînt de gradul* $n+m-1$. Dacă ținem seama de formulele (23), (24) și apoi de formulele (25), va trebui să demonstrăm că sumele

$$\begin{aligned} B_n &= A_n \\ B_{n-1} &= A_n + A_{n-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_1 &= A_n + A_{n-1} + \ldots + A_1 \\ B'_m &= A'_m \\ B'_{m-1} &= A'_m + A'_{m-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B'_1 &= A'_m + A'_{m-1} + \ldots + A'_1 \end{aligned} \tag{26}$$

sînt diferite de zero.

Să considerăm polinomul de interpolare $\psi_j(x)$ care satisface la următoarele condiții.

$$\begin{aligned} &\psi_j(x_n) = 1,\ \psi_j(x_{n-1}) = 1,\ldots,\ \psi_j(x_{n-j+1}) = 1, \\ &\psi_j(x_{n-j}) = 0,\ \psi_j(x_{n-j-1}) = 0,\ldots,\ \psi_j(x_1) = 0, \\ &\psi_j(x'_1) = 0,\ \psi_j(x'_2) = 0,\ldots,\ \psi_j(x'_m) = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

unde $j$ este unul din numerele 1, 2,..., $n$.

*Polinomul* $\psi_j(x)$ *este de grad cel mult* $n+m-l$. *Să demonstrăm că el este de grad efectiv* $n+m-1$.

Pentru aceasta să aplicăm teorema lui Rolle la intervalele

$$[x_n, x_{n-1}],\ldots, [x_{n-j+2}, x_{n-j+1}],\ [x_{n-j}, x_{n-j-1}],\ldots, [x'_{m-1}, x'_m].$$

Deoarece polinomul $\psi_j(x)$ ia valori egale în extremitățile fiecărui interval, derivata lui $\psi'_j(x)$ are cel puțin un zero în fiecare din aceste intervale, adică derivata $\psi'_j(x)$ are cel puțin $n+m-2$ zerouri reale și distincte. Dacă polinomul $\psi_j(x)$ ar fi de grad mai mic decît $n+m-1$, derivata lui $\psi'_j(x)$ ar fi de grad mai mic decît $n+m-2$, și avînd $n+m-2$ zerouri distincte, ar urma ca ea să fie identic nulă. În acest caz ar trebui ca polinomul $\psi_j(x)$ să fie o constantă ceea ce este imposibil, deoarece $\psi_j(x)$ ia valoarea 1 în punctul $x_n$ și valoarea zero în punctul $x'_i$. Deci polinomul $\psi_j(x)$ este de gradul $n+m-1$.

Polinomul $\psi_j(x)$ are un semn constant în intervalul $(x_1, x'_1)$ și deci în intervalul $[a,b]$ care este inclus în intervalul $(x_1, x'_1)$. Să demonstrăm că *semnul lui* $\psi_j(x)$ *în intervalul* $(x_1, x'_1)$ *și deci în intervalul* $[a,b]$ *este semnul lui* $(-1)^{n-j}$.

Pentru aceasta vom observa că în intervalul $[x_{n-j+1}, x_{n-j}]$ derivata $\psi'_j(x)$ păstrează un semn constant, deoarece $\psi'_j(x)$ are un zero în intervalul $(x_{n-j+2}, x_{n-j+1})$ și primul zero care urmează după acesta este în intervalul $(x_{n-j}, x_{n-j-1})$. Dreapta care unește punctele de coordonate $(x_{n-j+1}, 1)$, $(x_{n-j}, 0)$ are coeficientul unghiular negativ. Atunci conform teoremei creșterilor finite, există în intervalul $(x_{n-j+1}, x_{n-j})$ cel puțin un punct unde derivata $\psi'_j(x)$ este negativă. Se deduce astfel că $\psi'_j(x)$ are semnul negativ în intervalul $(x_{n-j+1}, x_{n-j})$ adică polinomul $\psi_j(x)$ *descrește* în acest interval. Atunci rezultă că $\psi_j(x)$ este negativ în



intervalul $(x_{n-j}, x_{n-j-1})$, pozitiv în intervalul $(x_{n-j-1}, x_{n-j-2}), \ldots,$ și că în intervalul $(x_1, x'_1)$ are semnul lui $(-1)^{n-j}$.

Dacă în formula de cuadratură (12) înlocuim funcția $f(x)$ cu polinomul $\psi_j(x)$, din cauza condițiilor (27), avem

$$\int_a^b p(x)\,\psi_j(x)\,dx = A_n + A_{n-1} + \ldots + A_{n-j+1}.$$

Însă polinomul $\psi_j(x)$ păstrînd un semn constant în intervalul $[a,b]$ și anume semnul lui $(-1)^{n-j}$, rezultă că *suma* $A_n + A_{n-1} + \ldots + A_{n-j+1}$ este *diferită de zero și are semnul lui* $(-1)^{n-j}$.

Cu aceasta am demonstrat că *polinoamele* $\varphi_1(x), \varphi_2(x),\ldots, \varphi_n(x)$ *sînt efectiv de gradul* $n+m-1$.

În mod analog se demonstrează că polinomul $\theta_l(x)$, care satisface la condițiile

$$\begin{aligned} &\theta_l(x'_m) = 1,\ \theta_l(x'_{m-1}) = 1, \ldots,\ \theta_l(x'_{m-l+1}) = 1, \\ &\theta_l(x'_{m-l}) = 0, \ldots,\ \theta_l(x'_1) = 0, \\ &\theta_l(x_1) = 0, \ldots, \theta_l(x_n) = 0, \end{aligned}$$

este de gradul efectiv $n+m-1$ și că semnul lui în intervalul $(x_1, x'_1)$ și deci în intervalul $[a,b]$ este semnul lui $(-1)^{m-l}$. Înlocuind în formula de cuadratură (12), funcția $f(x)$ cu polinomul $\theta_l(x)$, se obține

$$\int_a^b p(x)\,\theta_l(x)dx = A'_m + A'_{m-1} + \ldots + A'_{m-l+1},$$

de unde rezultă că *sumele* $A'_m + A'_{m-1} + \ldots + A'_{m-l+1}$ *sînt diferite de zero și au semnul lui* $(-1)^{m-l}$, *pentru* $l = 1, 2, \ldots, m$.

Se demonstrează astfel că polinoamele $\varphi_{n+m+1}(x), \varphi_{n+m}(x),\ldots, \varphi_{n+2}(x)$ sînt polinoame de gradul efectiv $n+m-1$.

6. *O teoremă asupra reziduurilor unei funcții raționale.* La punctul 5 s-a demonstrat că polinomul de interpolare $\psi_j(x)$, care satisface la condițiile (27), este de gradul efectiv $n+m-1$. Aceasta ne conduce la următoarea

Teoremă. *Fiind dată funcția rațională*

$$\frac{1}{(x-x_1)\ (x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

*unde* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *sînt noduri luate în ordine crescătoare, iar* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *sînt reziduurile ei relative la polurile* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *sumele* $A_1+A_2+\ldots+A_i$ *sînt diferite de zero și au semnul lui* $(-1)^{n-i}$, *pentru* $i=1, 2, \ldots, n-1$.

Într-adevăr, dacă se consideră polinomul de interpolare $h_k(x)$ care se anulează în toate nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ afară de nodul $x_k$ unde ia valoarea 1, avem

$$h_k(x) = \frac{(x-x_1)\ \ldots\ (x-x_{k-1})\ (x-x_{k+1})\ \ldots\ (x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})\,(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} = A_k\,x^{n-1} + \ldots$$

Polinomul

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_i(x),$$

adică

$$h(x) = (A_1 + A_2 \ldots + A_i)\, x^{n-1} + \ldots$$

satisface la condițiile

$$h(x_1) = 1,\ h(x_2) = 1, \ldots, h(x_i) = 1,$$
$$h(x_{i+1}) = 0, \ldots, h(x_n) = 0.$$

Raționamentele făcute la punctul 5 pentru a demonstra că polinomul $\psi_j(x)$ este de gradul efectiv $n+m-1$, sînt valabile și pentru polinomul $h(x)$. Deci polinomul $h(x)$ este de gradul efectiv $n-1$, adică sumele $A_1+A_2+\ldots+A_i$ sînt diferite de zero. Pentru a găsi semnul lui $A_1+A_2+\ldots+A_i$ se observă că în intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ polinomul $h(x)$ descrește de la 1 la 0, apoi în intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ polinomul $h(x)$ are un maxim, în intervalul $[x_{i-2}, x_{i-1}]$ un minim, ... și așa mai departe, în intervalul $[x_1, x_2]$, polinomul $h(x)$ are un maxim sau un minim, după cum $i$ este par sau impar. Rezultă că în intervalul $(-\infty, x_1)$ polinomul $h(x)$ crește sau descrește după cum $i$ este par sau impar, adică după cum $(-1)^i$ este pozitiv sau negativ. Însă în intervalul $(-\infty, x_1)$, polinomul

$$h(x) = (A_1 + A_2 + \ldots + A_i)\, x^{n-1} + \ldots$$

crește sau descrește după cum $(A_1 + A_2 + \ldots + A_i)\,(-1)^n$ este pozitiv sau negativ. Deducem astfel că *semnul lui* $A_1 + A_2 + \ldots + A_i$ *este semnul lui* $(-1)^{n-i}$.

7. *Forma curbei* $y=\varphi(x)$ *în intervalul* $[x_n, x_m']$. Funcția $\varphi(x)$ care coincide cu funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$ în intervalele $[x_n, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}\ x_{n-2}], \ldots, [x_{m-1}', x_m']$ este continuă în intervalul $[x_n, x_m']$, împreună cu derivatele ei succesive pînă la ordinul $n+m-2$, iar în intervalul $[x_1, x_1']$ funcția $f(x)$ este continuă împreună cu derivatele ei succesive pînă la ordinul $n+m-1$. Aceasta rezultă din condițiile la limită (6) — (11). Vom demonstra următoarea

T e o r e m ă. *Funcția* $y=\varphi(x)$ *are un singur extrem în intervalul* $(x_n, x_m')$ *care este un maxim dacă n este par sau un minim dacă n este impar.*

Într-adevăr să presupunem că funcția $y=\varphi(x)$ ar avea două extreme în intervalul $(x_n, x_m')$, adică derivata $\varphi'(x)$ s-ar anula în două puncte $\xi_1, \xi_2$ din intervalul $(x_n, x_m')$. Ținînd seama de condițiile la limită (6) și (11) se deduce aplicînd succesiv teorema lui Rolle că derivata $\varphi^{(n+m-2)}(x)$ s-ar anula în $n+m-1$ puncte distincte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+m-1}$ din intervalul $(x_n, x_m')$ pe care le presupunem că sînt așezate în ordine crescătoare.

Punctul $\eta_1$ nu poate să aparțină intervalului $(x_n, x_{n-1}]$, deoarece s-a arătat că $\varphi_1(x)$ este un polinom de gradul efectiv $n+m-1$.

Punctul $\eta_1$ poate fi situat în intervalul $(x_{n-1}, x_{n-2}]$, însă în acest caz în intervalul $(x_{n-1}, x_{n-2}]$ nu poate fi situat alt punct $\eta_2$. Într-adevăr, dacă în intervalul $(x_{n-1}, x_{n-2}]$ s-ar găsi punctele $\eta_1$ și $\eta_2$, atunci, aplicînd teorema lui Rolle, ar urma ca derivata $\varphi^{(n+m-1)}(x)$ să se anuleze într-un punct din intervalul $(\eta_1, \eta_2)$. Aceasta este însă imposibil, deoarece s-a demonstrat (la punctul 5) că polinomul $\varphi_2(x)$ este de gradul efectiv $n+m-1$.

În mod analog se arată că în fiecare interval $(x_{n-2}, x_{n-3}], \ldots, (x_2, x_1], (x_1, a]$ nu se poate găsi decît cîte un punct $\eta_2, \ldots, \eta_{n-2}, \eta_{n-1}$.



În mod analog se arată că în intervalul $[x_{m-1}', x_m')$ nu se găsește nici un punct $\eta$, iar în intervalele succesive $[x_{m-2}', x_{m-1}'), [x_{m-3}', x_{m-2}'), \ldots, [b, x_1')$ se găsesc numai cîte un punct $\eta_{n+m-1}, \eta_{n+m-2}, \ldots, \eta_{n+1}$.

Rezultă că în intervalul $(a, b)$ se mai găsește un punct $\eta_n$.

Să considerăm acum funcția $\varphi(x)$ în intervalul $(x_1, x_1')$. Ea este continuă în acest interval și are derivate succesive continue pînă la ordinul $n+m-1$ (condițiile (8) și (9)). Derivata $\varphi^{(n+m-2)}(x)$ se anulează în trei puncte distincte $\eta_{n-1} \in (x_1, a]$, $\eta_n \in (a,b)$, $\eta_{n+1} \in [b, x_1')$. Atunci aplicînd teorema lui Rolle la funcția $\varphi^{(n+m-2)}(x)$ și la intervalele $[\eta_{n-1}, \eta_n], [\eta_n, \eta_{n+1}]$, se deduce că derivata $\varphi^{(n+m-1)}(x)$ se anulează în două puncte $\zeta_1, \zeta_2$ distincte din intervalul $(x_1, x_1')$. Punctul $\zeta_1$ nu poate să aparțină intervalului $(x_1, a)$ căci în acest interval $\varphi(x)$ este un polinom de gradul efectiv $n+m-1$. De asemenea punctul $\zeta_2$, nu poate să aparțină intervalului $(b, x_1')$ căci în acest interval $\varphi(x)$ este un polinom de gradul efectiv $n+m-1$. Deci punctele $\zeta_1$ și $\zeta_2$ aparțin intervalului $[a,b]$. Funcția $\varphi(x)$, având în intervalul $(a,b)$ derivata $\varphi^{(n+m)}(x)$ continuă, se poate aplica teorema lui Rolle la funcția $\varphi^{(n+m-1)}(x)$ și la intervalul $[a,b]$. Se deduce că derivata $\varphi^{(n+m)}(x)$ ar trebui să se anuleze într-un punct $\zeta$ din intervalul $(a, b)$, ceea ce este imposibil căci în acest interval avem $\varphi^{(n+m)}(x) = p(x)$.

S-a ajuns astfel la o contradicție, de unde rezultă că este imposibil ca funcția $y = \varphi(x)$ să aibă două extreme în intervalul $(x_n, x_m')$.

Deci funcția $y = \varphi(x)$ are un singur extrem în intervalul $(x_n, x_m')$. Observăm că semnul lui $y = \varphi(x)$ în intervalul $(x_n, x_{n-1}]$

$$y = \lambda_n \frac{(x - x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} = -A_n \frac{(x - x_n)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

este dat de semnul lui $-A_n$. S-a arătat că semnul lui $A_n$ este semnul lui $(-1)^{n-1}$. Deci semnul lui $\varphi(x)$ în intervalul $(x_n, x_{n-1})$ este semnul lui $(-1)^n$.

Rezultă că funcția $y = \varphi(x)$ are un maxim în intervalul $(x_n, x_m')$ dacă $n$ este par, și un minim dacă $n$ este impar

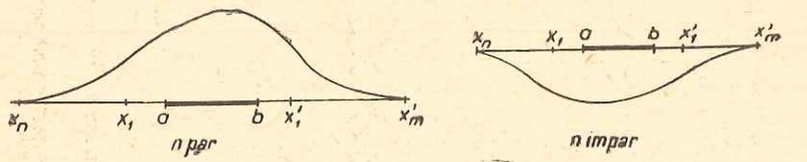


Fig. 1

Forma curbei $y=\varphi(x)$ în intervalul $[x_n, x_m']$ este dată în figura 1, după cum $n$ este par sau impar.

În cazul cînd $n=1$ și $m=1$, forma curbei $y = \varphi(x)$ este dată în figura 2.

8. *Restul în formula de cuadratură* (12). Este dat de formula (14), adică

$$R = (-1)^{n+m} \int_{x_n}^{x_m'} \varphi(x) f^{(n+m)}(x)\, dx,$$

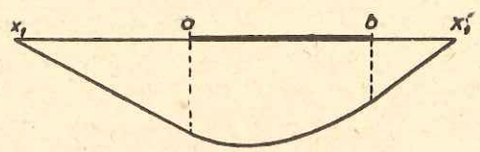


Fig. 2

unde știm că funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(x_n, x_m')$. Funcția $f(x)$ fiind de clasa $C^{n+m}$, putem scrie

$$R = (-1)^{n+m} f^{(n+m)}(\xi) \int_{x_n}^{x_m} \varphi(x)\, dx, \tag{28}$$

unde $\xi \in (x_n, x_m')$.

Integrala din formula (28) se calculează din formula de cuadratură (12) înlocuind pe $f(x)$ prin

$$f(x) = \frac{1}{(n+m)!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)(x-x_1')(x-x_n')\ldots(x-x_m').$$

Vom avea

$$\frac{1}{(n+m)!}\int_a^b p(x)(x-x_1)\ldots(x-x_n)(x-x_1')\ldots(x-x_m')dx=(-1)^{n+m}\int_{x_n}^{x_m'}\varphi(x)dx,$$

de unde se deduce că

$$\int_{x_n}^{x_m'} \varphi(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{(n+m)!}\int_a^b p(x)(x-x_1)\ldots(x-x_n)(x_1'-x)\ldots(x_m'-x)dx,$$

astfel că formula (28) devine

$$R = (-1)^m I f^{(n+m)}(\xi), \tag{29}$$

unde $I$ este un număr pozitiv, care depinde numai de nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_m'$ și anume

$$I = \frac{1}{(n+m)!}\int_a^b p(x)(x-x_1)\ldots(x-x_n)(x_1'-x)\ldots(x_m'-x)\, dx. \tag{30}$$

Dacă notăm cu $M_{n+m}$ marginea superioară a lui $|f^{(n+m)}(x)|$ în intervalul $[x_n, x_m']$, atunci din formula (29) rezultă că vom avea următoarea evaluare a valorii absolute a restului $R$,

$$|R| \leqslant \rho(x_n, \ldots, x_m'), \tag{31}$$

unde $\rho(x_n, \ldots, x_m')$ este o margine superioară a lui $|R|$, definită de formula

$$\rho(x_n, \ldots, x_m') = I\, M_{n+m} \tag{32}$$

*Consecință. Dacă se iau alte noduri exterioare* $x_1^*, \ldots, x_n^*$ *și* $x_1'^*, \ldots, x_m'^*$ *astfel ca* $x_k^* \leqslant x_k$ *pentru* $k = 1, 2, \ldots, n$ *și* $x_i^* \geqslant x_i'$ *pentru* $i = 1, 2, \ldots, m$ *fără însă să existe egalitate pentru toate valorile lui* $k$ *și ale lui* $i$ *atunci pentru marginea superioară* $\rho^*(x_n^*, \ldots, x_m'^*)$ *a valorii absolute a restului* $R^*$, *vom avea*

$$\rho^*(x_n^*, \ldots, x_m'^*) > \rho(x_n, \ldots, x_m') \tag{33}$$



Într-adevăr, avem

$$\rho^*(x_n^*, \ldots, x_m'^*) = M_{n+m}^* I_{n+m}^*,$$

unde $M_{n+m}^*$ este marginea superioară a lui $\left|f^{(n+m)}(x)\right|$ în intervalul $[x_n^*, x_m'^*]$, iar

$$I^* = \frac{1}{(n+m)!}\int_a^b (x-x_1^*)\ldots(x-x_n^*)(x_1'^*-x)\ldots(x_m'^*-x)\, dx.$$

Ținînd seama de felul cum au fost alese nodurile $x_k^*$ și $x_i'^*$, avem

$$(x-x_1^*)\ldots(x-x_n^*)(x_1'^*-x)\ldots(x_m'^*-x) >$$
$$(x-x_1)\ldots(x-x_n)(x_1'-x)\ldots(x_m'-x)$$

de unde rezultă că $I^* > I$. Pe de altă parte $M_{n+m}^* \geqslant M_{n+m}$ și deci

$$M_{n+m}^* I^* > M_{n+m} I$$

adică avem inegalitatea (33).

Deci, *nu avem interes să deplasăm nodurile* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *spre stînga și nodurile* $x_1', x_2', \ldots, x_m'$ *spre dreapta, căci în acest caz marginea superioară* $\rho(x_n, \ldots, x_m')$ *crește.*

9. *Formula de cuadratură a lui N. Obrechkoff* [3]. Se cunoaște formula de cuadratură

$$\int_b^a p(x) f(x)\, dx = A_0 f(a) + A_1 f'(a) + \ldots + A_{n-1} f^{(n-1)}(a) + \\ + B_0 f(b) + B_1 f'(b) + \ldots + B_{m-1} f^{(m-1)}(b) + R_0 \tag{34}$$

numită *formula lui N. Obrechkoff*, unde restul $R_0$ este

$$R_0 = (-1)^m \frac{1}{(n+m)!}\int_a^b p(x)(x-a)^n (b-x)^m f^{(n+m)}(x)\, dx.$$

Mai putem scrie

$$R_0 = (-1)^m \frac{f^{(n+m)}(\xi_0)}{(n+m)!}\int_a^b p(x)(x-a)^n (b-x)^m\, dx, \tag{35}$$

unde $\xi_0 \in (a, b)$

Notînd cu $M_{n+m}$ marginea superioară a lui $|f^{(n+m)}(x)|$ în intervalul $[a,b]$, și cu

$$I_0 = \int_a^b p(x)(x-a)^n (b-x)^m\, dx \tag{36}$$

vom avea următoarea evaluare pentru $|R_0|$

$$|R_0| \leqslant \rho_0(a,b) \tag{37}$$

unde $\rho_0(a,b)$ este o margine superioară pentru $|R_0|$, definită de formula.

$$\rho_0(a,b) = M^0_{n+m} I_0. \tag{38}$$

10. *Comparație între marginea superioară* $\rho(x_n, \ldots, x'_m)$ *a valorii absolute a restului R din formula de cuadratură* (12) *și marginea superioară* $\rho_0(a,b)$ *a valorii absolute a restului* $R_0$ *din formula de cuadratură* (34) *a lui Obrechkoff.* Să demonstrăm că *oricare ar fi alegerea nodurilor exterioare* $x_1, \ldots, x_n$ *și* $x'_1, \ldots, x'_m$, *avem inegalitatea*

$$\rho(x_n, \ldots, x'_m) > \rho_0(a,b). \tag{39}$$

Într-adevăr, avem

$$(x-x_1)\ldots(x-x_n) > (x-a)^n, \quad (x'_1-x)\ldots(x'_m-x) > (b-x)^m$$

și deci, ținînd seama de formulele (30) și (36) avem

$$I > I_0.$$

Pe de altă parte, $M_{n+m} \geqslant M^0_{n+m}$, de unde rezultă inegalitatea (39).

De aici rezultă că *dacă este posibil să se aplice la funcția* $f(x)$, *formula de cuadratură* (34) *a lui Obrechkoff, este preferabil să se folosească formula de cuadratură a lui Obrechkoff, decît formula de cuadratură* (12) *cu noduri exterioare, deoarece marginea superioară* $\rho(x_n, \ldots, x'_m)$ *a lui R din formula de cuadratură* (12) *este mai mare decît marginea superioară* $\rho_0(a,b)$ *a lui* $|R_0|$ *din formula de cuadratură a lui Obrechkoff.*

*Exemplu.* Dacă se aleg nodurile $x_0-2h, x_0-3h$, și $x_0+2h, x_0+3h$ exterioare intervalului $(x_0-h, x_0+h)$, avem următoarea formulă de cuadratură

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{15}\left\{26[f(x_0-2h)+f(x_0+2h)] - 11[f(x_0-3h)+f(x_0+3h)]\right\} + R, \tag{40}$$

unde restul $R$ este dat de formula

$$R = \int_{x_0-3h}^{x_0+3h} \varphi(x) f^{(IV)}(x)\,dx$$

funcția $\varphi(x)$ fiind egală cu $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$ în intervalele $[x_0-3h, x_0-2h]$, $[x_0-2h, x_0-h]$, $[x_0-h, x_0+h]$, $[x_0+h, x_0+2h,]$ $[x_0+2h, x_0+3h]$. Avem

$$\varphi_1(x) = \frac{11}{15} h \frac{(x-x_0+3h)^3}{3!},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{11}{15} h \frac{(x-x_0+3h)^3}{3!} - \frac{(x-x_0+2h)^3}{3!},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_0+h)^4}{4!} + \frac{11}{15} h \frac{(x-x_0+3h)^3}{3!} - \frac{26h}{15}\frac{(x-x_0+2h)^3}{3!},$$

$$\varphi_4(x) = -\frac{11h}{15}\frac{(x-x_0-3h)^3}{3!} + \frac{26h}{15}\frac{(x-x_0-2h)^3}{3!},$$

$$\varphi_5(x) = -\frac{11h}{15}\frac{(x-x_0-3h)^3}{3!}.$$



O evaluare a lui $|R|$ în formula de cuadratură (40) este dată de

$$|R| \leqslant \rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h),$$

unde

$$\rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h) =$$

$$= \frac{M_4}{4!}\int_{x_0-3h}^{x_0+3h} (x-x_0+3h)(x-x_0+2h)(x-x_0-2h)(x-x_0-3h)\,dx.$$

Calculînd integrala din membrul al doilea, se obține

$$\rho(x_0-3h,.., x_0+3h) = \frac{239}{2880}(2h)^5 M_4. \tag{41}$$

Dacă se consideră formula de cuadratură a lui Obrechkoff (34) pentru $n=2$ și $m=2$, care se reduce la

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx = h[f(x_0+h)+f(x_0-h)] - \frac{h^2}{3}[f'(x_0+h)-f'(x_0-h)] + R_0 \tag{42}$$

avem

$$R_0 = \frac{1}{4!}\int_{x_0-h}^{x_0+h} (x-x_0+h)^2(x-x_0-h)^2 f^{(IV)}(x)\,dx.$$

Vom avea

$$|R_0| \leqslant \rho_0(x_0-h, x_0+h),$$

unde

$$\rho_0(x_0-h, x_0+h) = \frac{M^0_4}{4!}\int_{x_0-h}^{x_0+h} (x-x_0+h)^2(x-x_0-h^2)\,dx.$$

Făcînd calculul integralei din membrul al doilea, avem

$$\rho_0(x_0-h, x_0+h) = \frac{4}{2880}(2h)^5 M^0_4. \tag{43}$$

Comparînd cele două margini superioare $\rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h)$ ale lui $|R|$ din formula de cuadratură (40) și $\rho_0(x_0-h, x_0+h)$ a lui $|R_0|$ din formula de cuadratură (42), găsim

$$\frac{\rho(x_0-3h, \ldots, x_0+3h)}{\rho_0(x_0-h, x_0+h)} = \frac{239}{4}\frac{M_4}{M^0_4} \geqslant \frac{239}{4}. \tag{44}$$

Inegalitatea (44) arată că $\rho(x_0-3h,\ldots, x_0+3h)$ este aproximativ de 60 de ori mai mare decît $\rho_0(x_0-h, x_0+h)$ ceea ce ne face să socotim formula de cuadratură (42) cu mult mai preferabilă decît formula de cuadratură (40).

11. *Comparație între marginea superioară* $\rho(x_0-3h,\ldots,x_0+3h)$ *a lui* $|R|$ *din formula de cuadratură* (40) *și marginea superioară a valorii absolute a restului din alte formule de cuadratură.* Să considerăm pe lîngă formula de cuadratură (40), formula de cuadratură a lui Simpson care utilizează nodurile $x_0-h$, $x_0+h$ și nodul interior $x_0$, adică

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0-h)+4f(x_0)+f(x_0+h)]+R_s. \tag{45}$$

Se știe că

$$|R_s| \leqslant \rho_s(x_0-h, x_0+h),$$

unde

$$\rho_s(x_0-h, x_0+h) = \frac{M_4^0}{2880}(2h)^5. \tag{46}$$

Pentru formulele de cuadratură (40) și (45),putem compara marginile superioare $\rho(x_0-3h,\ldots,x_0+3h)$ și $\rho_s(x_0-h,\ x_0+h)$ date de formulele (41) și (46). Vom avea

$$\frac{\rho(x_0-3h,\ldots,x_0+3h)}{\rho_s(x_0-h, x_0+h)} = 239\frac{M_4}{M_4^0} \geqslant 239. \tag{47}$$

De asemenea dacă considerăm formula de cuadratură cu noduri interioare, recomandată de noi

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \frac{h}{1083}[625f(x_1)+916f(x_0)+625f(x_2)]+R', \tag{48}$$

unde

$$x_1 = x_0-\frac{19}{25}h, \qquad x_2 = x_0+\frac{19}{25}h$$

s-a arătat că

$$|R'| \leqslant \rho'(x_0-h, x_0+h),$$

unde

$$\rho'(x_0-h, x_0+h) = \frac{M_4^0}{2880}\cdot 0{,}07679\,(2h)^5. \tag{49}$$

Pentru formulele de cuadratură (40) și (48) putem compara marginile superioare $\rho(x_0-3h,\ldots,x_0+3h)$ și $\rho'(x_0-h,\ x_0+h)$ date de formulele (41) și (49). Vom avea

$$\frac{\rho(x_0-3h,\ldots,x_0+3h)}{\rho'(x_0-h, x_0+h)} = \frac{239}{0{,}07679}\frac{M_4}{M_4^0} \geqslant 3112,\ldots \tag{50}$$

Formulele (47) și (50) arată net *dezavantajul formulelor de cuadratură cu noduri exterioare, față de formulele de cuadratură cu noduri interioare.*

Exemplul simplu al formulei de cuadratură (40) și numerele mari din membrii ai doilea ai formulelor de comparație (47) și (50) ne fac să studiem sistematic mar-



ginile superioare $\rho(x_n,\ldots,x_m')$ ale valorii absolute a restului din formulele de cuadratură cu noduri exterioare. În special vom studia resturile formulelor de cuadratură care provin din aplicarea formulelor de interpolare cu noduri echidistante.

12. *Cazul* $m=0$. În cazul cînd toate nodurile exterioare sînt de o parte a lui $a$, sau de o parte a lui $b$, de exemplu la stînga lui $a$ ($m=0$), formula de cuadratură (12) devine

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+\ldots+A_nf(x_n)+(-1)^n\int_{x_n}^b \varphi(x)f^{(n)}(x)\,dx \tag{51}$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide pe rînd cu funcțiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_{n+1}(x)$ în intervalele $[x_n, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, x_{n-2}]$, ..., $[a, b]$ care sînt integralele ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i \neq n+1 \\ 1 \text{ dacă } i = n+1 \end{cases}$$

și care satisfac la condițiile la limită

$$\varphi_1(x_n) = 0, \varphi_1'(x_n) = 0,\ldots, \varphi_1^{(n-2)}x_n = 0,$$

$$\varphi_2(x_{n-1}) = \varphi_1(x_{n-1}),\ \varphi_2'(x_{n-1}) = \varphi_1'(x_{n-1}),\ldots,\ \varphi_2^{(n-2)}(x_{n-1}) = \varphi_1^{(n-2)}(x_{n-1}),$$

. . . . . .

$$\varphi_n(x_1) = \varphi_{n-1}(x_1),\ \varphi_n'(x_1) = \varphi_{n-1}'(x_1),\ \ldots,\ \varphi_n^{(n-2)}(x_1) = \varphi_{n-1}^{(n-2)}(x_1),$$

$$\varphi_{n+1}(a) = \varphi_n(a),\ \varphi_{n+1}'(a) = \varphi_n'(a),\ \ldots,\ \varphi_{n+1}^{(n-2)}(a) = \varphi_n^{(n-2)}(a),\ \varphi_{n+1}^{(n-1)}(a) = \varphi_n^{(n-1)}(a),$$

$$\varphi_{n+1}(b) = 0,\ \varphi_{n+1}'(b) = 0,\ \ldots,\ \varphi_{n+1}^{(n-1)}(b) = 0.$$

Se arată ca la punctul 2, ca în formula de cuadratură (51), coeficienții $A_1, A_2, \ldots, A_n$ au semnele alternate, $A_1$ fiind pozitiv.

Se arată apoi ca la punctele 4, 5, și 7 că forma curbei $y=\varphi(x)$ în cazul $n>2$ este cea indicată în figura 3.

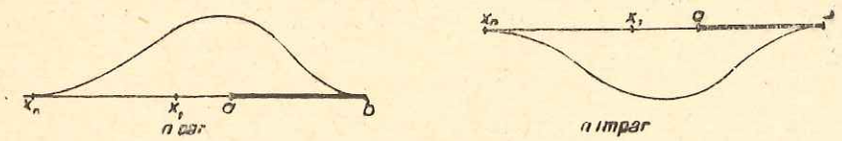


Fig. 3

Cînd $n=1$, formula de cuadratură (51) se reduce la

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(x) - \int_{x_1}^b \varphi(x)f'(x)\,dx.$$

unde curba $y=\varphi(x)$ are forma din figura 4.

Cînd $n=2$, formula de cuadratură (51), se reduce la

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{x_1-x_2}\left[\left(\frac{a+b}{2}-x_2\right)f(x_1)-\left(\frac{a+b}{2}-x_1\right)f(x_2)\right]+\int_{x_2}^{b}\varphi(x)\,f''(x)dx$$

unde curba $y=\varphi(x)$ are forma din figura 5.

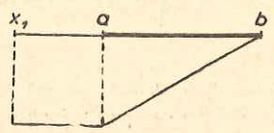


Fig. 4

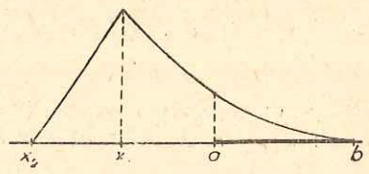


Fig. 5

Se arată ca la punctul 8 că restul în formula de cuadratură (51) se poate scrie sub forma

$$R=\frac{f^n(\xi)}{n!}\int_a^b (x-x_1)\ (x-x_2)\ldots\ (x-x_n)\ dx,$$

unde $\xi\in(x_n,b)$. Rezultă că o margine superioară, pentru $|R|$, este

$$\rho(x_n,\ldots,x_1)=\frac{M_n}{n!}\int_a^b (x-x_1)\ (x-x_2)\ldots(x-x_n)\ dx,$$

unde $M_n$ este marginea superioară a lui $|f^{(n)}(x)|$ în intervalul $[x_n,b]$.

Cînd nodurile $x_1, x_2,\ldots, x_n$ se deplasează spre stînga marginea superioară $\rho(x_n,\ldots,x_1)$ crește.

Dacă se consideră formula de cuadratură cu nodul $a$ multiplu de ordinul $n$,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{1}f(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f'(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n-1)}(a)+$$
$$+\int_a^b\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)\,dx$$

restul ei, în valoare absolută, are marginea superioară

$$\rho_0(a,b)=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}M_n^0,$$

unde $M_n^0$ este marginea superioară a lui $|f^{(n)}(x)|$ în intervalul $[a,b]$.

Oricare ar fi alegerea nodurilor $x_1, x_2,\ldots, x_n$, avem

$$\rho(x_n,\ldots,x_1)>\rho_0(a,b).$$



*Exemplu.* Dacă se consideră intervalul $(x_0-h,\ x_0+h)$ și nodurile $x_0-2h,\ x_0-3h,\ x_0-4h,\ x_0-5h$, avem formula de cuadratură

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx=\frac{h}{3}\,[64\,f(x_0-2h)-131f(x_0-3h)+$$
$$+100\,f(x_0-4h)-27f(x_0-5h)]+\int_{x_0-5h}^{x_0+h}\varphi(x)\,f^{(IV)}(x)\,dx. \tag{52}$$

Avem

$$|R|\leqslant\rho(x_0-5h,\ldots,x_0-2h),$$

unde

$$\rho(x_0-5h,\ldots,x_0-2h)=\frac{1079}{2880}M_4(2h)^5.$$

Dacă se compară marginea superioară $\rho(x_0-5h,\ldots,x_0-2h)$ cu marginea superioară a valorii absolute a restului din formula lui Simpson (43) avem

$$\frac{\rho(x_0-5h,\ldots x_0-2h)}{\rho_s(x_0-h,\ x_0+h)}=1079\,\frac{M_4}{M_4^0}\geqslant 1079.$$

Dacă se compară marginea superioară $\rho(x_0-5h,\ldots,x_0-2h)$ cu marginea superioară a valorii absolute a restului din formula de cuadratură (48), avem

$$\frac{\rho(x_0-5h,\ldots,x_0-2h)}{\rho'(x_0-h,\ x_0+h)}=\frac{1079}{0{,}07679}\,\frac{M_4}{M_4^0}\geqslant 14051,\ldots$$

Numerele mari 1 079 și 14 051 din formulele precedente arată dezavantajul formulelor de cuadratură cu noduri exterioare, față de formulele de cuadratură cu noduri interioare tratate mai sus.

## § 2. Formule cu noduri simple exterioare și nodurile $a$, $b$

13. Reluăm integrala (1) cu aceleași ipoteze ca la punctul 1. La această integrală atașem nodurile $x_1', x_2',\ldots, x_{m-1}'$ la dreapta lui $b$ în ordine crescătoare și noduri $x_1, x_2\ldots, x_{n-1}$ la stînga lui $a$ în ordine descrescătoare, toate nodurile fiind cuprinse în intervalul $[\alpha,\beta]$. Vrem să stabilim o formulă de cuadratură cu noduri exterioare și cu nodurile $a, b$ de forma

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=A_0f(a)+A_1f(x_1)+\ldots+A_{n-1}f(x_{n-1})+$$
$$+A_0'f(b)+A_1'f(x_1')+\ldots+A_{m-1}'f(x_{m-1}')+R \tag{53}$$

și să-i studiem restul.

Procedăm ca la punctul 1; la intervalele $[x_{n-1}, x_{n-2}], \ldots, [a, b], \ldots, [x'_{m-2}, x'_{m-1}]$ atașem funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \varphi_{n+m-1}(x)$ care sînt integralele ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(n+m)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq n \\ p(x) & \text{dacă } i = n \end{cases} \tag{54}$$

și care îndeplinesc următoarele condiții la limită

$$\varphi_1(x_{n-1}) = 0,\ \varphi_1'(x_{n-1}) = 0, \ldots,\ \varphi_1^{(n+m-2)}(x_{n-1}) = 0$$

$$\varphi_2(x_{n-2}) = \varphi_1(x_{n-2}),\ \varphi_2'(x_{n-2}) = \varphi_1'(x_{n-2}), \ldots,\ \varphi_2^{(n+m-2)}(x_{n-2}) = \varphi_1^{(n+m-2)}(x_{n-2})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{n-1}(x_1) = \varphi_{n-2}(x_1),\ \varphi_{n-1}'(x_1) = \varphi_{n-2}'(x_1), \ldots,\ \varphi_{n-1}^{(n+m-2)}(x_1) = \varphi_{n-1}^{(n+m-2)}(x_1)$$

$$\varphi_n(a) = \varphi_{n-1}(a),\ \varphi_n'(a) = \varphi_{n-1}'(a), \ldots,\ \varphi_n^{(n+m-2)}(a) = \varphi_{n-1}^{(n+m-2)}(a)$$

$$\varphi_{n+1}(b) = \varphi_n(b),\ \varphi_{n+1}'(b) = \varphi_n'(b), \ldots,\ \varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(b) = \varphi_n^{(n+m-2)}(b) \tag{55}$$

$$\varphi_{n+2}(x'_1) = \varphi_{n+1}(x'_1),\ \varphi_{n+2}'(x'_1) = \varphi_{n+1}'(x'_1), \ldots,\ \varphi_{n+2}^{(n+m-2)}(x'_1) = \varphi_{n+1}^{(n+m-2)}(x'_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{n+m-1}(x'_{m-2}) = \varphi_{n+m-2}(x'_{m-2}),\ \varphi_{n+m-1}'(x'_{m-2}) = \varphi_{n+m-2}'(x'_{m-2}), \ldots$$

$$\ldots, \varphi_{n+m-1}^{(n+m-2)}(x'_{m-2}) = \varphi_{n+m-2}^{(n+m-2)}(x_{m-2})$$

$$\varphi_{n+m-1}(x'_{m+1}) = 0,\ \varphi_{n+m-1}'(x'_{m-1}) = 0, \ldots,\ \varphi_{n+m-1}^{(n+m-2)}(x'_{m-1}) = 0.$$

În aceste condiții, obținem formula de cuadratură (53) în care avem

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= -\varphi_1^{(n+m-1)}(x_{n-1}) \\ A_{n-2} &= \varphi_1^{(n+m-1)}(x_{n-2}) - \varphi_2^{(n+m-1)}(x_{n-2}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 &= \varphi_{n-2}^{(n+m-1)}(x_1) - \varphi_{n-1}^{(n+m-1)}(x'_1) \\ A_0 &= \varphi_{n-1}^{(n+m-1)}(a) - \varphi_n^{(n+m-1)}(a) \\ A'_0 &= \varphi_{n+1}^{(n+m-1)}(x'_1) - \varphi_{n+2}^{(n+m-1)}(x'_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A'_{m-2} &= \varphi_{n+m-2}^{(n+m-1)}(x'_{m-2}) - \varphi_{n+m-1}^{(n+m-1)}(x'_{m-2}) \\ A'_{m-1} &= \varphi_{n+m-1}^{(n+m-1)}(x'_{m-1}). \end{aligned} \tag{56}$$

14. *Determinarea coeficienților* $A_i$ și $A_k$. Procedînd ca la punctul 2 avem

$$A_i = \int_a^b p(x)\, P_i(x)\, dx, \tag{57}$$



pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, unde

$$P_0(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-b)(x-x'_1)\ldots(x-x'_{m-1})}{(a-x_1)\ldots(a-x_{n-1})(a-b)(a-x'_1)\ldots(a-x'_{m-1})},$$

$$P_i(x) = \frac{(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n-1})(x-b)(x-x'_1)\ldots(x-x'_{m-1})}{(x_i-a)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n-1})(x_i-b)(x_i-x'_1)\ldots(x_i-x'_{m-1})}$$

pentru $i = 1,2,\ldots, n-1$.

Deoarece $P_i(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(a, b)$, se arată că $A_i$ *are semnul lui* $(-1)^i$ *pentru* $i = 0,1,2,\ldots, m-1$.

În mod analog se arată că

$$A'_k = \int_a^b p(x)\, Q_k(x)\, dx \tag{58}$$

pentru $k = 0,1,2,\ldots, m-1$, unde

$$Q_0(x) = \frac{(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x'_1)\ldots(x-x'_{m-1})}{(b-a)(b-x_1)\ldots(b-x_{n-1})(b-x'_1)\ldots(b-x'_{m-1})},$$

$$Q_k(x) = \frac{(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-b)(x-x'_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x'_{m-1})}{(x'_k-a)(x'_k-x_1)\ldots(x'_k-x_{n-1})(x'_k-b)(x'_k-x'_1)\ldots(x'_k-x_{k-1})(x'_k-x'_{k+1})\ldots(x'_k-x'_{m-1})},$$

pentru $k = 1,2,\ldots, m-1$

Deoarece $Q_k(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(a, b)$ se arată că $A'_k$ *are semnul lui* $(-1)^k$ pentru $k = 0,1,2,\ldots, m-1$.

Ca la punctul 3 se arată că *în formula de cuadratură* (53) *restul R nu poate fi nul pentru orice polinom de grad mai mare ca* $n+m-1$. *În particular nu poate să existe o formulă de cuadratură de tip Gauss cu noduri exterioare, la care să se adauge și nodurile a, b.*

15. *Determinarea funcțiilor* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$..., $\varphi_{n+m-1}(x)$. Ținînd seama de ecuațiile diferențiale (54) și de primele $n$ condiții la limită (55), avem

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \\ \varphi_2(x) &= \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_{n-2}\frac{(x-x_{n-2})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x) &= \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_{n-2}\frac{(x-x_{n-2})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots + \\ &\quad + \lambda_1\frac{(x-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \end{aligned} \tag{59}$$

$$\varphi_n(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} p(s)ds + \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots +$$

$$+ \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \lambda_0 \frac{(x-a)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

unde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sînt constante.

De asemenea ținînd seama de ultimele $(m-1)$ condiții la limită (55) avem

$$\varphi_{n+m-1}(x) = \mu_{m-1}\frac{(x-x'_{m-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

$$\varphi_{n+m-2}(x) = \mu_{m-1}\frac{(x-x'_{m-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \mu_{m-2}\frac{(x-x'_{m-2})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} \qquad (60)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \mu_{m-1}\frac{(x-x'_{m-1})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \mu_{m-2}\frac{(x-x'_{m-2})^{n+m-1}}{(n+m-1)!} + \ldots +$$

$$+ \mu_1 \frac{(x-x'_1)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$$

unde $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{m-1}$ sînt constante.

Scriind că și condițiile (55) din punctul $b$ sînt satisfăcute, avem sistemul de ecuații

$$-\lambda_0(b-a) - \lambda_1(b-x_1) - \ldots - \lambda_{n-1}(b-x'_{n-1}) + \mu_1(b-x'_1) + \ldots +$$

$$+ \mu_{m-1}(b-x'_{m-1}) = \int_a^b (b-s)\,p(s)\,ds$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (61)$$

$$-\lambda_0(b-a)^{n+m-1} - \lambda_1(b-x_1)^{n+m-1} - \ldots - \lambda_{n-1}(b-x_{n-1})^{n+m-1} +$$

$$+ \mu_1(b-x'_1)^{n+m-1} + \ldots + \mu_{m-1}(b-x'_{m-1})^{n+m-1} = \int_a^b (b-s)^{n+m-1} p(s)\,ds$$

care determină constantele $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$, deoarece determinantul sistemului este un determinant al lui Vandermonde.

*Interpretarea coeficienților* $\lambda_i$ și $\mu_k$. Dacă ținem seama de coeficienții din formula de cuadratură (53) dați de formulele (56), avem

$$A_{n-1} = -\lambda_{n-1},\ A_{n-2} = -\lambda_{n-2}, \ldots,\ A_1 = -\lambda_1,\ A_0 = -\lambda_0,$$
$$A'_{m-1} = \mu_{m-1},\ A'_{m-2} = \mu_{m-2}, \ldots,\ A'_1 = \mu_1,\ A'_0 = \mu_0, \qquad (62)$$



unde s-a notat

$$\mu_0 = \int_a^b p(s)\,ds + \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} - \mu_1 - \mu_2 - \ldots - \mu_{m-1}. \qquad (62')$$

Introducînd astfel necunoscuta auxiliară $\mu_0$, sistemul de ecuații (61) se poate transforma în

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{m-1} - \lambda_0 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_{n-1} = \int_a^b p(s)\,ds$$

$$\mu_0 b + \mu_1 x'_1 + \ldots + \mu_{m-1}x'_{m-1} - \lambda_0 a - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_{n-1}x_{n-1} = \int_a^b P(s)\,s\,ds \qquad (63)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_0 b^{n+m-1} + \mu_1 x'^{n+m-1}_1 + \ldots + \mu_{m-1}x'^{n+m-1}_{m-1} - \lambda_0 a^{n+m-1} - \lambda_1 x_1^{n+m-1} - \ldots -$$

$$- \lambda_{n-1}x_{n-1}^{n+m-1} = \int_a^b p(s)\,s^{n+m-1}\,ds.$$

Ecuațiile (63) se interpretează imediat. Ele exprimă că restul în formula de cuadratură (53) este nul cînd $f(x)$ este înlocuit cu $1, x, \ldots, x^{n+m-1}$.

*Polinoamele* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ *și polinoamele* $\varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_{n+m-1}(x)$ *date de formulele (59) și (60) sînt de gradul efectiv* $n+m-1$.

Se demonstrează ca la punctul 5, că coeficienții din formula de cuadratură (53) au proprietatea

$$(-1)^{n-j}(A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A_{n-j}) > 0,$$
$$(-1)^{m-l}(A'_{m-1} + A'_{m-2} + \ldots + A'_{m-l}) > 0,$$

pentru $j = 1, 2, \ldots, n-1$ și $l = 1,2, \ldots, m-1$, și ținîndu-se seama de formulele (62).

16. *Forma curbei* $y = \varphi(x)$. *Funcția* $y = \varphi(x)$, *care este continuă în intervalul* $[x_{n-1}, x'_{m-1}]$ *împreună cu primele* $n+m-2$ *derivate, nu poate să aibă în intervalul* $(x_{n-1}, x'_{m-1})$ *decît un singur extrem.*

Într-adevăr dacă ar avea două extreme, atunci procedînd ca la punctul 7, ar urma ca derivata $\varphi^{(n+m-2)}(x)$ să aibă $n+m-1$ zerouri, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+m-1}$ în intervalul $(x_{n-1}, x'_{m-1})$. Se arată că în intervalele $(x_{n-1}, x_{n-2}]$, $[x'_{m-2}, x'_{m-1})$ nu se găsesc zerouri ale lui $\varphi^{n+m-2}(x)$ și că în intervalele $(x_{n-2}, x_{n-3}], \ldots, (x_1, a]$, $[x'_{m-3}, x'_{m-2}), \ldots, [b, x'_1)$ nu se poate găsi decît cîte un singur zero dintre $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+m-1}$. Rezultă atunci că în intervalul $(a, b)$ se găsesc trei puncte $\eta_{n-1}, \eta_n, \eta_{n+1}$. Aceasta este însă imposibil căci funcția $\varphi(x)$ avînd derivate continue $\varphi^{(n+m-1)}(x)$, $\varphi^{(n+m)}(x)$ în intervalul $(a, b)$, ar trebui ca derivata $\varphi^{(n+m)}(x)$ să se anuleze într-un punct $\zeta$ din intervalul $(a, b)$ și se știe că în tot intervalul $[a, b]$ avem $\varphi^{(n+m)}(x) = p(x)$. Deci funcția $y = \varphi(x)$ are un singur extrem în intervalul $(x_{n-1}, x'_{m-1})$.

Rezultă că forma curbei $y = \varphi\ (x)$ este cea din figura 6.

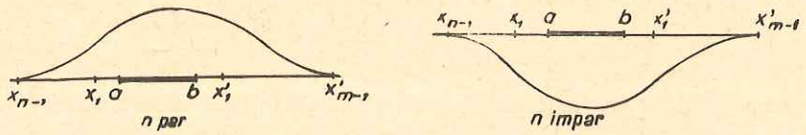


Fig. 6

În cazul $n = 1$ și $m = 1$, formula de cuadratură (53) devine formula trapezului

$$\int_a^b f\ (x)\ dx = \frac{b-a}{2}[f\ (a) + f\ (b)] + \int_a^b \varphi\ (x)\ f''\ (x)\ dx$$

și forma curbei $y = \varphi\ (x)$ este dată în figura 7.

17. *Restul în formula de cuadratură (53).* Ținînd seama că $\varphi\,(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(x_{n-1},\ x'_{m-1})$, restul din formula de cuadratură (53) se poate scrie sub forma



Fig. 7

$$R = (-1)^{n+m} f^{(n+m)}(\xi) \int_{x_{n-1}}^{x'_{m-1}} \varphi\ (x)\ dx,$$

unde $\xi \in (x'_{n-1},\ x'_{m-1})$. Se arată că

$$R = (-1)^m\ I\ f^{(n+m)}\ (\xi), \tag{64}$$

unde

$$I = \frac{1}{(n+m)!}\int_a^b p\ (x)\ (x-a)\ (x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\ (b-x)\ (x'_1-x)\ldots(x'_{m-1}-x)\,dx. \tag{65}$$

Avem

$$|\ R\ | \leqslant \rho\ (x_{n-1},\ldots,\ x'_{m-1}), \tag{66}$$

unde $\rho\ (x_{n-1},\ldots,\ x'_{m-1})$ este o margine superioară a lui $|\ R\ |$, definită de formula

$$\rho\ (x_{n-1},\ldots,x'_{m-1}) = M_{n+m}\ I, \tag{67}$$

unde $M_{n+m}$ este marginea superioară a lui $|\ f^{(n+m)}\ (x)\ |$ în intervalul $[x_{n-1},\ x'_{m-1}]$.

Cînd nodurile $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$, se deplasează spre stînga, iar nodurile $x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_{m-1}$ se deplasează spre dreapta, marginea superioară $\rho\ (x_{n-1},\ldots,x'_{m-1})$ crește.

Întotdeauna avem

$$\rho\ (x_{n-1},\ldots,\ x'_{m-1}) > \rho_0\ (a,b),$$

unde $\rho_0\ (a,\ b)$ este o margine superioară a valorii absolute a restului din formula lui Obrechkoff (34).



*Exemplu.* Avem formula de cuadratură

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \frac{h}{9}\{-2\,[f(x_0-2h) + f(x_0+2h)] + 11\,f(x_0-h) + f(x_0+h)\} +$$

$$+ \int_{x_0-2h}^{x_0+2h} \varphi\ (x)\ f^{(IV)}\ (x)\,dx. \tag{68}$$

Avem $|\ R\ | \leqslant \rho\ (x_0-2h,\ldots,x_0+2h)$, unde $\rho\ (x_0-2h,\ldots,x_0+2h) = \dfrac{19}{2880}(2h)^5 M_4$.

De aici rezultă că dacă comparăm pe $\rho\ (x_0-2h,\ldots,x_0+2h)$ cu o margine superioară a valorii absolute a restului din formula lui Obrechkoff (42), sau a lui Simpson (45), sau formula (48), avem

$$\frac{\rho\ (x_0-2h,\ldots,x_0+2h)}{\rho_0\ (x_0-h,\ x_0+h)} \geqslant 4{,}75,$$

$$\frac{\rho\ (x_0-2h,\ldots,x_0+2h)}{\rho_s\ (x_0-h,\ x_0+h)} \geqslant 19, \tag{69}$$

$$\frac{\rho\ (x_0-2h,\ldots,x_0+2h)}{\rho'\ (x_0-h,\ x_0+h)} > 247.$$

Din formulele (69) rezultă dezavantajul formulelor de cuadratură cu noduri exterioare, chiar dacă se alătură nodurile $a$ și $b$, extremitățile intervalului de integrare.

18. *Cazul* $m = 1$ Să presupunem că nodurile exterioare sînt situate numai la stînga lui $a$, adică $m = 1$. Formula de cuadratură (53) devine

$$\int_a^b p\,(x)\,f\,(x)\,dx = A_0'\ f\ (b) + A_0\ f\ (a) + A_1\ f\,(x_1) + \ldots + A_{n-1} f(x_{n-1}) +$$

$$+\ (-1)^{n+1}\int_{x_{n-1}}^{b} \varphi\ (x)\,f^{(n+1)}(x)\,dx, \tag{70}$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide pe rînd cu funcțiile $\varphi_1\ (x),\ \varphi_2\ (x),\ldots,\ \varphi_n\ (x)$ în intervalele $[x_{n-1},\ x_{n-2}],\ [x_{n-2},\ x_{n-3}],\ldots,\ [a,\ b]$. Ele sînt integralele ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(n+1)}\ (x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq n \\ p(x) & \text{dacă } i = n \end{cases}$$

care satisfac la următoarele condiții la limită

$$\varphi_1(x_{n-1}) = 0, \quad \varphi_1'(x_{n-1}) = 0, \ldots, \quad \varphi_1^{(n-1)}(x_{n-1}) = 0,$$
$$\varphi_2(x_{n-2}) = \varphi_1(x_{n-1}), \varphi_2'(x_{n-2}) = \varphi_1'(x_{n-2}), \ldots, \varphi_2^{(n-1)}(x_{n-2}) = \varphi_1^{(n-1)}(x_{n-2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{n-1}(x_1) = \varphi_{n-2}(x_1), \varphi_{n-1}'(x_1) = \varphi_{n-2}'(x_1), \ldots, \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x_1) = \varphi_{n-2}^{(n-1)}(x_1),$$
$$\varphi_n(a) = \varphi_{n-1}(a), \quad \varphi_n'(a) = \varphi_{n-1}'(a), \ldots, \quad \varphi_n^{(n-1)}(a) = \varphi_{n-1}^{(n-1)}(a),$$
$$\varphi_n(b) = 0, \quad \varphi_n'(b) = 0, \ldots, \quad \varphi_n^{(n-1)}(b) = 0$$

Coeficienții $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ din formula de cuadratură (70) au semnele alternate; $A_0$ și $A'_0$ sînt pozitivi.

Se arată ca la punctele 4, 5 și 7 că forma curbei $y = \varphi(x)$ în cazul $n > 1$, este cea din figura 8.

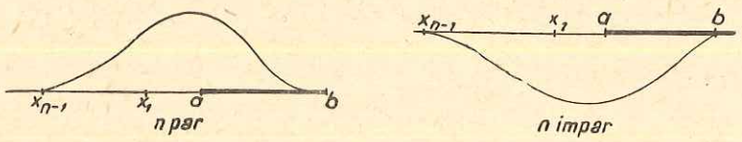


Fig. 8

Funcția $\varphi(x)$ păstrînd un semn constant în intervalul $(x_{n-1}, b)$ putem scrie

$$R = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b p(x)(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(b-x)\,dx, \tag{71}$$

unde $\xi \in (x_{n-1}, b)$.

Avem

$$|R| \leqslant \rho(x_{n-1}, \ldots, b),$$

unde

$$\rho(x_{n-1}, \ldots, b) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b p(x)(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(b-x)\,dx.$$

*Exemple.* 1. Avem formula de cuadratură

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{24}[9f(a+h) + 19f(a) - 5f(a-h) + f(a-2h)] + \int_{a-2h}^{a+h} \varphi(x) f^{(IV)}(x)\,dx. \tag{72}$$

Funcția $\varphi(x)$ este negativă în intervalul $(a-2h,\ a+h)$.



Avem

$$R = f^{(IV)}(\xi)\int_{a-2h}^{a+2h} \varphi(x)\,dx = -\frac{19h^5}{720} f^{IV}(\xi),\ \xi \in (a-2h,\ a+h).$$

2. Avem formula de cuadratură

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{720}[251 f(a+h) + 646 f(a) - 264 f(a-h) + 100 f(a-2h) - 19 f(a-3h)] - \int_{a-3h}^{a+h} \varphi(x) f^{(5)}(x)\,dx. \tag{73}$$

Funcția $\varphi(x)$ este pozitivă în intervalul $(a-3h,\ a+h)$. Avem

$$R = -f^{(5)}(\xi)\int_{a-3h}^{a+h} \varphi(x)\,dx = -\frac{3h^6}{160} f^{(5)}(\xi) \qquad \xi \in (a-3h,\ a+h).$$

Exemplele (72) și (73) se găsesc în cartea lui S. E. Mikeladze [4] *)

### § 3. Formule de cuadratură cu noduri la stînga lui $a$ și nodul $a$

19. Să considerăm funcția $f(x)$ de clasa $C^n$ în intervalul $[\alpha, b]$ și să stabilim relativ la integrala (1), în care intervalul $[a, b]$ este inclus în intervalul $[\alpha, b]$, formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = A_0 f(a) + A_1 f(x_1) + \ldots + A_{n-1} f(x_{n-1}) + R, \tag{74}$$

care folosește nodurile $a$ și $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ordonate în ordine descrescătoare și cuprinse în intervalul $(\alpha, a)$. Vrem de asemenea să studiem restul acestei formule de cuadratură.

Pentru aceasta, la intervalele $[x_{n-1}, x_{n-2}], [x_{n-2}, x_{n-3}], \ldots, [a, b]$ atașem funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ integrale ale ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq n \\ p(x) & \text{dacă } i = n \end{cases} \tag{75}$$

și care verifică condițiile la limită

$$\varphi_1(x_{n-1}) = 0,\ \varphi_1'(x_{n-1}) = 0, \ldots, \varphi_1^{(n-2)}(x_{n-1}) = 0$$
$$\varphi_2(x_{n-2}) = \varphi_1(x_{n-2}), \varphi_2'(x_{n-2}) = \varphi_1'(x_{n-2}), \ldots, \varphi_2^{(n-2)}(x_{n-2}) = \varphi_1^{(n-2)}(x_{n-2}) \tag{76}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n(a) = \varphi_{n-1}(a), \varphi_n'(a) = \varphi_{n-1}'(a), \ldots, \varphi_n^{(n-2)}(a) = \varphi_{n-1}^{(n-2)}(a)$$
$$\varphi_n(b) = 0, \varphi_n'(b) = 0, \ldots, \varphi_n^{(n-1)}(b) = 0.$$

*) p. 328

Aplicînd metoda de la punctul 1, se ajunge la formula de cuadratură (74), în care coeficienții $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sînt

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= -\varphi_1^{(n-1)}(x_{n-1}), \\ A_{n-2} &= \varphi_1^{(n-1)}(x_{n-2}) - \varphi_2^{(n-1)}(x_{n-2}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 &= \varphi_{n-2}^{(n-1)}(x_1) - \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x_1), \\ A_0 &= \varphi_{n-1}^{(n-1)}(a) - \varphi_n^{(n-1)}(a), \end{aligned} \tag{77}$$

iar restul este dat de formula

$$R = (-1)^n \int_{x_{n-1}}^{b} \varphi(x) f^{(n)}(x)\, dx \tag{78}$$

funcția $\varphi(x)$ coincizînd pe rînd cu $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ în intervalele $[x_{n-1}, x_{n-2}], [x_{n-2}, x_{n-3}], \ldots, [a, b]$.

Se arată că coeficienții din formulele de cuadratură (74) sînt dați de formulele

$$A_i = \int_a^b P_i(x)\, dx, \tag{79}$$

pentru $i = 0, 1, \ldots, n-1$, unde

$$P_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(a-x_1)(a-x_2)\ldots(a-x_{n-1})},$$

iar

$$P_i(x) = \frac{(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n-1})}{(x_i-a)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n-1})}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Se observă că $A_i$ *are semnul lui* $(-1)^i$ *pentru* $i = 0,1, \ldots, n-1$.

În formula de cuadratură (74), restul $R$ nu poate fi nul dacă $f(x)$ este un polinom de grad mai mare ca $n-1$, oricare ar fi alegerea nodurilor $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

20. *Determinarea funcțiilor* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Ecuațiile diferențiale (74) împreună cu primele $n$ condiții (76) determină funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Avem

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!}, \\ \varphi_2(x) &= \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_{n-2}\frac{(x-x_{n-2})^{n-1}}{(n-1)!}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1}(x) &= \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_{n-2}\frac{(x-x_{n-2})^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \lambda_1\frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}, \\ \varphi_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} p(s)\, ds + \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_{n-2}\frac{(x-x_{n-2})^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \\ &\quad + \lambda_1\frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_0\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned} \tag{80}$$

unde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sînt constante.



Scriind că și ultimele condiții (76) din punctul $b$ sînt satisfăcute avem sistemul de ecuații

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} = -\int_a^b p(s)\, ds,$$

$$\lambda_0(b-a) + \lambda_1(b-x_1) + \ldots + \lambda_{n-1}(b-x_{n-1}) = -\int_a^b p(s)(b-s)\, ds, \tag{81}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_0(b-a)^{n-1} + \lambda_1(b-x_1)^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1}(b-x_{n-1})^{n-1} = -\int_a^b p(s)(b-s)^{n-1} ds,$$

care determină pe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$

Interpretarea coeficienților $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ din formulele (80) rezultă din ecuațiile (77) și (80). Avem

$$A_{n-1} = -\lambda_{n-1}, A_{n-2}, = -\lambda_{n-2}, \ldots, A_1 = -\lambda_1, A_0 = -\lambda_0. \tag{82}$$

Ținînd seama de formulele (82), ecuațiile (81) se interpretează ușor. Ele se obțin scriind că în formula de cuadratură (74), restul $R$ este nul cînd $f(x)$ este înlocuit cu $1, b-x, \ldots, (b-x)^{n-1}$.

Se demonstrează ca la punctul 5, *că polinoamele* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sînt de gradul efectiv $n-1$.

De asemenea se demonstrează că în formulele de cuadratură (74), avem

$$(-1)^{n-j}(A_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A_{n-j}) > 0$$

pentru $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

21. *Forma curbei* $y = \varphi(x)$. Se arată că *funcția* $\varphi(x)$ *nu poate să aibă decît un singur extrem în intervalul* $(x_{n-1}, b)$.

Într-adevăr raționînd ca la punctul 7, se arată că dacă funcția $\varphi(x)$, care este continuă împreună cu derivatele ei succesive pînă la ordinul $n-2$, în intervalul $[x_{n-1}, b]$, ar avea două extreme în intervalul $(x_{n-1}, b)$, atunci derivata $\varphi^{(n-2)}(x)$, s-ar anula în $n-1$ puncte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ din intervalul $(x_{n-1}, b)$. Funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ fiind polinoame de gradul efectiv $n-1$, se arată că în intervalul $(x_{n-1}, x_{n-2}]$, nu se găsește nici un zero al derivatei $\varphi^{(n-2)}(x)$, iar în fiecare din intervalele următoare nu se poate găsi decît cel mult un punct $\eta$. Fie $\eta_{n-1}$ zeroul lui $\varphi^{(n-2)}(x)$care se găsește în intervalul $(a, b)$. La funcția $\varphi^{(n-2)}(x)$ și la intervalul $[\eta_{n-1}, b]$ se poate aplica teorema lui Rolle și se deduce că derivata $\varphi^{(n-1)}(x)$ are un zero $\zeta$ în intervalul $(\eta_{n-1}, b)$. Apoi la funcția $\varphi^{(n-1)}(x)$ și la intervalul $[\zeta, b]$ se poate aplica teorema lui Rolle și se deduce că derivata $\varphi^{(n)}(x)$ se anulează într-un punct din intervalul $(\zeta, b)$, adică din intervalul $(a, b)$. Însă în intervalul $[a, b]$ avem $\varphi^{(n)}(x) = p(x)$ de unde rezultă o contradicție. Deci funcția $\varphi(x)$ nu are decît un singur extrem în intervalul $(x_{n-1}, b)$.

Forma curbei $y = \varphi(x)$ este dată în figura 9, pentru $n > 2$.

Pentru $n = 2$, forma curbei $y = \varphi(x)$ este dată în figura 10, iar pentru $n = 1$ forma curbei este dată în figura 11.

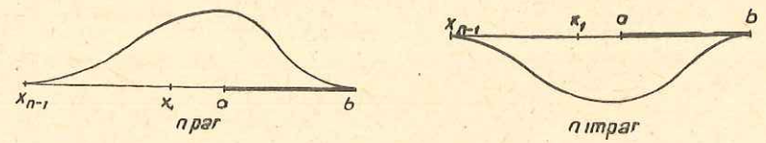


Fig. 9

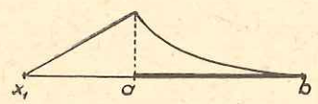


Fig. 10

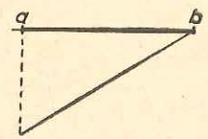


Fig. 11

22. *Restul în formula de cuadratură* (74). Deoarece funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(x_{n-1}, b)$, vom putea scrie formula (79) sub forma

$$R = (-1)^n f^{(n)}(\xi) \int_{x_{n-1}}^{b} \varphi(x)\, dx,$$

unde $\xi \in (x_{n-1}, b)$, sau

$$R = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \int_a^b p(x)(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\, dx. \tag{83}$$

Din această formulă rezultă că

$$|R| \leqslant \rho(x_{n-1}, \ldots, a), \tag{84}$$

unde

$$\rho(x_{n-1}, \ldots, a) = \frac{M_n}{n!} \int_a^b p(x)(x-a)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\, dx. \tag{85}$$

*Se arată că dacă nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ se deplasează spre stînga, atunci marginea superioară $\rho(x_{n-1}, \ldots, a)$ a lui $|R|$ crește.*

Exemple importante vom da în § 4.

## § 4. Formule de cuadratură cu noduri exterioare, în progresie aritmetică la stînga lui $a$ și în nodul $a$

23. Pentru obținerea formulei de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale a lui Adams se folosesc formule de cuadratură care provin din formulele de interpolare ale lui Newton la stînga. Acestea sînt formulele de cuadratură cu noduri exterioare în progresie aritmetică la stînga lui $a$ și cu nodul $a$. Vom examina în acest paragraf de aproape astfel de formule.



Să considerăm intervalul $[a, b]$ și să notăm

$$x_0 = \frac{a+b}{2}, \quad b - a = 2h.$$

Cu ajutorul lui $x_0$ și $h$ definim nodurile

$$x_p = x_0 - (2p-1)h,$$

unde $p = 1, 2, \ldots, n$. Cu aceste notații nodul $x_1$ coincide cu $a$.

Presupunînd că funcția $f(x)$ este de clasa $C^n$ în intervalul $[x_0-(2n-1)h, x_0+h]$, s-a arătat în § 3, că avem formula de cuadratură pentru $p(x) = 1$

$$\int_a^b f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) + \int_{x_0-(2n-1)h}^{x_0+h} \varphi_n(x) f^{(n)}(x)\, dx, \tag{86}$$

unde funcția $\varphi_n(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $[x_0 - (2n-1)h, x_0 + h]$. Să transformăm formula de cuadratură (86).

Pentru aceasta să introducem diferențele succesive $\Delta^1 f(x)$, $\Delta^2 f(x), \ldots$ ale funcției $f(x)$ definite prin

$$\begin{aligned}
\Delta^1 f(x_2) &= f(x_1) - f(x_2)\\
\Delta^2 f(x_3) &= f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)\\
\Delta^3 f(x_4) &= f(x_1) - 3f(x_2) + 3f(x_3) - f(x_4)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta^{n-1} f(x_n) &= f(x_1) - C_{n-1}^1 f(x_2) + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} f(x_n)
\end{aligned}$$

și să rezolvăm aceste ecuații în raport cu $f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$. După cum se știe se obține

$$\begin{aligned}
f(x_2) &= f(x_1) - \Delta^1 f(x_2),\\
f(x_3) &= f(x_1) - 2\Delta^1 f(x_2) + \Delta^2 f(x_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(x_n) &= f(x_1) - C_{n-1}^1 \Delta^1 f(x_2) + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} \Delta^{n-1} f(x_n).
\end{aligned}$$

Formula (86) capătă forma

$$\int_a^b f(x)dx = 2h[B_1 f(x_1) + B_2 \Delta^1 f(x_2) + \ldots + B_n \Delta^{n-1} f(x_n)] + \int_{x_0-(2n-1)h}^{x_0+h} \varphi_n(x) f^{(n)}(x)\, dx. \tag{87}$$

Calculul coeficienților $B_1, B_2, \ldots, B_n$ se face ușor în modul următor. Dacă înlocuim pe $f$ cu 1, se deduce că $B_1 = 1$. Dacă se înlocuiește

$$f(x) = \frac{1}{k!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k), \tag{88}$$

unde $k = 1, 2, \ldots, n-1$ se observă că $f(x)$ fiind un polinom de gradul $k$, avem $\Delta^i f(x) = 0$ pentru $i > k$. Pe de altă parte, pentru $i < k$, avem

$$\Delta^i f(x) = f(x+2ih) - C_i^1 f(x+2(i-1)h) + \ldots + (-1)^i C_i^i f(x),$$

de unde rezultă că

$$\Delta^i f(x_{i+1}) = f(x_1) - C_i^1 f(x_2) + \ldots + (-1)^i C_i^i f(x_{i+1}).$$

Pentru $i = 0, 1, \ldots, k-1$ avem $\Delta^i f(x_{i+1}) = 0$, iar pentru $i = k$, avem

$$\Delta^k f(x_{k+1}) = \frac{(-1)^k}{k!}(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2)\ldots(x_{k+1} - x_k) = (2h)^k.$$

Rezultă că formula (87) pentru funcția (88) ne dă

$$(2h)^{k+1} B_{k+1} = \frac{1}{k!}\int_{x_0-h}^{x_0+h} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)\,dx.$$

Dacă în integrala din membrul al doilea se face schimbarea de variabilă

$$x = x_0 - h + 2uh,$$

ea se reduce la

$$(2h)^{k+1}\int_0^1 u(u+1)\ldots(u+k-1)\,du.$$

Deci dacă se notează

$$J_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 u(u+1)\ldots(u+k-1)\,du, \tag{89}$$

avem

$$B_{k+1} = J_k$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

În privința restului $R$ din formula de cuadratură (87), conform formulei (83), avem

$$R = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\int_{x_0-h}^{x_0+h} (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)\,dx;\ \xi \in (x_0 - (2n-1)h,\ x_0 + h)$$

adică, ținînd seama de formula (89)

$$R = (2h)^{n+1} J_n f^{(n)}(\xi).$$

Deci formula de cuadratură (87) se scrie

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h[f(x_1) + J_1\Delta^1 f(x_2) + J_2\Delta^2 f(x_3) + \ldots + J_{n-1}\Delta^{n-1} f(x_n)] + \tag{90}$$
$$+ (2h)^{n+1} J_n f^{(n)}(\xi).$$



Am obținut astfel formula de cuadratură (90), care de obicei se obține prin aplicarea formulei de interpolare a lui Newton cu noduri în progresie aritmetică la stînga [5].

Ținînd seama că

$$J_1 = \int_0^1 u\,du = \frac{1}{2},$$

$$J_2 = \frac{1}{2!}\int_0^1 u(u+1)\,du = \frac{5}{12},$$

$$J_3 = \frac{1}{3!}\int_0^1 u(u+1)(u+2)\,du = \frac{3}{8},$$

. . . . . .

formula (90) pentru $n = 2, 3, \ldots, 9$ este

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2)\right] + \frac{5}{12}(2h)^3 f''(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3)\right] + \frac{3}{8}(2h)^4 f'''(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4)\right] +$$
$$+ \frac{251}{720}(2h)^5 f^{IV}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) +\right.$$
$$\left. + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5)\right] + \frac{95}{288}(2h)^6 f^{(5)}(\xi), \tag{91}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\left[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) +\right.$$
$$\left. + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6)\right] + \frac{19087}{12\cdot 7!}(2h)^7 f^{(6)}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\Big[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6) + \frac{19\,087}{12\cdot 7!}\Delta^6 f(x_7)\Big] + \frac{36\,799}{3\cdot 8!}(2h)^8 f^{(7)}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)dx = 2h\Big[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6) + \frac{19\,087}{12\cdot 7!}\Delta^6 f(x_7) + \frac{36\,799}{3\cdot 8!}\Delta^7 f(x_8)\Big] + \frac{1\,070\,017}{10!}(2h)^9 f^{(8)}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\Big[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6) + \frac{19\,087}{12\cdot 7!}\Delta^6 f(x_7) + \frac{36\,799}{3\cdot 8!}\Delta^7 f(x_8) + \frac{1\,070\,017}{10!}\Delta^8 f(x_9)\Big] + \frac{2\,082\,753}{2\cdot 10!}(2h)^{10} f^{(9)}(\xi),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\Big[f(x_1) + \frac{1}{2}\Delta^1 f(x_2) + \frac{5}{12}\Delta^2 f(x_3) + \frac{3}{8}\Delta^3 f(x_4) + \frac{251}{720}\Delta^4 f(x_5) + \frac{95}{288}\Delta^5 f(x_6) + \frac{19\,087}{12\cdot 7!}\Delta^6 f(x_7) + \frac{36\,799}{3\cdot 8!}\Delta^7 f(x_8) + \frac{1\,070\,017}{10!}\Delta^8 f(x_9) + \frac{2\,082\,753}{2\cdot 10!}\Delta^9 f(x_{10})\Big] + \frac{134\,211\,265}{12!}(2h)^{11} f^{(10)}(\xi).$$

Bineînțeles în formulele (91) punctul $\xi$ din expresia restului este diferit de la o formulă la alta.

24. *O proprietate a coeficienților $J_k$ din formula de cuadratură (90). Coeficienții $J_k$ descresc cînd k crește, iar diferențele succesive ale acestor coeficienți păstrează un semn constant oricare ar fi k.*



Într-adevăr, avem

$$J_{k+1} - J_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 u(u+1)\dots(u+k-1)\left(\frac{u+k}{k+1} - 1\right)du,$$

adică

$$J_{k+1} - J_k = \frac{-1}{(k+1)!}\int_0^1 u(u+1)\dots(u+k-1)(1-u)\,du$$

de unde rezultă că

$$J_{k+1} < J_k.$$

Să considerăm acum diferențele de ordinul $l$ adică

$$J_{k+l} - C_l^1 J_{k+l-1} + \dots + (-1)^l C_l^l J_k =$$

$$= \frac{1}{k!}\int_0^1 u(u+1)\dots(u+k-1)\left[\frac{(u+k)\ (u+k+1)\dots(u+k+l-1)}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} - C_l^1\frac{(u+k)(u+k+1)\dots(u+k+l-2)}{(k+1)(k+2)\dots(k+l-1)} + \dots + (-1)^l C_l^l\right]du.$$

Se demonstrează că paranteza mare de sub semnul $\int$ este egală cu

$$\frac{(u-1)(u-2)\dots(u-l)}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} = (-1)^l\frac{(1-u)(2-u)\dots(l-u)}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)}.$$

Avem deci

$$J_{k+l} - C_l^1 J_{k+l-1} + \dots + (-1)^l C_l^l J_k =$$

$$= (-1)^l\frac{1}{(k+l)!}\int_0^1 u(u+1)\dots(u+k-1)(1-u)(2-u)\dots(l-u)\,du,$$

ceea ce dovedește că diferența de ordinul $l$ din membrul I are semnul lui $(-1)^l$.

25. *Restul în formula de cuadratură* (90). Dacă se notează cu $M_n$ marginea superioară a lui $|f^{(n)}(x)|$ în intervalul $[x_0 - (2n-1)h,\ x_0 + h]$, atunci în formula de cuadratură (90), avem

$$|R_n| \leqq \rho_n(x_0 - (2n-1)h, \dots, x_0 - h),$$

unde

$$\rho_n(x_0 - (2n-1)h, \dots, x_0 - h) = (2h)^{n+1} J_n M_n. \qquad (92)$$

*Să comparăm marginea superioară* $\rho(x_0 - (2n-1)h, \ldots, x_0 - h)$ *cu marginea superioară a valorii absolute a restului din formula de cuadratură a lui Gauss, de forma*

$$\int_a^b f(x)\,dx = C_1 f(\xi_1) + C_2 f(\xi_2) + \ldots + C_n f(\xi_n) + R_n' \tag{93}$$

*sau de forma*

$$\int_a^b f(x)\,dx = C_0' f(a) + C_1' f(\xi_1') + \ldots + C_n' f(\xi_n') + R_n''. \tag{94}$$

În formula (93) restul $R_n'$ este nul cînd $f(x)$ este înlocuit cu un polinom oarecare de gradul $2n-1$, iar în formula (94) restul $R_n''$ este nul cînd $f(x)$ este înlocuit cu un polinom oarecare de gradul $2n$.

Se știe că avem următoarele formule

$$R_n' = \int_a^b \varphi_{2n}(x)\, f^{(2n)}(x)\,dx = \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3\,(2n+1)}(2h)^{2n+1} f^{(2n)}(\xi'), \tag{95}$$

$$R_n'' = \int_a^b \varphi_{2n+1}(x)\, f^{(2n+1)}(x)\,dx = \frac{(n!)^3\,(n+1)!}{2\,[(2n+1)!]^3}(2h)^{2n+2} f^{(2n+1)}(\xi''),$$

unde $\xi' \in (a, b)$ și $\xi'' \in (a, b)$.

Notînd cu $M_{2n}^0$ și $M_{2n+1}^0$ marginile superioare ale lui $|f^{(2n)}(x)|$ și $|f^{(2n+1)}(x)|$ în intervalul $[a, b]$, vom avea

$$R_n' \leqslant \rho_{2n}'(a\ b),\ |R_n''| \leqslant \rho_{2n+1}''(a, b),$$

unde

$$\rho_{2n}'(a, b) = \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3\,(2n+1)}(2h)^{2n+1} M_{2n}^0, \tag{96}$$

$$\rho_{2n+1}''(a, b) = \frac{(n!)^3\,(n+1)!}{2\,[(2n+1)!]^3}(2h)^{2n+2} M_{2n+1}^0$$

Putem face o comparație între marginea superioară $\rho(x_0 - (2n-1)h, \ldots, x_0 - h)$ pe de o parte dat de formula (92) și marginile superioare corespunzătoare $\rho_{2n}'(a, b)$, $\rho_{2n+1}''(a, b)$ pe de altă parte, date de formulele (96).

Pentru $n = 2, 3, \ldots, 10$ în formulele (92) și $n = 1, 2, \ldots, 5$ în formulele (96) avem următorul tablou, în care s-a trecut și o coloană pentru rapoartele

$$\frac{\rho}{\rho_{2n}'} \quad \text{sau} \quad \frac{\rho}{\rho_{2n+1}''}$$



| $n$ | $\rho(x_0 - (2n-1)h, \ldots, x_0 - h)$ | $n$ | $\rho_{2n}'(a, b)$ | $n$ | $\rho_{2n+1}''(a, b)$ | $\frac{\rho}{\rho_{2n}'}$ sau $\frac{\rho}{\rho_{2n+1}''}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{5}{12}(2h)^3 M_2$ | 1 | $\frac{1}{24}(2h)^3 M_2^0$ | | | $10\frac{M_2}{M_2^0}$ |
| 3 | $\frac{3}{8}(2h)^4 M_3$ | | | 1 | $\frac{1}{216}(2h)^4 M_3^0$ | $81\frac{M_3}{M_3^0}$ |
| 4 | $\frac{251}{720}(2h)^5 M_4$ | 2 | $\frac{1}{4\,320}(2h)^5 M_4^0$ | | | $1506\frac{M_4}{M_4^0}$ |
| 5 | $\frac{95}{288}(2h)^6 M_5$ | | | 2 | $\frac{1}{72\,000}(2h)^6 M_5^0$ | $23\,750\frac{M_5}{M_5^0}$ |
| 6 | $\frac{19\,087}{12.7!}(2h)^7 M_6$ | 3 | $\frac{1}{2\,016\,000}(2h)^7 M_6^0$ | | | $636\,233{,}3\ldots\frac{M_6}{M_6^0}$ |
| 7 | $\frac{36\,799}{3.8!}(2h)^8 M_7$ | | | 3 | $\frac{1}{49\,392\,000}(2h)^8 M_7^0$ | $15\,026\,258{,}3\frac{M_7}{M_7^0}$ |
| 8 | $\frac{1\,070\,017}{10!}(2h)^9 M_8$ | 4 | $\frac{1}{1\,778\,112\,000}(2h)^9 M_8^0$ | | | $524\,308\,330\frac{M_8}{M_8^0}$ |
| 9 | $\frac{2\,082\,753}{2.10!}(2h)^{10} M_9$ | | | 4 | $\frac{1}{57\,610\,828\,800}(2h)^{10} M_9^0$ | $16\,532\,893\,314\frac{M_9}{M_9^0}$ |
| 10 | $\frac{134\,211\,265}{12!}(2h)^{11} M_{10}$ | 5 | $\frac{1}{1\,237\,732\,650\,211}(2h)^{11} M_{10}^0$ | | | $710\,246\,014\,380\frac{M_{10}}{M_{10}^0}$ |

(97)

Numerele din ce în ce mai mari din ultima coloană, care pentru $n = 10$ ajung la 710 246 014 380 ne fac să fim atenți cînd se folosesc formulele de cuadratură cu noduri exterioare în progresie aritmetică la stînga, și să tragem concluzia că este preferabil să întrebuințăm formule de cuadratură cu noduri interioare, cum sînt formulele de cuadratură ale lui Gauss.

## § 5. Formule de cuadratură cu noduri exterioare în progresie aritmetică simetrice față de mijlocul intervalului $(a, b)$

26. Vom studia acum formule de cuadratură cu noduri exterioare în progresie aritmetică, simetrice față de mijlocul intervalului $(a, b)$, care se deduc din aplicarea formulei de interpolare a lui Bessel.

Considerăm intervalul închis $[a, b]$ și păstrînd notațiile de la punctul 23 să alegem nodurile

$$x_i = x_0 - (2i - 1)h, \quad x_i' = x_0 + (2i - 1)h, \tag{98}$$

unde $i = 1, 2, \ldots, n$ care sînt în progresie aritmetică cu rația $2h$. Ele sînt distribuite așa cum arată figura 12.

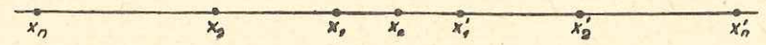


Fig. 12

Cu aceste noduri pentru o funcție $f(x)$ de clasa $C^{2n}$ în intervalul $[x_n, x_n']$, avem formula de cuadratură

$$\int_{x_0-h}^{x_0+k} f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) + A_1' f(x_1') + A_2' f(x_2') + \ldots + A_n' f(x_n') + \int_{x_n}^{x_n'} \varphi(x) f^{(2n)}(x)\, dx, \tag{99}$$

unde funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(x_n, x_n')$ (punctul 16).

*Din cauza simetriei nodurilor față de mijlocul intervalului $(a, b)$ avem $A_k = A_k'$* pentru $k = 1, 2, \ldots, n$.

Într-adevăr avem

$$A_k = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)(x - x_1')\ldots(x - x_n')}{(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)(x_k - x_1')\ldots(x_k - x_n')}\, dx,$$

$$A_k' = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_n)(x - x_1')\ldots(x - x_{k-1}')(x - x_{k+1}')\ldots(x - x_n')}{(x_k' - x_1)\ldots(x_k' - x_n)(x_k' - x_1')\ldots(x_k' - x_{k-1}')(x_k' - x_{k+1}')\ldots(x_k' - x_n')}\, dx.$$

Ținînd seama de formulele (98) și făcînd în aceste integrale schimbarea de variabilă

$$x = x_0 + \lambda h,$$



avem

$$A_k = \frac{(-1)^{n+k-1} h}{2^{2n-1}(k + n - 1)!\,(n - k)!} \int_{-1}^{+1} [\lambda^2 - 1][\lambda^2 - 3^2]\ldots[\lambda^2 - (2k-3)^2]$$

$$[\lambda^2 - (2k+1)^2]\ldots[\lambda^2 - (2n-1)^2](\lambda - 2k + 1)\, d\lambda,$$

$$A_k' = \frac{(-1)^{n+k} h}{2^{2n-1}(k + n - 1)!\,(n - k)!} \int_{-1}^{+1} [\lambda^2 - 1][\lambda^2 - 3^2]\ldots[\lambda^2 - (2k-3)^2]$$

$$[(\lambda^2 - (2k+1)^2]\ldots[\lambda^2 - (2n-1)^2](\lambda + 2k - 1)\, d\lambda.$$

Făcînd diferența dintre $A_k$ și $A_k'$, avem

$$A_k - A_k' = \frac{(-1)^{n+k-1} h}{2^{2(n-1}(k + n - 1)!\,(n - k)!} \int_{-1}^{+1} [\lambda^2 - 1]\ldots[\lambda^2 - (2k-3)^2]$$

$$[\lambda^2 - (2k+1)^2]\ldots[\lambda^2 - (2n-1)^2]\lambda\, d\lambda.$$

Integrala din membrul al doilea este nulă, deoarece funcția care se integrează este impară. Deci $A_k = A_k'$.

Dacă adunăm cele două integrale, se deduce expresia coeficientului $A_k$ și anume

$$A_k = \frac{(-1)^{n+k}(2k-1)\, h}{2^{2n-1}(k + n - 1)!\,(n - k)!} \int_{-1}^{+1} [\lambda^2 - 1]\ldots[\lambda^2 - (2k-3)^2][\lambda^2 - (2k+1)^2]\ldots$$

$$\ldots[\lambda^2 - (2n-1)^2]\, d\lambda. \tag{100}$$

Ținînd seama de formulele (62) și de egalitățile $A_k = A_k'$ pentru $k = 1,2,\ldots,n$, demonstrate mai sus, deducem că *curba $y = \varphi(x)$ este simetrică față de dreapta $x = x_0$.*

Formula de cuadratură (99) se scrie deci sub forma

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\, dx = A_1 [f(x_1) + f(x_1')] + A_2 [f(x_2) + f(x_2')] + \ldots + A_n [f(x_n) + f(x_n')] + \int_{x_n}^{x_n'} \varphi(x) f^{(2n)}(x)\, dx. \tag{101}$$

27. *Transformarea formulei de cuadratură* (101). Vom proceda ca la nr. 23 și vom introduce diferențele succesive ale funcției $f(x)$ pe nodurile $x_i$ și $x_i'$. Avem

$$\Delta^{2p} f(x_{p+1}) = f(x_{p+1}) - C_{2p}^1 f(x_p) + C_{2p}^2 f(x_{p-1}) - C_{2p}^3 f(x_{p-2}) + \ldots +$$
$$+ (-1)^p C_{2p}^p f(x_1) + (-1)^{p+1} C_{2p}^{p+1} f(x_1') + (-1)^{p+2} C_{2p}^{p+2} f(x_2') + \ldots +$$
$$+ (-1)^{2p-1} C_{2p}^{2p-1} f(x_{p-1}') + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} f(x_p') \qquad (102)$$

$$\Delta^{2p} f(x_p) = f(x_p) - C_{2p}^1 f(x_{p-1}) + C_{2p}^2 f(x_{p-2}) - C_{2p}^3 f(x_{p-3}) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1} f(x_1) + (-1)^p C_{2p}^p f(x_1') + (-1)^{p+1} C_{2p}^{p+1} f(x_2') + \ldots +$$
$$+ (-1)^{2p-1} C_{2p}^{2p-1} f(x_p') + (-1)^{2p} C_{2p}^{2p} f(x_{p+1}').$$

Adunînd aceste formule obținem

$$\Delta^{2p} f(x_{p+1}) + \Delta^{2p} f(x_p) = [f(x_{p+1}) + f(x_{p+1}')] - (C_{2p}^1 - 1)[f(x_p) + f(x_p')] +$$
$$+ (C_{2p}^2 - C_{2p}^1)[f(x_{p-1}) + f(x_{p-1}')] - (C_{2p}^3 - C_{2p}^2)[f(x_{p-2}) + f(x_{p-2}')] + \ldots +$$
$$+ (-1)^p (C_{2p}^p - C_{2p}^{p-1})[f(x_1) + f(x_1')].$$

Facînd în această formulă $p = 1,2,\ldots$ avem

$$\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1) = [f(x_2) + f(x_2')] - [f(x_1) + f(x_1')]$$
$$\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2) = [f(x_3) + f(x_3')] - 3[f(x_2) + f(x_2')] + 2[f(x_1) + f(x_1')]$$
$$\Delta^6 f(x_4) + \Delta^6 f(x_3) = [f(x_4) + f(x_4')] - 5[f(x_3) + f(x_3')] + 9[f(x_2) +$$
$$+ f(x_2')] - 5[f(x_1) + f(x_1')]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*Din aceste formule se deduce că în general,* $f(x_{p+1}) + f(x_{p+1}')$ *se exprimă* liniar cu ajutorul lui $f(x_1) + f(x_1')$, $\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1)$, $\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2), \ldots$, $\Delta^{2p} f(x_{p+1}) + \Delta^{2p} f(x_p)$.

Ținînd seama de aceasta, formula (101) se transformă într-o formulă de forma

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = 2h\{B_0[f(x_1) + f(x_1')] + B_1[\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1)] +$$
$$+ B_2[\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2)] + \ldots + B_{n-1}[\Delta^{2(n-1)} f(x_n) + \Delta^{2(n-1)} f(x_{n-1})]\} +$$
$$+ \int_{x_n}^{x_n'} \varphi(x) f^{(2n)}(x)\,dx. \qquad (103)$$

Să arătăm cum se calculează coeficienții $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$.



Este evident că $B_0$ se calculează imediat, înlocuind pe $f(x)$ cu 1. Se obține

$$B_0 = \frac{1}{2}.$$

Pentru a calcula pe $B_1$ se înlocuiește $f(x)$ cu

$$f(x) = \frac{1}{2!}(x - x_1)(x - x_1')$$

Este evident că $f(x_1) = 0$, $f(x_1') = 0$, iar diferențele lui $f(x)$ mai mari ca 2 sînt nule. După formulele (102) avem

$$\Delta^2 f(x_2) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_1') = f(x_2)$$

și

$$\Delta^2 f(x_1) = f(x_1) - 2f(x_1') + f(x_2') = f(x_2').$$

Însă

$$f(x_2) = \frac{1}{2!}(-2h)(-4h) = (2h)^2,$$

$$f(x_2') = \frac{1}{2!}(4h)(2h) = (2h)^2.$$

Deducem că

$$2(2h)^3 B_1 = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{(x - x_1)(x - x_1')}{2}\,dx.$$

Făcînd în integrală schimbarea de variabilă $x = x_0 + \lambda h$, vom avea

$$B_1 = \frac{1}{2^5}\int_{-1}^{+1} (\lambda^2 - 1)\,d\lambda = -\frac{1}{24}.$$

În general pentru a calcula pe $B_j$, înlocuim în formula (103) pe $f(x)$ cu

$$f(x) = \frac{1}{(2j)!}(x - x_1)\ldots(x - x_j)(x - x_1')\ldots(x - x_j').$$

Ținînd seama de formulele (102), pentru $p \leqslant j - 1$, avem

$$\Delta^{2p} f(x_{p+1}) = 0, \qquad \Delta^{2p} f(x_p) = 0.$$

Pentru $p > j$ avem de asemenea $\Delta^{2p} f(x_{p+1}) = \Delta^{2p} f(x_p) = 0$, deoarece $f(x)$ este un polinom de gradul $2j$. Pe de altă parte avem

$$\Delta^{2j} f(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), \quad \Delta^{2j} f(x_j) = f(x_{j+1}'),$$

iar

$$f(x_{j+1}) = f(x_{j+1}') = (2h)^{2j}.$$

Formula de cuadratură (103) ne dă atunci

$$2(2h)^{2j} B_j = \frac{1}{(2j)!}\int_{x_0-h}^{x_0+h} (x - x_1)\ldots(x - x_j)(x - x_1')\ldots(x - x_j')\,dx.$$

Făcînd în integrală schimbarea de variabilă $x = x_0 + \lambda h$, vom avea

$$B_j = \frac{1}{2^{2j+2}\,(2j)!} \int_{-1}^{+1} [\lambda^2 - 1^2]\,[\lambda^2 - 3^2]\ldots[\lambda^2 - (2j-1)^2]\ d\lambda. \tag{104}$$

Prin urmare dacă se introduc numerele

$$K_j = \frac{1}{2^{2j+1}\,(2j)!} \int_{-1}^{+1} (\lambda^2 - 1)\,(\lambda^2 - 3^2)\ldots\ [\lambda^2 - (2j-1)^2]\,d\lambda, \tag{105}$$

vom avea

$$B_j = \frac{1}{2}\,K_j. \tag{106}$$

Restul în formula de cuadratură (103) se poate scrie sub forma

$$R = f^{(2n)}\,(\xi) \int_{x_n'}^{x_n'} \varphi\,(x)\,dx,$$

unde $\xi \in (x_n,\ x_n')$. Pentru a calcula integrala din membrul al doilea al formulei precedente, vom înlocui în formula de cuadratură (103) pe $f(x)$ cu

$$f\,(x) = \frac{1}{(2n)!}\ (x - x_1)\ldots\ (x - x_n)\ (x - x_1')\ldots\ (x - x_n').$$

Vom avea

$$\int_{x_n}^{x_n'} \varphi\ (x)\,dx = \frac{1}{(2n)!} \int_{x_0-h}^{x_0+h} (x - x_1)\ldots\ (x - x_n)\ (x - x_1')\ldots\ (x - x_n')\,dx$$

și făcînd schimbarea de variabilă $x = x_0 + \lambda h$, se deduce

$$\int_{x_n}^{x_n'} \varphi\ (x)\ dx = \frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} (\lambda^2 - 1^2)\ldots\ [\lambda^3 - (2n-1)^2]\,d\lambda$$

adică, ținînd seama de formula (105)

$$\int_{x_n}^{x_n'} \varphi\,(x)\,dx = (2h)^{2n+1}\,K_n.$$

Avem în definitiv

$$R = (2h)^{2n+1}\ \mathrm{K}_n\,f^{(2n)}\,(\xi), \tag{107}$$

unde $\xi \in (x_n,\ x_n')$.



Formula de cuadratură (103) se scrie deci sub forma definitivă

$$\begin{aligned}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = h\,\{&[f(x_1)+f(x_1')] + K_1\,[\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1)] + \\ &+ K_2\,[\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2)] + \ldots + K_{n-1}\,[\Delta^{(2n-1)} f(x_n) + \Delta^{(2n-1)} f(x_{n-1})]\} + \\ &+ (2h)^{2n+1}\,K_n f^{(2n)}(\xi),\end{aligned} \tag{108}$$

unde numerele $K_1,\ K_2,\ldots,\ K_n$ sînt date de formulele (105).

Am ajuns astfel la formula de cuadratură (108), fără să se aplice formula de interpolare a lui Bessel cu noduri simetrice, așa cum se face de obicei. Pentru $j = 1,2,3,4,5$ formula (105) ne dă

$$K_1 = -\frac{1}{12},\ K_2 = \frac{11}{720},\ K_3 = -\frac{191}{60\,480},\ K_4 = \frac{2\,497}{3\,628\,800},\ K_5 = -\frac{2\,459\,761}{2^{10}\cdot 6!\cdot 21\,600}.$$

Formula de cuadratură (108) pentru $n = 1,2,\ldots,4$ este

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = h\ \ [f\,(x_1) + f\,(x_1')] - \frac{(2h)^3}{12}\,f''\,(\xi),$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = h\ [f\ (x_1) + f\ (x_1')] - \frac{\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1)}{12}\Big\} + \frac{11\ (2h)^5}{720}\ \ f^{(IV)}\,(\xi),$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = h\,\Big\{[f\ (x_1) + f\ (x_1')] - \frac{\Delta^2\,f\,(x_2) + \Delta^2\,f\,(x_1)}{12} + \frac{11\,[\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2)]}{720}\Big\} -$$

$$- \frac{191\ \ (2h)^7}{60\,480}\ \ f^{(6)}\,(\xi),$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f\ \ (x)\ \ dx = h\,\Big\{[f\ \ (x_1) + f\,(x_1') - \frac{\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1)}{12} + \frac{11\,[\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2)]}{720} -$$

$$- \frac{191\ [\Delta^6 f\,(x_4) + \Delta^6\,f\,(x_3)]}{60\,480}\Big\} + \frac{2497\ \ (2h)^9}{3\,628\,800} f^{(8)}\ \ (\xi),$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f\ \ (x)\ \ dx = h\,\Big\{[f(x_1) + f\,(x_1')] - \frac{\Delta^2 f(x_2) + \Delta^2 f(x_1)}{12} +$$

$$+ \frac{11\,[\Delta^4 f(x_3) + \Delta^4 f(x_2)]}{720} - \frac{191\ [\Delta^6 f\,(x_4) + \Delta^6\,f\,(x_3)}{60\,480}\Big\} +$$

$$+ \frac{2\,497\,[\Delta^8 f\,(x_5) + \Delta^8\,f\,(x_4)]}{3\,628\,800}\Big\} - \frac{2\,459\,761\ (2h)^{11}}{2^{10}.\,6!\ 21\,600} f^{(10)}\,(\xi).$$

În formulele (109), în expresia restului, $\xi$ variază de la o formulă la alta.

38. *Coeficienții $K_1, K_2, \ldots, K_n$ descresc în valoare absolută.* Într-adevăr dacă se adună $K_j$ cu $K_{j+1}$, avem

$$K_{j+1} + K_j = \frac{1}{2^{2j+1}(2j)!} \int_{-1}^{+1} (\lambda^2 - 1^2) \ldots [\lambda^2 - (2j+1)^2] \left[ \frac{\lambda^2 - (2j+1)^2}{4(2j+1)(2j+2)} + 1 \right] d\lambda,$$

adică

$$K_{j+1} + K_j = \frac{1}{2^{2j+3}\,(2j+2)\,!} \int_{-1}^{+1} (\lambda^2 - 1^2) \ldots [\lambda^2 - (2j-1)^2]\,[\lambda^2 + 12j^2 + 20\,j + 7]\,d\lambda.$$

Ultimul factor sub semnul $\int$ fiind pozitiv, se vede că suma $K_{j+1} + K_j$ are semnul lui $K_j$. Coeficienții $K_1, K_2, \ldots, K_n$ având semnele alternate, rezultă că avem $|K_{j+1}| < |K_j|$.

29. *Restul în formula de cuadratură* (108). Dacă se notează cu $M_{2n}$ marginea superioară a lui $|f^{2n}(x)|$ în intervalul $[x_n, x_n']$, atunci în formula de cuadratură (108), avem

$$|R_{2n}| \leqslant \rho_{2n}(x_n, \ldots, x_n')$$

unde (109)

$$\rho_{2n}(x_n, \ldots, x_n') = (2h)^{2n+1} |K_n|\, M_{2n}$$

*Să comparăm marginea superioară $\rho_{2n}(x_n, \ldots, x_n')$ cu marginea superioară a valorii absolute a restului din formula de cuadratură a lui Gauss* (93).

Ținînd seama de prima formulă (96), vom avea următorul tablou

| $n$ | $\rho_{2n}(x_n, \ldots, x_n')$ | $\rho'_{2n}(a, b)$ | $\frac{\rho_{2n}}{\rho'_{2n}}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{12}(2h)^3 M_2$ | $\frac{1}{24}(2h)^3 M_2^\circ$ | $2\frac{M_2}{M_2^\circ}$ |
| 2 | $\frac{11}{720}(2h)^5 M_4$ | $\frac{1}{4\,320}(2h)^5 M_4^\circ$ | $66\frac{M_4}{M_4^\circ}$ |
| 3 | $\frac{191}{60\,480}(2h)^7 M_6$ | $\frac{1}{2\,016\,000}(2h)^7 M_6^\circ$ | $6\,366{,}6\ldots\frac{M_6}{M_6^\circ}$ |
| 4 | $\frac{2497}{3\,628\,800}(2h)^9 M_8$ | $\frac{1}{1\,778\,112\,000}(2h)^9 M_8^\circ$ | $1\,223\,530\,\frac{M_8}{M_8^\circ}$ |
| 5 | $\frac{2\,459\,761}{2^{10}\,6!\,21\,600}(2h)^{11} M_{10}$ | $\frac{1}{1\,237\,732\,650 \times 2^{11}}(2h)^{11} M_{10}^\circ$ | $391\,528\,613{,}7\ldots\frac{M_{10}}{M_{10}^\circ}$ |

(110)

Numerele din ultima coloană, care cresc rapid și pentru $n = 5$ ajung la 391 528 613, arată net dezavantajul formulelor de cuadratură cu noduri exterioare.



Dacă se compară tabloul (110) cu tabloul (97) relativ la formulele de cuadratură cu noduri în progresie aritmetică la stînga se constată că *formulele de cuadratură cu noduri exterioare simetrice față de mijlocul intervalului de integrare, sînt preferabile formulelor de cuadratură cu noduri exterioare la stînga.* Pentru $n = 8$, în tabloul (97) în ultima coloană avem numărul 524 308 330, pe cînd în tabloul (110), numărul corespunzător este 1 223 530.

## § 6. Influența nodurilor interioare asupra formei curbei $y = \varphi(x)$

29. Dacă nodurile sînt toate exterioare intervalului de integrare, s-a văzut că forma curbei $y = \varphi(x)$ este cea din figura 1, cînd nodurile sînt de o parte și de alta a extremităților intervalului de integrare, sau cea din figura 3, cînd nodurile sînt la stînga lui $a$, forma curbei fiind aceeași și dacă punctele $a$, $b$ fac parte dintre noduri (fig. 6), sau numai dacă punctul $a$ face parte dintre noduri (fig.7).

*Să studiem forma curbei $y = \varphi(x)$ cînd la noduri exterioare se alătură noduri interioare.* Nu vom trata această chestiune în general ea fiind destul de complicată. Vom trata aceasta pe un exemplu și anume, pe o formulă de cuadratură relativă la intervalul $[a, a+h]$, cînd la nodurile $a$, $a+h$ se alătură nodul exterior $a+2h$ și nodul interior $a + \lambda h$, unde $\lambda$ variază de la 0 la 1.

Cînd $\lambda = 1$, nodul $a+h$ este dublu și formula de cuadratură corespunzătoare este

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{24}[7f(a) + 16f(a+h) - 18f'(a+h) + f(a+2h)] + \int_a^{a+2h} \varphi(x)\, f^{(IV)}(x)\,dx, \tag{111}$$

funcția $\varphi(x)$ fiind egală cu $\varphi_1(x)$ în intervalul $[a, a+h]$, și cu $\varphi_2(x)$ în intervalul $[a+h, a+2h]$, unde

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{7h}{24}\frac{(x-a)^3}{3!},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{h}{24}\,\frac{(x-a-2h)^3}{3!}.$$

Forma curbei $y = \varphi(x)$ este dată în figura 13, minimul lui $\varphi(x)$ avînd loc pentru $x = a + \frac{7h}{8}$.

Cînd $\lambda = 0$, nodul $a$ este dublul și formula de cuadratură corespunzătoare este

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{48}[29f(a) + 6hf'(a) + 20f(a+h) - f(a+2h)] + \int_a^{a+2h} \varphi(x) f^{(IV)}(x)\,dx \tag{112}$$

funcția $\varphi(x)$ fiind egală cu $\varphi_1(x)$ și $\varphi_2(x)$ în intervalele $[a,\ a+h]$ $[a+h,\ a+2h]$, unde

$$\varphi_1 = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{29\,h}{48}\,\frac{(x-a)^3}{3!} + \frac{2h^2}{24}\,\frac{(x-a)^2}{2!},$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{h}{48}\,\frac{(x-a-2h)^3}{3!}.$$

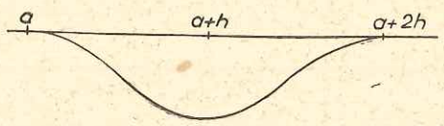

Fig. 13

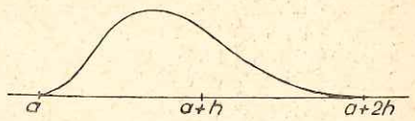

Fig. 14

Forma curbei este cea din figura 14, maximul lui $\varphi(x)$ avînd loc pentru $x = a + 0{,}6\ldots h$.

Cînd $0 < \lambda < 1$, formula de cuadratură cu nodurile $a,\ a+\lambda h,\ a+h,\ a+2h$ este

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{24\,\lambda\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)}\,[(10\lambda-3)\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)\,f(a) +$$

$$+ 2\lambda\,(8\lambda-5)\,(\lambda-2)\,f(a+h) - \lambda\,(2\lambda-1)\,(\lambda-1)\,f(a+2h) + 6\,f(a+\lambda h)] +$$

$$+ \int_a^{a+2h} \varphi(x)\,f^{(IV)}(x)\,dx \qquad (113)$$

funcția $\varphi(x)$ coincizînd pe rînd cu $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ în intervalele $[a, a+\lambda h]$, $[a+\lambda h,\ a+h]$, $[a+h,\ a+2h]$, unde

$$\varphi_1 = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{10\lambda-3}{24\lambda}\,h\,\frac{(x-a)^8}{3!},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{10\lambda-3}{24\lambda}\,h\,\frac{(x-a)^3}{3!} - \frac{h}{24\lambda\,(\lambda-1)\,(\lambda-2)}\,\frac{(x-a-\lambda h)^3}{3!},$$

$$\varphi_3(x) = -\frac{h\,(2\lambda-1)}{24\,(\lambda-2)}\,\frac{(x-a-2h)^3}{3!}.$$

Discuția formei curbei $y = \varphi(x)$, revine la construirea curbelor $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $y = \varphi_3(x)$ în intervalele corespunzătoare; ele depind de parametrul $\lambda$, care variază între 0 și 1.

Construcția curbei $y = \varphi_1(x)$ se face ținînd seama de poziția zeroului $x_1$ al derivatei $\varphi_1'(x)$, față de intervalul $[a,\ a+h]$. Avem

$$x_1 - a = \frac{10\lambda-3}{8\lambda}\,h,\quad x_1 - a - \lambda h = -\,h\,\frac{(4\lambda-3)\,(2\lambda-1)}{8\lambda}.$$



În felul acesta se pun în evidență valorile particulare $\lambda = \frac{3}{10}, \lambda = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{3}{4}$. Cînd $\lambda$ variază de la 0 la $\frac{3}{10}$, $\varphi_1(x)$ crește în intervalul $[a,\ a+\lambda h]$. Cînd $\lambda$ este cuprins între $\frac{3}{10}$ și $\frac{1}{2}$ sau între $\frac{3}{4}$ și 1, $x_1$ este în intervalul $(a,\ a+h\lambda)$. Cînd $\lambda$ este cuprins între $\frac{1}{2}$ și $\frac{3}{4}$, $x_1$ este în afara intervalului $(a,\ a+\lambda h)$. În fine cînd $\lambda$ ia valoarea $\frac{1}{2}$ sau $\frac{3}{4}$, $x_1$ coincide cu $a+\lambda h$.

De asemenea avem

$$\varphi_1(a+\lambda h) = \frac{\lambda^2 h^4}{144}\,(6\lambda^2 - 10\lambda + 3).$$

Trinomul din paranteză are rădăcina

$$\lambda_0 = \frac{5-\sqrt{7}}{6} = 0{,}392\ldots$$

cuprinsă între 0 și 1.
Avem

$$\varphi_1(a+\lambda h) > 0 \text{ pentru } 0 < \lambda < \lambda_0$$
$$\varphi_1(a+\lambda h) = 0 \text{ pentru } \lambda = \lambda_0,$$
$$\varphi_1(a+\lambda h) < 0 \text{ pentru } \lambda_0 < \lambda < 1.$$

Fără a reda toate detaliile de discuție, desenăm în figura 15 curbele $y = \varphi(x)$, marcînd cu puncte groase nodurile $a,\ a+h,\ a+2h$, și cu $\times$ nodul $a+\lambda h$. Forma curbei $y = \varphi(x)$ depinde de poziția punctului $\lambda$ din intervalul (0,1) față de punctele $\frac{3}{10}$, $\lambda_0$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ din acest interval.

Observăm din figura 14, că curba $y = \varphi(x)$ este situată sub axa $Ox$ cînd $\lambda = 1$. Ea se deformează în mod continuu cînd $\lambda$ descrește, punctul de minim al lui $\varphi(x)$, deplasîndu-se spre stînga. Cînd $\lambda = \frac{1}{2}$, $\varphi_3(x) = 0$ ceea ce este explicabil din cauza formulei de cuadratură a lui Simpson. Cînd $\lambda$ descrește de la $\frac{1}{2}$ la $\frac{3}{10}$, curba $y = \varphi(x)$ se deformează traversînd axa $Ox$. Cînd $\lambda = \frac{3}{10}$ curba $y = \varphi(x)$ este situată deasupra axei $Ox$ și cînd $\lambda$ descrește de la $\frac{3}{10}$ la 0, ea se deformează rămînînd deasupra axei $Ox$. Deci numai cînd $\frac{3}{10} < \lambda < \frac{1}{2}$ curba $y = \varphi(x)$ traversează axa $Ox$.

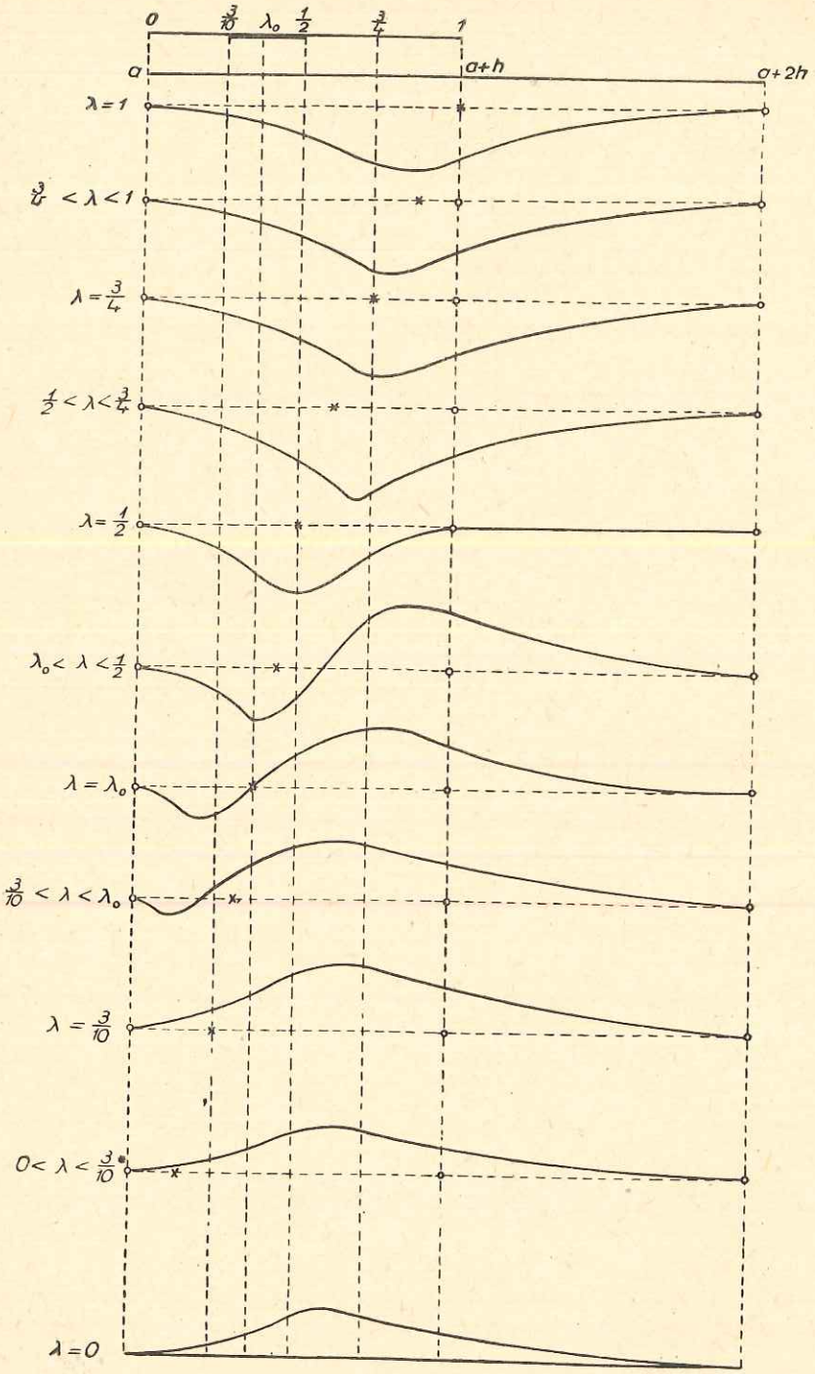


Fig. 15



Prin urmare, dacă $\lambda$ este cuprins între 0 și $\frac{3}{10}$, funcția $\varphi(x)$ păstrează semnul $+$ în intervalul $(a,\ a+2h)$, pe cînd dacă $\lambda$ este cuprins între $\frac{1}{2}$ și 1, funcția $\varphi(x)$ păstrează semnul $-$ în intervalul $(a, a+2h)$. De aici rezultă că pentru $0 < \lambda < \frac{3}{10}$ și $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ putem scrie restul formulei de cuadratură (113) sub forma

$$R = f^{(IV)}(\xi) \int_a^{a+h} \varphi(x)\, dx, \tag{114}$$

unde $\xi \in (a,\ a+2h)$.

Formula (114) este valabilă și pentru restul din formulele de cuadratură (111) și (112), ceea ce rezultă din figurile 12 și 13. Pentru a calcula integrala din membrul al doilea al formulei (114) înlocuim pe $f(x)$ în formulele de cuadratură (113), (111), (112) cu

$$f(x) = \frac{1}{4!}(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-\lambda h)$$

și obținem

$$\int_a^{a+2h} \varphi(x)\, dx = \frac{h^5}{1440}(7-15\lambda).$$

Restul din formulele de cuadratură (111), (112), (113), pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{3}{10}$, $\frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1$, se scrie deci sub forma

$$R = \frac{h^5}{1440}(7-15\lambda) f^{(IV)}(\xi). \tag{115}$$

Rezultă că dacă $M_4$ este marginea superioară a lui $|f^{(IV)}(x)|$ intervalul $[a,\ a+2h]$, avem

$$|R| \leqslant \rho(a,\ldots,\ a+2h),$$

unde

$$\rho(a,\ldots,\ a+2h) = \frac{|7-15\lambda|}{1440} h^5 M_4.$$

Marginea superioară $\rho(a,\ldots,\ a+2h)$ descrește de la $\frac{14\,h\,M_4}{2880}$ la $\frac{11\,h\,M_4}{2880}$ cînd $\lambda$ crește de la 0 la $\frac{3}{10}$ și crește de la $\frac{h^5 M_4}{2880}$ la $\frac{16h^5 M_4}{2880}$ cînd $\lambda$ crește de la $\frac{1}{2}$ la 1.

*Cazuri particulare.* Cînd $\lambda = \frac{3}{10}$ formula de cuadratură (113) devine

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{714}\left[221 f(a+h) - 7 f(a+2h) + 500 f\left(a+\frac{3h}{10}\right)\right] + \int_a^{a+2h} \varphi(x) f^{(IV)}(x)\,dx \tag{116}$$

funcția $\varphi(x)$ fiind pozitivă în intervalul $(a, a+2h)$, după cum se vede în figura 14.

De asemenea cînd $\lambda = \frac{5}{8}$, formula de cuadratură (113) devine

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{660}\left[143 f(a) + 512 f\left(a+\frac{5h}{8}\right) + 5f(a+2h)\right] + \int_a^{a+2h} \varphi(x) f^{(IV)}(x)\,dx \tag{117}$$

funcția $\varphi(x)$ fiind negativă în intervalul $(a, a+2h)$, după cum rezultă din figura 15.

În formulele (116) și (117) nodurile $a+\frac{3h}{10}$ și $a+\frac{5h}{8}$ sînt duble. Explicația acestor formule de cuadratură o vom da în paragraful 8, punctele 41 și 42.

*Observație.* Formula (115) pune în evidență valoarea $\lambda = \frac{7}{15}$ cuprinsă între $\frac{3}{10}$ și $\frac{1}{2}$ pentru care în formula de cuadratură (113) restul $R$ este nul cînd $f(x)$ este înlocuit cu un polinom de gradul al patrulea. Vom arăta în § 8, punctul 40, că nodul $a+\frac{7h}{15}$ trebuie considerat dublu, și că formula de cuadratură corespunzătoare are forma

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{30\,912}\left[4\,600 f(a) + 6\,118 f(a+h) - 56 f(a+2h) + 20\,250 f\left(a+\frac{7h}{15}\right)\right] + \int_a^{a+2h} \psi(x) f^{(V)}(x)\,dx, \tag{118}$$

funcția $\psi(x)$ păstrînd un semn constant în intervalul $(a, a+2h)$.



## § 7. Formule de cuadratură cu noduri exterioare și interioare de tip Gauss

30. Fie $p(x)$ o funcție continuă în intervalul $[a,b]$ pozitivă în interiorul intervalului putîndu-se anula în extremități. Fie pe de altă parte, $f(x)$ o funcție de clasa $C^{n+m+2q}$ în intervalul $[\alpha,\beta]$ care include intervalul $[a,b]$. Între $\alpha$ și $a$ luăm nodurile, $x_1',\ldots, x_n'$ ordonate astfel ca $x_n' < x_{n-1}' < \ldots < x_1' < a$ și între $b$ și $\beta$ luăm nodurile $x_1'',\ldots,x_m''$ ordonate astfel ca $b < x_1'' < \ldots < x_m''$. Vrem să determinăm nodurile interioare $x_1, x_2,\ldots,x_q$ ordonate $a < x_1 < \ldots < x_q < b$, astfel ca să avem formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = A_1' f(x_1') + A_2' f(x_2') + \ldots + A_n' f(x_n') + A_1'' f(x_1'') + A_2'' f(x_2'') + \ldots + A_m'' f(x_m'') + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) + R, \tag{119}$$

în care restul $R$ să fie nul cînd $f(x)$ este un polinom oarecare de gradul $n+m+2q-1$. Vrem de asemenea să studiem restul formulei de cuadratură (119).

Formula (119) a fost dată prima oară de E. B. Christoffel [5]. Lucrări relative la generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss au fost făcute de prof. T. Popoviciu [6]. D. D. Stancu a dat o generalizare a formulei lui Christoffel [7], [8].

Studiem aici în detaliu formula de cuadratură (119) și alte formule analoage împreună cu restul lor, avînd în vedere o aplicație importantă la formulele de cuadratură care se deduc din formula de interpolare a lui Stirling.

Pentru aceasta, la intervalele $[x_n', x_{n-1}'],\ldots, [x_1', a], [a,x_1],\ldots, [x_q, b], [b,x_1'']$, $\ldots [x_{m-1}'', x_m'']$, atașem funcțiile $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$, $\varphi_{n+1}(x),\ldots,\varphi_{n+q+1}(x)$ $\varphi_{n+q+2}(x),\ldots,\varphi_{n+m+q+1}(x)$ care să fie integrale ale ecuațiilor diferențiale (120)

$$\varphi_i^{(n+m+2q)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i = 1, 2,\ldots, n \\ p(x) & \text{pentru } i = n+1,\ldots, n+q+1 \\ 0 & \text{pentru } i = n+q+2,\ldots, n+m+q+1 \end{cases} \tag{120}$$

Procedînd ca la punctul 1, vom integra aceste ecuații cu următoarele condiții la limită

$$\varphi_1(x_n') = 0,\ \varphi_1'(x_n') = 0,\ldots,\ \varphi_1^{(n+m+2q-2)}(x_n') = 0,$$

$$\varphi_2(x_{n-1}') = \varphi_1(x_{n-1}'),\ \varphi_2'(x_{n-1}') = \varphi_1'(x_{n-1}'),\ldots,\ \varphi_2^{(n+m+2q-2)}(x_{n-1}') = \varphi_1^{(n+m+2q-2)}(x_{n-1}'), \tag{121}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n(x_1') = \varphi_{n-1}(x_1'),\ \varphi_n'(x_1') = \varphi_{n-1}'(x_1'),\ \ldots,\ \varphi_n^{(n+m+2q-2)}(x_1') = \varphi_{n-1}^{(n+m+2q-2)}(x_1').$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{n+1}(a)=\varphi_n(a),\ \varphi'_{n+1}(a)=\varphi'_n(a),\ \ldots,\ \varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+1}(a)=\\
&\quad=\varphi^{(n+m+2q-2)}_n(a),\ \varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+1}(a)=\varphi^{(n+m+2q-1)}_n(a)\\
&\varphi_{n+2}(x_1)=\varphi_{n+1}(x_1),\ \varphi'_{n+2}(x_1)=\varphi'_{n+1}(x_1),\ \ldots,\ \varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+2}(x_1)=\\
&\quad=\varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+1}(x_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n+q+1}(x_q)=\varphi_{n+q}(x_q),\ \varphi'_{n+q+1}(x_q)=\varphi'_{n+q}(x_q),\ \ldots,\ \varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+q+1}(x_q)=\\
&\quad=\varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+q}(x_q)
\end{aligned}\right\}\qquad(122)$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{n+q+2}(b)=\varphi_{n+q+1}(b),\ \varphi'_{n+q+2}(b)=\varphi'_{n+q+1}(b),\ \ldots,\ \varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+q+2}(b)=\\
&\quad=\varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+q+1}(b),\ \varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+q+2}(b)=\varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+q+1}(b)
\end{aligned}\qquad(123)$$

$$\begin{aligned}
&\varphi_{n+q+3}(x''_1)=\varphi_{n+q+2}(x''_1),\ \varphi'_{n+q+3}(x''_1)=\varphi'_{n+q+2}(x''_1),\ \ldots,\ \varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+q+3}(x''_1)=\\
&\quad=\varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+q+2}(x''_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{n+q+m+1}(x''_{m-1})=\varphi_{n+q+m}(x''_{m-1}),\ \varphi'_{n+q+m+1}(x''_{m-1})=\varphi'_{n+q+m}(x''_{m-1}),\ \ldots,\\
&\quad\varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+q+m+1}(x''_{m-1})=\varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+q+m}(x''_{m-1})
\end{aligned}\qquad(124)$$

$$\varphi_{n+q+m+}\ (x''_m)=0,\ \varphi'_{n+q+m+1}(x''_m)=0,\ \ldots,\ \varphi^{(n+m+2q-2)}_{n+q+m+1}(x''_m)=0.$$

Atunci se obține formula de cuadratură (119) în care coeficienții sînt dați de formulele

$$\left.\begin{aligned}
A'_n&=-\varphi^{(n+m+2q-1)}_1(x'_n)\\
A'_{n-1}&=\varphi^{(n+m+2q-1)}_1(x'_{n-1})-\varphi^{(n+m+2q-1)}_2(x'_{n-1})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A'_1&=\varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+1}(x'_1)-\varphi^{(n+m+2q-1)}_n(x'_1)
\end{aligned}\right\}\qquad(125)$$

$$\left.\begin{aligned}
C_1&=\varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+1}(x_1)-\varphi^{(n+m+2q-1)}_n(x_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_n&=\varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+q}(x_q)-\varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+q+1}(x_q)
\end{aligned}\right\}\qquad(126)$$

$$\left.\begin{aligned}
A''_1&=\varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+q+2}(x''_1)-\varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+q+3}(x''_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A''_{m-1}&=\varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+q+m}(x''_{m-1}),-\varphi^{(n+m+2q-1}_{n+q+m+1}\quad(x''_{m-1})\\
A''_m&=\varphi^{(n+m+2q-1)}_{n+q+m+1}(x''_m),
\end{aligned}\right\}\qquad(127)$$



iar restul $R$ este dat de formula

$$R=(-1)^{n+m}\int_{x'_n}^{x''_m}\varphi(x)\,f^{(n+m+2q)}(x)dx\qquad(127')$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide pe rînd cu funcțiile $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n+m+q+1}(x)$ în intervalele $[x'_n,\ x'_{n-1}],\ldots,[x''_{m-1},\ x''_m]$.

31. *Determinarea funcțiilor* $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n+m+q+1}(x)$. Din primele $n$ ecuații diferențiale (120) și din condițiile la limită (121) se deduce că

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x)&=-\lambda_n\frac{(x-x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!},\\
\varphi_2(x)&=-\lambda_n\frac{(x-x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}-\lambda_{n-1}\frac{(x-x'_{n-1})^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!},
\end{aligned}\qquad(128)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x)&=-\lambda_n\frac{(x-x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}-\lambda_{n-1}\frac{(x-x'_{n-1})^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}-\ldots\\
&\quad\ldots-\lambda_1\frac{(x-x'_1)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!},
\end{aligned}$$

unde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ sînt constante.

De asemenea din ultimele $m$ ecuații diferențiale (120) și din condițiile la limită (124) se deduce că

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+m+q+1}(x)&=\mu_m\frac{(x-x''_m)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!},\\
\varphi_{n+m+q}(x)&=\mu_m\frac{(x-x''_m)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}+\mu_{m-1}\frac{(x-x''_{m-1})^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!},
\end{aligned}\qquad(129)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+q+2}(x)&=\mu_m\frac{(x-x''_m)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}+\mu_{m-1}\frac{(x-x''_{m-1})^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}+\ldots\\
&\quad\ldots+\mu_1\frac{(x-x''_1)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}
\end{aligned}$$

unde $\mu_1,\ \mu_2,\ldots\mu_m$ sînt constante.

Ecuațiile, diferențiale (120) cu membrul al doilea $p(x)$ și cu condițiile la limită (122) determină funcțiile $\varphi_{n+1}(x),\ldots,\varphi_{n+q+1}(x)$.

Vom avea

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}\, p(s)ds - \lambda_1 \frac{(x-x_1')^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \ldots - \lambda_n \frac{(x-x_n')^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}$$

$$\varphi_{n+2}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}\, p(s)\, ds - \nu_1 \frac{(x-x_1)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \lambda_1 \frac{(x-x_1')^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \ldots - \lambda_n \frac{(x-x_n')^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} \qquad (130)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{n+q+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-s)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}\, p(s)\, ds - \nu_1 \frac{(x-x_1)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \ldots - \nu_q \frac{(x-x_q)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \lambda_1 \frac{(x-x_1')^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!} - \ldots - \lambda_n \frac{(x-x_n')^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!}$$

unde $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ sînt constante.

Constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m, \nu_1, \ldots, \nu_q$ și nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_q$ se determină scriind că și condițiile la limită (123) sînt satisfăcute. Vom avea ecuațiile

$$\mu_m (b-x_m'')^{n+m+2q-1} + \ldots + \mu_1 (b-x_1'')^{n+m+2q-1} = \int_a^b (b-s)^{n+m+2q-1} p(s)\, ds - \nu_1 (b-x_1)^{n+m+2q-1} - \ldots - \nu_q (b-x_q)^{n+m+2q-1} - \lambda_1 (b-x_1')^{n+m+2q-1} - \ldots - \lambda_n (b-x_n')^{n+m+2q-1}$$

$$\mu_m (b-x_m'')^{n+m+2q-2} + \ldots + \mu_1 (b-x_1'')^{n+m+2q-2} = \int_a^b (b-s)^{n+m+2q-2} p(s)\, ds - \nu_1 (b-x_1)^{n+m+2q-2} - \ldots - \nu_q (b-x_q)^{n+m+2q-2} - \lambda_1 (b-x_1')^{n+m+2q-2} - \ldots - \lambda_n (b-x_n')^{n+m+2q-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_m + \ldots + \mu_1 = \int_a^b p(s)\, ds - \nu_1 - \ldots - \nu_q - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n.$$



Acest sistem de ecuații se mai scrie sub forma

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \mu_1 + \ldots \mu_m + \nu_1 + \ldots + \nu_q = \int_a^b p(s)\, ds$$

$$\lambda_1 x_1' + \ldots + \lambda_n x_n' + \mu_1 x_1'' + \ldots + \mu_m x_m'' + \nu_1 x_1 + \ldots + \nu_q x_q = \int_a^b p(s)\, s\, ds \qquad (131)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 x_1'^{n+m+2q-1} \ldots + \lambda_n x_n'^{n+m+2q-1} + \mu_1 x_1''^{n+m+2q-1} + \ldots + \mu_m x_m''^{n+m+2q-1} + \nu_1 x_1^{n+m+2q-1} + \ldots + \nu_q x_q^{n+m+2q-1} = \int_a^b p(s)\, s^{n+m+2q-1}\, ds.$$

*Interpretarea constantelor* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m, \nu_1, \ldots, \nu_q$. Derivînd de $n+m+2q-1$ ori funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ date de formulele (128), (129), (130) avem

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1^{(n+m+2q-1)}(x) &= -\lambda_n \\ \varphi_2^{(n+m+2q-1)}(x) &= \lambda_n - \lambda_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n^{(n+m+2q-1)}(x) &= -\lambda_n - \lambda_{n-1} - \ldots - \lambda_1 \end{aligned}\right\} \qquad (132)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{n+m+q+1}^{(n+m+2q-1)}(x) &= \mu_m \\ \varphi_{n+m+q}^{(n+m+2q-1)}(x) &= \mu_m + \mu_{m-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n+q+2}^{(n+m+2q-1)}(x) &= \mu_m + \mu_{m-1} + \ldots + \mu_1 \end{aligned}\right\} \qquad (133)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-1)}(x) &= \int_a^x p(s)\, ds - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n \\ \varphi_{n+2}^{(n+m+2q-1)}(x) &= \int_a^x p(s)\, ds - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n - \nu_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-1)}(x) &= \int_a^x p(s)\, ds - \lambda_1 - \ldots - \lambda_n - \nu_1 - \nu_2 - \ldots - \nu_q \end{aligned}\right\} \qquad (134)$$

Formulele (125), (127) şi (126) ne arată că

$$A_n' = \lambda_n,\quad A_{n-1}' = \lambda_{n-1},\ \ldots,\ A_1' = \lambda_1,$$
$$A_1'' = \mu_1,\quad A_2'' = \mu_2,\ \ldots,\quad A_m'' = \mu_m, \tag{135}$$
$$C_1 = \nu_1,\quad C_2 = \nu_2,\ \ldots,\quad C_q = \nu_q.$$

Ţinînd seama de formulele (135), ecuaţiile (131) se interpretează imediat. Ele exprimă că restul în formulele de cuadratură (119) este nul cînd $f(x)$ este înlocuit cu $1, x, \ldots, x^{n+m+2q-1}$.

*Nodurile* $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Dacă între ecuaţiile (131) eliminăm pe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\mu_1, \ldots \mu_m, \nu_1, \ldots, \nu_q$ întîi între ecuaţiile a întîia, a doua, ..., a $(n+m+q+1)^a$, apoi între a doua, a treia, ..., a $(n+m+q+2)^a$ ... şi în sfîrşit între a $q^a$, a $(q+1)^a, \ldots,$ a $(n+m+2q)^a$ obţinem următoarele ecuaţii

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & \int_a^b p(s)\,ds \\ x_1' & \ldots & x_n' & x_1'' & \ldots & x_m'' & x_1 & \ldots & \int_a^b p(s)s\,ds \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1'^{n+m+q} & \ldots & x_n'^{n+m+q} & x_1''^{n+m+q} & \ldots & x_m''^{n+m+q} & x_1^{n+m+q} & \ldots & \int_a^b p(s)s^{n+m+q}\,ds \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1' & \ldots & x_n' & x_1'' & \ldots & x_m'' & x_1 & \ldots & \int_a^b p(s)\,ds \\ x_1'^2 & \ldots & x_n'^2 & x_1''^2 & \ldots & x_m''^2 & x_1^2 & \ldots & \int_a^b p(s)s\,ds \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1'^{n+m+q+1} & \ldots & x_n'^{n+m+q+1} & x_1''^{n+m+q+1} & \ldots & x_m''^{n+m+q+1} & x_1^{n+m+q+1} & \ldots & \int_a^b p(s)s^{n+m+q+1}\,ds \end{vmatrix} = 0$$

. . . . . .



$$\begin{vmatrix} x_1'^{q-1} & \ldots & x_n'^{q-1} & x_1''^{q-1} & \ldots & x_m''^{q-1} & x_1^{q-1} & \ldots & \int_a^b p(s)s^{q-1}\,ds \\ x_1'^{q} & \ldots & x_n'^{q} & x_1''^{q} & \ldots & x_m''^{q} & x_1^{q} & \ldots & \int_a^b p(s)s^{q}\,ds \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1'^{n+m+2q-1} & \ldots & x_n'^{n+m+2q-1} & x_1''^{n+m+2q-1} & \ldots & x_m''^{n+m+2q-1} & x_1^{n+m+2q-1} & \ldots & \int_a^b p(s)s^{n+m+2q-1}\,ds \end{vmatrix} = 0$$

Dacă notăm în general cu $V(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_e)$ determinantul lui Vandermonde al numerelor distincte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_e$, ecuaţiile precedente se mai scriu sub forma

$$\int_a^b V(x_1', \ldots, x_n';\ x_1'', \ldots, x_m'';\ x_1, \ldots, x_q;\ s)\,p(s)\,ds = 0$$

$$\int_a^b V(x_1', \ldots, x_n';\ x_1'', \ldots, x_m'';\ x_1, \ldots, x_q;\ s)\,(x_1' \ldots x_n'\,x_1'' \ldots x_m''\,x_1 \ldots x_q\,s)\ p(s)\,ds = 0$$

. . . . . .

$$\int_a^b V(x_1', \ldots, x_n';\ x_1'', \ldots, x_m'';\ x_1, \ldots, x_q;\ s)\,(x_1' \ldots x_n' x_1'' \ldots x_m''\ x_1 \ldots x_q s)^{q-1} p(s)\,ds = 0$$

Să notăm cu

$$Q_q(s) = (s-x_1)(s-x_2)\ldots(s-x_q)$$

polinomul cu rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Suprimînd în ecuaţiile precedente factorii care nu depind de $s$, aceste ecuaţii se pot scrie sub forma

$$\int_a^b p(s)\ (s-x_1')\ldots(s-x_n')\ (s-x_1'')\ldots(s-x_m'')\ Q_q(s)\,ds = 0$$

$$\int_a^b p(s)\ (s-x_1')\ldots(s-x_n')\ (s-x_1'')\ldots(s-x_m'')\ s\ Q_q(s)\,ds = 0$$

. . . . . .

$$\int_a^b p(s)\ (s-x_1')\ldots(s-x_n')\ (s-x_1'')\ldots(s-x_m'')\ldots s^{q-1}\ Q_q(s)\ ds = 0$$

sau

$$\begin{aligned}
&\int_a^b p_1(s)\, Q_q(s)\, ds = 0\\
&\int_a^b p_1(s)\, s\, Q_q(s)\, ds = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int_a^b p_1(s)\, s^{q-1}\, Q_q(s)\, ds = 0
\end{aligned} \tag{136}$$

unde s-a notat

$$p_1(s) = p(s)\,(s-x_1')\ldots(s-x_n')\,(s-x_1'')\ldots(s-x_m''). \tag{137}$$

Din ecuațiile (136) se deduce că șirul de polinoame $Q_q(s)$ verifică ecuațiile

$$\int_a^b p_1(s)\, Q_q(s)\, Q_j(s)\, ds = 0 \tag{138}$$

pentru toți indicii $q$ și $j$, pentru care $q \neq j$. Aceasta înseamnă că *șirul de polinoame $Q_q(s)$ este ortogonal față de funcția $p_1(x)$ în intervalul $[a, b]$.*

Funcția $p_1(s)$ este ca și funcția $p(s)$ continuă, în intervalul $[a,b]$ și are semnul lui $(-1)^m$ în intervalul $(a,b)$. Rezultă atunci că polinomul $Q_q(x)$ are toate rădăcinile reale, distincte și cuprinse între $a$ și $b$.

Dacă în formula de cuadratură se înlocuiește $f(x)$ cu polinomul

$$(x-x_1')\ldots(x-x_n')\,(x-x_1'')\ldots(x-x_m'')\left[\frac{Q_q(x)}{x-x_i}\right]^2,$$

care este de gradul $n+m+2q-2$, avem

$$\int_a^b p_1(s)\left[\frac{Q_q(s)}{s-x_i}\right]^2 ds = (x_i-x_1')\ldots(x_i-x_n')\,(x_i-x_1'')\ldots(x_i-x_m'')\,[Q_q'(x_i)]^2\, C_i.$$

Funcția $p_1(s)$ având același semn cu produsul $(x_i-x_1'')\ldots(x_i-x_m'')$, se deduce că *coeficienții $C_i$ sînt toți pozitivi.*

*Polinomul $Q_q(x)$.* Se știe că dacă se notează

$$\gamma_h = \int_a^b p_1(s)\, s^h\, ds\,, \qquad (h = 0,1,2,\ldots), \tag{139}$$

atunci determinantul

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \cdots \gamma_{q-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 \cdots \gamma_q \\ \cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{q-1} & \gamma_q \cdots \gamma_{2q-2} \end{vmatrix}$$



este diferit de zero și avem

$$Q_q(x) = \frac{(-1)^q}{\Delta_q}\begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^{q-1} & x^q \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{q-1} & \gamma_q \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdot & & \cdot \\ \gamma_{q-1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{2q-2} & \gamma_{2q-1} \end{vmatrix}. \tag{140}$$

32. *Determinarea coeficienților $A_i'$ și $A_k''$ din formula de cuadratură* (119). În formula de cuadratură (119) să înlocuim pe $f(x)$ cu polinomul

$$P_i(x) = \frac{(x-x_1')\ldots(x-x_{i-1}')\,(x-x_{i+1}')\ldots(x-x_n')}{(x_i'-x_1')\ldots(x_i'-x_{i-1}')\,(x_i'-x_{i+1}')\ldots(x_i'-x_n')}\cdot\frac{(x-x_1'')\ldots(x-x_m'')}{(x_i'-x_1'')\ldots(x_i'-x_m'')}\,\frac{Q_q^2(x)}{Q_q^2(x_i')} \tag{141}$$

unde $Q_q(x)$ este polinomul (140), care se anulează în toate nodurile cu excepția nodului $x_i'$ unde devine egal cu 1, Deoarece $P_i(x)$ este un polinom de gradul $n+m+2q-1$ restul în formula de cuadratură (119) este nul și această formulă ne dă

$$A_i' = \int_a^b p(x)\, P_i(x)\, dx. \tag{142}$$

Observăm ca și la punctul 2, că semnul lui $A_i'$ este semnul lui $(-1)^{i-1}$. În mod analog, în formula de cuadratură (119) să înlocuim pe $f(x)$ cu polinomul

$$\begin{aligned} R_k(x) = {} & \frac{(x-x_i')\ldots(x-x_n')}{(x_k''-x_1')\ldots(x_k''-x_n')}\cdot\\ & \cdot\frac{(x-x_i'')\ldots(x-x_{k-1}'')\,(x-x_{k+1}'')\ldots(x-x_m'')}{(x_k''-x_1'')\ldots(x_k''-x_{k-1}'')\,(x_k''-x_{k+1}'')\ldots(x_k''-x_m'')}\,\frac{Q_q^2(x)}{Q_q^2(x_k'')} \end{aligned} \tag{143}$$

și vom avea

$$A_k'' = \int_a^b p(x)\, R_k(x)\, dx, \tag{144}$$

de unde rezultă că *semnul lui $A_k''$ este semnul lui $(-1)^{k-1}$.*

Deci, *coeficienții $A_1', \ldots, A_n'$ au semnele alternate, coeficientul $A_1'$ fiind pozitiv.* De asemenea *coeficienții $A_1'', \ldots, A_m''$ au semnele alternate, coeficientul $A_1''$ fiind pozitiv.*

33. *Nu este posibil să se aleagă nodurile $x_i'$ și $x_k''$ în formula de cuadratură* (119), *astfel ca restul acestei formule să fie nul cînd $f(x)$ este înlocuit cu un polinom de grad mai mare ca $n+m+2q-1$.*

Într-adevăr ar trebui ca formula (119) să fie verificată în acest caz de un polinom de forma

$P(x) = (x - x_1')^{\alpha_1'} \dots (x - x_n')^{\alpha_n'} (x - x_1)^2 \dots (x - x_q)^2 (x_1'' - x)^{\alpha_1''} \dots (x_m'' - x)^{\alpha_m''}$, unde $\alpha_i' \geqslant$ și $\alpha_k'' \geqslant 1$. Aceasta este însă imposibil căci membrul al doilea al formulei (119) ar fi nul, pe cînd $P(x)$ fiind un polinom nenegativ în intervalul $[a,b]$, membrul întîi al formulei (119) ar fi pozitiv.

34. *Polinoamele* $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ *și polinoamele* $\varphi_{n+q+2}(x), \dots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ *date de formulele* (128), (129) *sînt de gradul efectiv* $n+m+2q-1$. Dacă ținem seama de formulele (132), (133) și de formulele (135) va fi suficient să demonstrăm că în *formula de cuadratură* (119), *sumele*

$$\begin{aligned} B_n' &= A_n', \\ B_{n-1}' &= A_n' + A_{n-1}', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_1' &= A_n' + A_{n-1}' + \dots + A_1' \end{aligned} \tag{145}$$

și sumele

$$\begin{aligned} B_m'' &= A_m'' \\ B_{m-1}'' &= A_m'' + A_{m-1}'' \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_1'' &= A_m'' + A_{m-1}'' + \dots + A_1'' \end{aligned} \tag{146}$$

*sînt diferite de zero.*

Să considerăm pentru acesta polinomul de interpolare $\psi_j(x)$ care satisface la următoarele condiții

$$\begin{aligned} &\psi_j(x_n') = 1, \quad \psi_j(x_{n-1}') = 1, \quad \dots, \quad \psi_j(x_{n-j+1}') = 1 \\ &\psi_j(x_{n-j}') = 0, \quad \psi_j(x_{n-j-1}') = 0, \quad \dots, \quad \psi_j(x_1') = 0 \\ &\psi_j(x_1) = 0, \quad \psi_j(x_2) = 0, \quad \dots, \quad \psi_j(x_q) = 0 \\ &\psi_j'(x_1) = 0, \quad \psi_j'(x_2) = 0, \quad \dots, \quad \psi_j'(x_q) = 0 \\ &\psi_j(x_1'') = 0, \quad \psi_j(x_2'') = 0, \quad \dots, \quad \psi_j(x_m'') = 0 \end{aligned} \tag{147}$$

și să demonstrăm că este de gradul efectiv $n+m+2q-1$.

Pentru aceasta să aplicăm teorema lui Rolle la intervalele

$$[x_n', x_{n-1}'], \dots, [x_{n-j+2}', x_{n-j+1}'], [x_{n-j}', x_{n-j-1}'], \dots [x_1', x_1],$$

$$[x_1, x_2], \dots, [x_{q-1}, x_q], [x_q, x_1''], \dots, [x_{m-1}'', x_m''].$$

Deducem că derivata $\psi_j(x)$ are cel puțin un zero în fiecare din aceste intervale deschise; în plus ea are și zerourile $x_1, x_2, \dots, x_q$. În total $\psi_j(x)$ are $n+m+2q-2$ zerouri reale și distincte. Polinomul este de grad cel mult $n+m+2q-1$. Dacă acest polinom ar fi de grad mai mic decît $n+m+2q-1$, derivata lui avînd $n+m+2q-2$ zerouri distincte, ar trebui să fie identic nulă și deci $\psi_j(x)$ ar trebui să fie o constantă. Aceasta este însă imposibil căci din definiția polinomului $\psi_j(x)$, el ia valoarea 1 în



unele noduri și valoarea zero în altele. Deci $\psi_j(x)$ este un polinom de gradul efectiv $n+m+2q-1$.

Polinomul $\psi_j(x)$ nu poate să aibă în intervalul $[x_1', x_1'']$ alte zerouri decît eventual pe $x_1'$, apoi pe $x_1''$ și $x_1, x_2, \dots, x_q$. Orice alt zero din acest interval ar face ca derivata $\psi_j'(x)$ să mai capete cel puțin un zero, ceea ce este imposibil căci $\psi_j(x)$ fiind de gradul efectiv $n+m+2q-1$, derivata $\psi_j'(x)$ nu poate avea mai mult de $n+m+2q-2$ zerouri.

*Semnul polinomului* $\psi_j(x)$ *în intervalul* $(x_1', x_1'')$ *și deci în intervalul* $[a,b]$, *în afară de punctele unde acest polinom se anulează este semnul lui* $(-1)^{n-j}$.

Pentru a dovedi aceasta, observăm că derivata $\psi_j'(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $[x_{n-j+1}', x_{n-j}']$, ea are un zero la stînga lui $x_{n-j+1}'$ în intervalul $[x_{n-j+2}', x_{n-j+1}']$ și zeroul succesiv al ei este la dreapta lui $x_{n-j}'$ în intervalul $(x_{n-j}', x_{n-j-1}')$. Dreapta care unește punctele de coordonate $(x_{n-j+1}', 1)$, $(x_{n-j}', 0)$ avînd un coeficient unghiular negativ, din teorema creșterilor finite rezultă că în intervalul $(x_{n-j+1}', x_{n-j}')$ există cel puțin un punct unde derivata $\psi_j'(x)$ este negativă, de unde rezultă că $\psi_j'(x)$ are semnul minus în intervalul $[x_{n-j+1}', x_{n-j}']$. Polinomul $\psi_j(x)$ *descrește* prin urmare în intervalul $[x_{n-j+1}', x_{n-j}']$ de la 1 la 0. Rezultă că $\psi_j(x)$ este negativ în intervalul $(x_{n-j}', x_{n-j-1}')$, pozitiv în intervalul $(x_{n-j-1}', x_{n-j-2}'), \dots,$ și că are semnul lui $(-1)^{n-j}$ în intervalul $(x_1', x_1)$. Deci $\varphi_j(x)$ are semnul $(-1)^{n-j}$ în intervalul $(x_1', x_1'')$ și prin urmare și în intervalul $[a,b]$.

Dacă înlocuim în formula de cuadratură (119), pe $f(x)$ cu polinomul de interpolare $\psi_j(x)$, atunci din cauza condițiilor (147), vom avea

$$\int_a^b p(x)\,\psi_j(x)\,dx = A_n' + A_{n-1}' + \dots + A_{n-j+1}'$$

ceea ce dovedește că suma $B_{n-j+1}' = A_n' + A_{n-1}' + \dots + A_{n-j+1}'$ este diferită de zero și are semnul lui $(-1)^{n-j}$. Aceasta este adevărat pentru $j = 1, 2, \dots, n$.

Cu aceasta s-a dovedit că polinoamele $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sînt de gradul efectiv $n+m+2q-1$.

În mod analog se arată că polinomul de interpolare $Q_l(x)$, care satisface la condițiile

$$\begin{aligned} &Q_l(x_m'') = 1, \quad Q_l(x_{m-1}'') = 1, \dots, \quad Q_l(x_{m-l+1}'') = 1, \\ &Q_l(x_{m-l}'') = 0, \quad Q_l(x_{m-l-1}'') = 0, \dots, \quad Q_l(x_1'') = 0, \\ &Q_l(x_1) = 0, \quad Q_l(x_2) = 0, \dots, \quad Q_l(x_q) = 0, \\ &Q_l'(x_1) = 0, \quad Q_l'(x_2) = 0, \dots, \quad Q_l'(x_q) = 0, \\ &Q_l(x_1') = 0, \quad Q_l(x_2') = 0, \dots, \quad Q_l(x_n') = 0, \end{aligned} \tag{148}$$

este de gradul efectiv $n+m+2q-1$ și că semnul lui în intervalul $(x_1', x_1'')$ și deci în intervalul $[a, b]$ este semnul lui $(-1)^{m-l}$.

Înlocuind în formula de cuadratură (119) pe $f(x)$ cu polinomul $Q_l(x)$ deducem că avem

$$\int_a^b p(x)\, Q_l(x)\, dx = A''_m + A''_{m-1} + \ldots + A''_{m-l+1},$$

de unde rezultă că suma $B''_{m-l+1} = A''_m + A''_{m-1} + \ldots + A''_{m-l+1}$ este diferită de zero și are semnul lui $(-1)^{m-l}$. Aceasta este adevărat pentru $l = 1,2,\ldots, m$. Polinoamele $\varphi_{n+q+2}(x), \ldots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ sînt deci de gradul efectiv $n+m+2q-1$.

35. *Forma curbei $y = \varphi(x)$ în intervalul $[x'_n, x''_m]$.* Funcția $\varphi(x)$ care coincide cu $\varphi_1(x),\ldots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ în intervalele $[x'_n, x'_{n-1}], \ldots, [x''_{m-1}, x''_m]$ este continuă împreună cu derivatele ei succesive pînă la ordinul $n+m+2q-2$, după cum rezultă din condițiile la limită (121), (122), (123) și (124).

Teorema. *Funcția $y = \varphi(x)$ are un singur extrem în intervalul $(x'_n, x''_m)$ care este un maxim dacă n este par, sau un minim dacă n este impar.*

Într-adevăr procedînd ca la punctul 7, să presupunem că funcția $y = \varphi(x)$ ar avea două extreme în intervalul $(x'_n, x''_m)$ adică derivata $\varphi'(x)$ s-ar anula în două puncte $\xi_1, \xi_2$ din intervalul $(x'_n, x''_m)$. Ținînd seama de condițiile la limită (121) și (124) ar urma ca derivata $\varphi^{(n+m+2q-2)}(x)$ să se anuleze în $n+m+2q-1$ puncte din intervalul $(x'_n, x''_m)$ pe care să le notăm în ordine crescătoare cu $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n+m+2q-1}$. Punctul $\eta_1$ nu poate să aparțină intervalului $(x'_n, x'_{n-1})$, deoarece s-a arătat că $\lambda_n \neq 0$ și astfel $\varphi^{(n+m+2q-2)}(x)$ este diferită de zero în intervalul $(x'_n, x'_{n-1}]$.

Punctul $\eta_1$ poate fi situat în intervalul $(x'_{n-1}, x'_{n-2}]$, însă în acest caz $\eta_2$ nu poate să fie în același interval căci atunci aplicînd teorema lui Rolle, ar urma ca $\varphi_2^{(n+m+2q-1)}(x)$ să se anuleze într-un punct din intervalul $(\eta_1, \eta_2)$ ceea ce este imposibil căci s-a dovedit că $\varphi_2(x)$ este un polinom de grad efectiv $n+m+2q-1$. Deci în intervalul $(x'_{n-1}, x'_{n-2}]$ nu poate fi situat decît cel mult punctul $\eta_1$. În mod analog se arată că în intervalul $(x'_{n-2}, x'_{n-3}]$ nu poate fi situat decît cel mult punctul $\eta_2, \ldots$ și așa mai departe în intervalul $(x'_2, x'_1]$, nu poate fi situat decît cel mult punctul $\eta_{n-2}$, iar în intervalul $(x'_1, a]$ nu poate fi situat decît cel mult punctul $\eta_{n-1}$.

De asemenea în mod analog se arată că în intervalul $[x''_{m-1}, x''_m)$ nu poate fi situat punctul $\eta_{n+m+2q-1}$, în intervalul $[x''_{m-2}, x''_{m-1})$ nu poate fi situat decît cel mult punctul $\eta_{n+m+2q-1}$, în intervalul $[x''_{m-3}, x''_{m-2})$ nu poate fi situat decît cel mult punctul $\eta_{n+m+2q-2}, \ldots$, și așa mai departe, în intervalul $[x''_1, x''_2)$ nu poate fi situat decît cel mult punctul $\eta_{n+2q+2}$, iar în intervalul $[b, x''_1)$ nu poate fi situat decît cel mult punctul $\eta_{n+2q+1}$.

Rezultă atunci că în intervalul $(a, b)$ se vor găsi punctele $\eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}$ al căror număr este $2q+1$ și pe care mai scurt le numim punctele $\eta$.

Într-un interval $(x_j, x_{j+1}]$ nu pot exista trei puncte $\eta$ căci în intervalul $(x_j, x_{j+1}]$ funcția $\varphi_{n+j+1}(x)$ fiind continuă împreună cu derivatele ei succesive pînă la



ordinul $n+m+2q$, ar urma ca $\varphi^{(n+m+2q-1)}(x)$ să se anuleze în două puncte din acest interval și $\varphi^{(n+m+2q)}(x)$ să se anuleze într-un punct din acest interval ceea ce este imposibil căci avem $\varphi^{(n+m+2q)}(x) = p(x)$ și s-a presupus că funcția $p(x)$ este pozitivă în intervalul $(a, b)$. Deci în fiecare din intervalele $(x_1, x_2], (x_2, x_3], \ldots, (x_{q-1}, x_q]$ nu pot fi situate decît cel mult cîte două puncte $\eta$. Deoarece avem $q-1$ asemenea intervale acestea epuizează cel mult $2q-2$ puncte $\eta$. Mai rămîn trei puncte $\eta$ care sînt situate în intervalele $(a, x_1]$ sau $(x_p, b)$. După cum am văzut mai sus nu se poate ca în unul din intervalele $(a,x_1]$ și $(x_p, b)$ să fie situate toate cele trei puncte $\eta$.

Să presupunem că în intervalul $(a, x_1]$ s-ar găsi punctele $\eta_n$ și $\eta_{n+1}$. Atunci dacă considerăm intervalul $(x'_1, x_1]$, observăm că funcția $\varphi(x)$ din acest interval este continuă împreună cu derivatele ei succesive pînă la ordinul $n+m+2q-1$, din cauza condițiilor la limită (122) din punctul $a$. Deoarece derivata $\varphi^{(n+m+2q-2)}(x)$ se anulează în punctele $\eta_{n-1}, \eta_n, \eta_{n+1}$, aplicînd teorema lui Rolle deducem că derivata $\varphi^{(n+m+2q-1)}(x)$ se anulează în două puncte distincte $\zeta_1, \zeta_2$, din intervalul $(x'_1, x_1)$. Nici unul din aceste puncte nu poate să aparțină intervalului $(x'_1, a)$, deoarece s-a văzut că $\varphi_n(x)$ este un polinom de grad efectiv $n+m+2q-1$. Deci punctele $\zeta_1$ și $\zeta_2$ aparțin intervalului $[a, x_1)$. Însă în acest caz la derivata $\varphi^{(n+m+2q-1)}(x)$ putem aplica din nou teorema lui Rolle la intervalul $[\zeta_1, \zeta_2]$. Se deduce astfel că derivata $\varphi^{(n+m+2q)}(x)$ se anulează într-un punct $\zeta$ din intervalul $(\zeta_1, \zeta_2)$ și deci din intervalul $(a, x_1)$. Aceasta este însă imposibil căci avem $\varphi_{n+1}^{(n+m+2q)}(x) = p(x)$ și funcția $p(x)$ este pozitivă în intervalul $(a, b)$. Deci în intervalul $(a,x_1]$ nu poate fi situat decît cel mult un punct din cele trei puncte $\eta$ rămase. În mod analog se arată că în intervalul $(x_q, b)$ nu poate fi situat decît tot un punct din cele trei puncte $\eta$ rămase. Rămîne astfel un punct $\eta$ care nu poate fi plasat nicăieri în intervalul $(x'_n, x''_m)$ și aceasta dovedește inexactitatea afirmației că derivata $\varphi'(x)$ s-ar putea anula în două puncte din intervalul $(x'_n, x''_m)$. Derivata $\varphi'(x)$ neputîndu-se anula decît într-un singur punct din intervalul $(x'_n, x''_m)$ așa cum rezultă din teorema lui Rolle aplicată intervalului $[x'_n, x''_m]$ se deduce că funcția $y = \varphi(x)$ are un singur extrem în intervalul $(x'_n, x''_m)$,

Pentru funcția $\varphi_1(x)$, avem

$$\varphi_1(x) = -A'_n \frac{(x - x'_n)^{n+m+2q-1}}{(n+m+2q-1)!},$$

și deoarece $A'_n$ are semnul lui $(-1)^{n-1}$ vedem că $\varphi_1(x)$ are semnul lui $(-1)^n$ în intervalul $(x'_n, x'_{n-1}]$. Rezultă că funcția $y = \varphi(x)$ are un maxim dacă $n$ este par și un minim dacă $n$ este impar.

Forma curbei $y = \varphi'(x)$ este dată în figura 16 după cum $n$ este par sau impar.

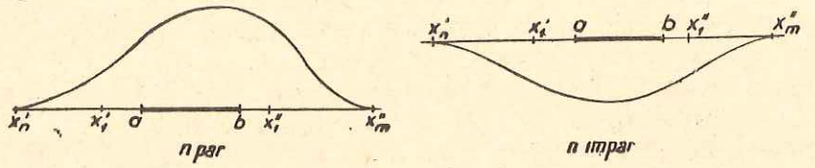


Fig. 16

36. *Restul în formula de cuadratură* (119). După cum s-a văzut la punctul 30, restul formulei de cuadratură (119) este dat de formula

$$R = (-1)^{n+m} \int_{x_n'}^{x_m''} \varphi(x)\ f^{(n+m+2q)}(x)\ dx. \tag{149}$$

Deoarece s-a demonstrat că funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(x_n', x_m'')$, din formula precedentă se deduce că

$$R = (-1)^{n+m}\ f^{(n+m+2q)}(\xi) \int_{x_n}^{x_m''} \varphi(x)\ dx,$$

unde $\xi$ este un punct din intervalul $(x_n', x_m'')$.

Dacă înlocuim în formula (119) pe $f(x)$ cu

$$f(x) = \frac{(x - x_1') \ldots (x - x_n')\,(x - x_1'') \ldots (x - x_m'')\ Q_q^2(x)}{(n + m + 2q)!}$$

și notăm

$$I = \frac{1}{(n + m + 2q)!} \int_{x_n'}^{x_m''} (x - x_1') \ldots (x - x_n')\,(x_1'' - x) \ldots (x_m'' - x)\ Q_q^2(x)\ dx, \tag{150}$$

vom avea

$$\int_{x_n'}^{x_m''} \varphi(x)\ dx = (-1)^n\ I$$

și prin urmare *restul în formula de cuadratură* (119) *poate fi scris sub forma*

$$R = (-1)^m\ f^{(n+m+2q)}(\xi) \tag{151}$$

*unde* $\xi \in (x_n', x_m'')$, *iar numărul I depinde numai de poziția nodurilor* $x_i'$ *și* $x_k''$.

37. *Caz particular.* Formule practice de cuadratură de tipul (119) cum sînt cele care provin din formula de interpolare a lui Stirling, sînt formulele pentru care $p(x) = 1$, $q = 1$, iar nodurile $x_i'$ și $x_k''$ sînt simetrice față de mijlocul intervalului $(a, b)$. Să demonstrăm că *pentru aceste formule avem* $x_1 = \dfrac{a + b}{2}$.

Într-adevăr, ecuația de gradul întîi, care determină pe $x_1$ este

$$\gamma_1 - \gamma_0\ x = 0,$$



unde $\gamma_0$ și $\gamma_1$ sînt dați de formulele (139). Această ecuație se mai scrie sub forma

$$\int_a^b (s - x_1') \ldots (s - x_n')\,(s - x_1'') \ldots (s - x_m'')\,(s - x)\ ds = 0.$$

Notînd

$$x_i' = x_0 - \lambda_i h,\ x_i'' = x_0 + \lambda_i h,\ a = x_0 - h,\ b = x_0 + h, \tag{152}$$

unde $\lambda_i > 1$, iar $h = \dfrac{b - a}{2}$, ecuația precedentă se scrie

$$\int_{x_0 - h}^{x_0 + h} [(s - x_0)^2 - \lambda_1^2 h^2] \ldots [(s - x_0)^2 - \lambda_n^2 h^2]\ [s - x_0 + x_0 - x]\ ds = 0.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $s - x_0 = uh$, această ecuație devine

$$\int_{-1}^{+1} (u^2 - \lambda_1^2) \ldots (u^2 - \lambda_n^2)\ [uh + (x_0 - x)]\ du = 0$$

sau

$$h \int_{-1}^{+1} (u^2 - \lambda_1^2) \ldots (u^2 - \lambda_n^2)\ u\ du + (x_0 - x) \int_{-1}^{+1} (u^2 - \lambda_1^2) \ldots (u^2 - \lambda_n^2)\ du = 0.$$

În această ecuație prima integrală este nulă și a doua integrală este diferită de zero deoarece $(u^2 - \lambda_1^2) \ldots (u^2 - \lambda_n^2)$ păstrează un semn constant în intervalul $(-1, +1)$. Se deduce astfel că $x_1 = x_0$, adică $x_1 = \dfrac{a + b}{2}$.

Să demonstrăm că în cazul particular considerat *coeficienții* $A_i'$, $A_i''$ *sînt egali*, adică $A_i' = A_i''$, $i = 1,2, \ldots, n$.

Într-adevăr ținînd seama de formulele (142), (144) și de notațiile (152) vom avea

$$A_i' = (-1)^{i-1} h \int_{-1}^{+1} \frac{(\lambda_1^2 - u^2) \ldots (\lambda_{i-1}^2 - u^2)\,(\lambda_{i+1}^2 - u^2) \ldots (\lambda_n^2 - u^2)\ u^2}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \ldots (\lambda_i^2 - \lambda_{i-1}^2)\,(\lambda_{i+1}^2 - \lambda_i^2) \ldots (\lambda_n^2 - \lambda_i^2)\ \lambda_i^2} (\lambda_i - u)\ du,$$

$$A_i'' = (-1)^{i-1}\ h \int_{-1}^{+1} \frac{(\lambda_1^2 - u^2) \ldots (\lambda_{i-1}^2 - u^2)\,(\lambda_{i+1}^2 - u^2) \ldots (\lambda_n^2 - u^2)\ u^2}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \ldots (\lambda_i^2 - \lambda_{i-1}^2)\,(\lambda_{i+1}^2 - \lambda_i^2) \ldots (\lambda_n^2 - \lambda_i^2)\ \lambda_i^2} (\lambda_i + u)\ du,$$

de unde rezultă că

$$A_i' = A_i'' = (-1)^{i-1}\ \frac{h}{\lambda_i} \int_{-1}^{+1} \frac{(\lambda_1^2 - u^2) \ldots (\lambda_{i-1}^2 - u^2)\,(\lambda_{i+1}^2 - u^2) \ldots (\lambda_n^2 - u^2)}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \ldots (\lambda_i^2 - \lambda_{i-1}^2)\,(\lambda_{i+1}^2 - \lambda_i^2) \ldots (\lambda_n^2 - \lambda_i^2)} u^2\ du. \tag{153}$$

Prin urmare din formula de cuadratură (119), se deduce cazul particular

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i' [f(x_0 - \lambda_i h) + f(x_0 + \lambda_i h)] + C_1 f(x_0) + \int_{x_0-\lambda_n h}^{x_0+\lambda_n h} \varphi(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx \tag{154}$$

în care coeficienții $A_i'$ sînt dați de formulele (153) unde $i = 1,2,\ldots, n$.

Restul în formula de cuadratură (154), se poate pune sub forma

$$R = (-1)^n I f^{(2n+2)}(\xi), \tag{155}$$

unde $\xi \in (x_n', x_n'')$, iar

$$I = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \int_{x_n'}^{x_n''} (x - x_1')\ldots(x - x_n')(x_1'' - x)\ldots(x_n'' - x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx. \tag{156}$$

Dacă notăm cu $M_{2n+2}$ marginea superioară a lui $|f^{(2n+2)}(x)|$ în intervalul $[x_n', x_n'']$, atunci din formula precedentă se deduce că

$$|R| \leqslant \rho(x_n', \ldots, x_n''), \tag{157}$$

unde marginea superioară $\rho(x_n', \ldots, x_n'')$ a lui $|R|$ este definită de formula

$$\rho(x_n', \ldots, x_n'') = IM_{2n+2}, \tag{158}$$

Din formulele (156) și (158) se deduce că *dacă se iau alte noduri exterioare* $x_i'^*$ *și* $x_i''^*$ *tot simetrice față de mijlocul intervalului* $(a, b)$ *și astfel ca* $x_i'^* \leqslant x_i'$ *pentru* $i = 1,2,\ldots, n$, *atunci marginea superioară* $\rho^*(x_n'^*, \ldots, x_n''^*)$ *crește, adică avem* $\rho^*(x_n', \ldots, x_n'') > \rho(x_n', \ldots, x_n'')$.

Rezultă că în formulele de cuadratură de tipul (154) nu avem interes să deplasăm nodurile $x_i'$ și $x_i''$ spre stînga și spre dreapta, deoarece în acest caz marginea superioară $\rho(x_n', \ldots, x_n'')$ crește.

Într-o lucrare în care am extins formulele de cuadratură ale lui Gauss, putem considera următorul caz particular

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_0[f(a) + f(b)] + A_1[f'(a) - f'(b)] + \ldots + A_{n-1}[f^{(n-1)}(a) + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}(b)] + Cf\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b \varphi(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx \tag{159}$$

care poate fi considerat ca un caz limită al formulei de cuadratură (154) cînd nodurile de la stînga lui $a$ tind către $a$, iar cele de la dreapta lui $b$, tind către $b$.



Restul formulei de cuadratură (159) se poate scrie sub forma

$$R_0 = (-1)^n I_0 f^{(2n+2)}(\xi_0)$$

unde $\xi_0 \in (a,b)$, iar

$$I_0 = \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \int_a^b (x-a)^n (b-x)^n \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

Avem

$$|R_0| \leqslant \rho_0(a, b),$$

unde

$$\rho_0(a, b) = I_0 M_{2n+2}^0, \tag{160}$$

$M_{2n+2}^0$ fiind marginea superioară a lui $|f^{(2n+2)}(x)|$ în intervalul $(a, b)$. Deoarece avem

$$I > I_0,\ M_{2n+2} \geqslant M_{2n+2}^0$$

rezultă că

$$\rho(x_n', \ldots, x_n'') > \rho_0(a,b).$$

Deci, *marginea superioară a restului din formula de cuadratură* (154) *definită de formula* (158) *este totdeauna mai mare decît marginea superioară a restului din formula de cuadratură* (159) *definită de formula* (160).

*Exemplu.* Avem formula de cuadratură

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx = \frac{h}{1350}\{189[f(x_0-2h) + f(x_0+2h)] - 34[f(x_0-3h) + f(x_0+3h)] + 2390\, f(x_0)\} + \int_{x_0-3h}^{x_0+3h} \varphi(x) f^{(6)}(x)\,dx. \tag{161}$$

Pentru această formulă avem

$$R = \frac{167}{180} h^7 f^{(6)}(\xi),$$

adică

$$|R| \leqslant \rho(x_2', \ldots, x_2''),$$

unde

$$\rho(x_2', \ldots, x_2'') = \frac{167}{180} h^7 M_6.$$

Formula corespunzătoare de tipul formulei (159) este

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{30}\left\{7[f(a)+f(b)] + \frac{b-a}{2}[f'(a)-f'(b)] + 16f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\} + \int_a^b \varphi(x) f^{(6)}(x)\,dx$$

al cărui rest este

$$R_0 = \frac{1}{4725}\, h^7 f^{(6)}(\xi_0),$$

adică

$$|R_0| \leqslant \rho_0(a, b),$$

unde

$$\rho_0(a, b) = \frac{1}{4725}\, h^7 M_6^0.$$

Se constată că

$$\frac{\rho(x_2', \ldots, x_2'')}{\rho_0(a,b)} = \frac{167}{180} \cdot 4725 \frac{M_6}{M_6^0} \geqslant 4383,75. \tag{162}$$

Dacă se consideră însă formula de cuadratură a lui Gauss

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{18}[5f(x_1) + 8f(x_2) + 5f(x_3)] + \int_a^b \varphi(x) f^{(6)}(x)\,dx, \tag{163}$$

restul ei se poate scrie sub forma

$$R = \frac{1}{15750}\, h^7 f^{(6)}(\xi_1),$$

unde $\xi_1 \in (a, b)$. Avem

$$|R| \leqslant \rho_i(a, b),$$

unde

$$\rho_i(a, b) = \frac{1}{15750}\, h^7 M_6^0.$$

Se constată că

$$\frac{\rho(x_2', \ldots, x_2'')}{\rho_1(a, b)} = \frac{167}{180} \cdot 15750 \frac{M_6}{M_6^0} \geqslant 14612,5. \tag{164}$$

Formulele (162), (164) arată că formula de cuadratură cu noduri interioare (163) a lui Gauss este cu mult preferată formulei de cuadratură (161) cu noduri exterioare și cu nodul dublu $\frac{a+b}{2}$, deoarece raportul (164) este foarte mare și egal cu 14 612, 5.



38. *Cazul* $m = 0$. Să considerăm formula de cuadratură de tipul (119) în care lipsesc nodurile $x_k''$, ceea ce corespunde cazului $m = 0$. Atunci formula de cuadratură este

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = A_1' f(x_1') + A_2' f(x_2') + \ldots + A_n' f(x_n') + C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) + (-1)^n \int_{x_n'}^b \varphi(x)\, f^{(n+2q)}(x)\,dx \tag{165}$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide în intervalele $[x_n', x_{n-1}'], \ldots, [x_q, b]$ cu funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+q+1}(x)$ care sînt integrale ale ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(n+2q)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \leqslant n \\ p(x) & \text{dacă } i > n \end{cases}$$

și care verifică următoarele condiții la limită

$$\varphi_1(x_n') = 0,\ \varphi_1'(x_n') = 0, \ldots, \varphi_1^{(n+2q-2)}(x) = 0,$$

$$\varphi_2(x_{n-1}') = \varphi_1(x_{n-1}'),\ \varphi_2'(x_{n-1}') = \varphi_1'(x_{n-1}'), \ldots, \varphi_2^{(n+2q-2)}(x_{n-1}') = \varphi_1^{(n+2q-2)}(x_{n-1}'),$$

. . . . . .

$$\varphi_n(x_1') = \varphi_{n-1}(x_1'),\ \varphi_n'(x_1') = \varphi_{n-1}'(x_1'), \ldots, \varphi_n^{(n+2q-2)}(x_1') = \varphi_{n-1}^{(n+2q-2)}(x_1')$$

$$\varphi_{n+1}(a) = \varphi_n(a),\ \varphi_{n+1}'(a) = \varphi_n'(a), \ldots, \varphi_{n+1}^{(n+2q-2)}(a) = \varphi_n^{(n+2q-2)}(a),$$

$$\varphi_{n+1}^{(n+2q-1)}(a) = \varphi_n^{(n+2q-1)}(a)$$

$$\varphi_{n+2}(x_1) = \varphi_{n+1}(x_1),\ \varphi_{n+2}'(x_1) = \varphi_{n+1}'(x_1), \ldots, \varphi_{n+2}^{(n+2q-2)}(x_1) = \varphi_{n+1}^{(n+2q-2)}(x_1),$$

. . . . . .

$$\varphi_{n+q+1}(x_q) = \varphi_{n+q}(x_q),\ \varphi_{n+q+1}'(x_q) = \varphi_{n+q}'(x_q), \ldots, \varphi_{n+q+1}^{(n+2q-2)}(x_q) = \varphi_{n+q}^{(n+2q-2)}(x_q)$$

$$\varphi_{n+q+1}(b) = 0,\ \varphi_{n+q+1}'(b) = 0, \ldots, \varphi_{n+q+1}^{(n+2q-2)}(b) = 0,\ \varphi_{n+q+1}^{(n+2q-1)}(b) = 0.$$

Se arată ca la punctul 37 că nodurile $x_1, \ldots x_q$ sînt rădăcinile reale distincte și cuprinse între $a$ și $b$ ale polinomului $S_q(x)$, unde șirul de polinoame $S_j(x)$, $j = 0,1, \ldots$ este ortogonal in intervalul $[a, b]$, față de funcția

$$p_2(x) = p(x)(x - x_1') \ldots (x - x_n'),$$

care este continuă și are un semn constant în intervalul $(a, b)$, adică avem

$$\int_a^b p_2(x)\, S_j(x)\, S_q(x)\,dx = 0,$$

pentru $j \neq k$.

Se arată că notînd

$$\gamma_h = \int_a^b p_2(s)\, s^h\, ds \quad (h = 0, 1, 2 \ldots)$$

avem

$$S_q(x) = \frac{(-1)^q}{\Delta_q} \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^{q-1} & x^q \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{q-1} & \gamma_q \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \gamma_{q-1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{2q-2} & \gamma_{2q-1} \end{vmatrix}$$

unde

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{q-1} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_q \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_{q-1} & \gamma_q & \cdots & \gamma_{2q-2} \end{vmatrix}$$

În formula de cuadratură coeficienții $C_i$ sînt pozitivi, iar coeficienții $A_i'$ au semnele alternate, coeficientul $A_1'$ fiind pozitiv.

Se demonstrează că funcția $y = \varphi(x)$ are în intervalul $(x_n', b)$ semnul plus dacă $n$ este par, sau semnul minus dacă $n$ este impar, de unde rezultă că restul în formula de cuadratură (165) se poate scrie sub forma

$$R = (-1)^n f^{(n+2q)}(\xi) \int_{x_n'}^{b} \varphi(x)\, dx = I\, f^{(n+2q)}(\xi), \tag{166}$$

unde $\xi \in (x_n', b)$, iar

$$I = \frac{1}{(n+2q)!} \int_a^b p(x)\,(x - x_1') \ldots (x - x_n')\, S_q^2(x)\, dx \tag{167}$$

*Exemplu.* Avem formula de cuadratură

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\, dx = \frac{h}{3999}\left[1612\, f(x_0 - 2h) - 473\, f(x_0 - 3h) + 6859\, f\left(x_0 + \frac{5h}{19}\right)\right] + \int_{x_0-3h}^{x_0+h} \varphi(x) f^{(4)}(x)\, dx, \tag{168}$$

unde nodul interior $x_0 + \frac{5h}{19}$ este dublu.



Pentru această formulă restul $R$ este dat de formula

$$R = \int_{x_0-3h}^{x_0+h} \varphi(x) f^{(4)}(x)\, dx = f^{(4)}(\xi) \int_{x_0-3h}^{x_0+h} \varphi(x)\, dx = \frac{251}{1710} h^5\, f^{(4)}(\xi)$$

unde $\xi$ este un număr din intervalul $(x_0 - 3h,\ x_0 + h)$.

Avem

$$|R| \leqslant \rho(x_0 - 3h, \ldots,\ x_0 + h),$$

unde

$$\rho(x_0 - 3h, \ldots,\ x_0 + h) = \frac{251}{1710} h^5\, M_4.$$

Dacă considerăm formula de cuadratură (48) cu noduri interioare, o margine superioară a valorii absolute a restului $R'$ este dată de formula (49) adică

$$\rho'(x_0 - h,\ x_0 + h) = \frac{0{,}07679}{90} h^5\, M_4^0.$$

Dacă se compară cele două margini superioare $\rho(x_0 - 3h, \ldots, x_0 + h)$ și $\rho'(x_0 - h,\ x_0 + h)$, se constată că

$$\frac{\rho(x_0 - 3h,\ \ldots,\ x_0 + h)}{\rho'(x_0 - h,\ x_0 + h)} = \frac{251 \cdot 90}{1710 \cdot 0{,}07679} \frac{M_4}{M_4^0} > 172$$

ceea ce dovedește încă o dată superioritatea formulei de cuadratură cu noduri interioare considerate.

## § 8. Formule de cuadratură cu noduri exterioare, nodurile $a$, $b$ și noduri interioare, de tip Gauss

39. Făcînd aceleași ipoteze asupra funcțiilor $p(x)$ și $f(x)$ ca la punctul 30, să luăm în intervalul $[\alpha, a]$, nodurile $a, x_1' \ldots, x_{n-1}'$ astfel ca $x_{n-1}' < x_{n-2}' < \ldots < a$, iar în intervalul $[b, \beta]$, nodurile $b, x_1'', \ldots, x_{m-1}''$ astfel ca $b < x_1'' < \ldots < x_{m-1}''$.

Se arată ca la punctul 30, că avem formula de cuadratură de forma

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx = {} & A_0'\, f(a) + A_1'\, f(x_1') + \ldots + A_{n-1}'\, f(x_{n-1}') + \\ & + A_0''\, f(b) + A_1''\, f(x_1'') + \ldots + A_{m-1}''\, f(x_{m-1}'') + \\ & + C_1\, f(x_1) + C_2\, f(x_2) + \ldots + C_q\, f(x_q) + \\ & + (-1)^{n+m} \int_{x_{n-1}'}^{x_{m-1}''} \varphi(x) f^{(n+m+2q)}(x)\, dx \end{aligned} \tag{169}$$

în care nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_q$ socotite duble sînt rădăcinile reale, distincte și cuprinse între $a$ și $b$ ale polinomului $T_q(x) = 0$, unde $T_0(x)$, $T_1(x), \ldots, T_q(x)$ formează un șir de polinoame ortogonale în intervalul $[a, b]$ față de funcția

$$p_3(x) = p(x)(x-a)(x-x_1')\ldots(x-x_{n-1}')(x-b)(x-x_1'')\ldots(x-x_{m-1}'')$$

care este continuă și are un semn constant în intervalul $(a, b)$.

Funcția $\varphi(x)$ din formula de cuadratură (169), coincide în intervalele $[x_n', x_{n-1}'], \ldots, [x_{m-1}'', x_m'']$ cu funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+q-1}(x)$ care sînt integralele ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(n+m+2q)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ p(x) & \text{dacă } i = n, n+1, \ldots, n+q \\ 0 & \text{dacă } i = n+q+1, \ldots, n+m+q-1 \end{cases}$$

și care verifică următoarele condiții la limită

$$\varphi_1(x_{n-1}') = 0, \varphi_1'(x_{n-1}') = 0, \ldots, \varphi_1^{(n+m+2q-2)}(x_{n-1}') = 0.$$

$$\varphi_2(x_{n-2}') = \varphi_1(x_{n-2}'), \varphi_2'(x_{n-2}') = \varphi_1'(x_{n-2}'), \ldots,$$
$$\varphi_2^{(n+m+2q-2)}(x_{n-2}') = \varphi_1^{(n+m+2q-2)}(x_{n-2}')$$

.....

$$\varphi_{n-1}(x_1') = \varphi_{n-2}(x_1'), \varphi_{n-1}'(x_1') = \varphi_{n-2}'(x_1'), \ldots,$$
$$\varphi_{n-1}^{(n+m+2q-2)}(x_1') = \varphi_{n-2}^{(n+m+2q-2)}(x_1')$$

$$\varphi_n(a) = \varphi_{n-1}(a), \varphi_n'(a), = \varphi_{n-1}'(a), \ldots, \varphi_n^{(n+m+2q-2)}(a) = \varphi_{n-1}^{(n+m+2q-2)}(a)$$

$$\varphi_{n+1}(x_1) = \varphi_n(x_1), \varphi_{n+1}'(x_1) = \varphi_n'(x_1), \ldots, \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-2)}(x_1) = \varphi_n^{(n+m+2q-2)}(x_1)$$

.....

$$\varphi_{n+q}(x_q) = \varphi_{n+q-1}(x_q), \varphi_{n+q}'(x_q) = \varphi_{n+q-1}'(x_q), \ldots,$$
$$\varphi_{n+q}^{(n+m+2q-2)}(x_q) = \varphi_{n+q-1}^{(n+m+2q-2)}(x_q)$$

$$\varphi_{n+q+1}(b) = \varphi_{n+q}(b), \varphi_{n+q+1}'(b) = \varphi_{n+q}'(b), \ldots,$$
$$\varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-2)}(b) = \varphi_{n+q}^{(n+m+2q-2)}(b)$$

$$\varphi_{n+q+2}(x_1'') = \varphi_{n+q+1}(x_1''), \varphi_{n+q+2}'(x_1'') = \varphi_{n+q+1}'(x_1''), \ldots,$$
$$\varphi_{n+q+2}^{(n+m+2q-2)}(x_1'') = \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-2)}(x_1'')$$

.....

$$\varphi_{n+m+q-1}(x_{m-2}'') = \varphi_{n+m+q-2}(x_{m-2}''), \varphi_{n+m+q-1}'(x_{m-2}'') = \varphi_{n+m+q-2}'(x_{m-2}''), \ldots,$$
$$\varphi_{n+m+q-1}^{(n+m+2q-2)}(x_{m-2}'') = \varphi_{n+m+q-2}^{(n+m+2q-2)}(x_{m-2}'')$$

$$\varphi_{n+m+q-1}(x_{m-1}'') = 0, \varphi_{n+m+q-1}'(x_{m-1}'') = 0, \ldots, \varphi_{n+m+q-1}^{(n+m+2q-2)}(x_{m-1}'') = 0.$$



Coeficienții $A_i'$, $A_i''$, $C_i$ din formula de cuadratură (169) sînt determinați de formulele

$$\begin{cases} A_{n-1}' = -\varphi_1^{(n+m+2q-1)}(x_{n-1}'), \\ A_{n-2}' = \varphi_1^{(n+m+2q-1)}(x_{n-2}') - \varphi_2^{(n+m+2q-1)}(x_{n-2}'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1' = \varphi_{n-2}^{(n+m+2q-1)}(x_1') - \varphi_{n-1}^{(n+m+2q-1)}(x_1') \\ A_0' = \varphi_{n-1}^{(n+m+2q-1)}(a) - \varphi_n^{(n+m+2q-1)}(a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_0'' = \varphi_{n+q}^{(n+m+2q-1)}(b) - \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-1)}(b), \\ A_1'' = \varphi_{n+q+1}^{(n+m+2q-1)}(x_1'') - \varphi_{n+q+2}^{(n+m+2q-1)}(x_1''), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-2}'' = \varphi_{n+m+q-2}^{(n+m+2q-1)}(x_{m-2}'') - \varphi_{n+m+q-1}^{(n+m+2q-1)}(x_{m-2}'') \\ A_{m-1}'' = \varphi_{n+m+q-1}^{(n+m+2q-1)}(x_{m-1}'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \varphi_n^{(n+m+2q-1)}(x_1) - \varphi_{n+1}^{(n+m+2q-1)}(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_q = \varphi_{n+q-1}^{(n+m+2q-1)}(x_q) - \varphi_{n+q}^{(n+m+2q-1)}(x_q) \end{cases}$$

Coeficienții $A_i'$ și $A_i''$ au semnele alternate, $A_0's$ și $A_0''$ fiind pozitivi, coeficienții $C_i$ sînt pozitivi.

Se demonstrează ca la punctul 34 că funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ și $\varphi_{n+q+1}(x), \ldots, \varphi_{n+m+q-1}(x)$ sînt polinoame de grad efectiv $n+m+2q-1$. Această observare ajută să se demonstreze ca la punctul 35 că funcția $\varphi(x)$ păstrează un semn constant în intervalul $(x_{n-1}', x_{m-1}'')$ și anume semnul plus dacă $n$ este par sau semnul minus dacă $n$ este impar.

O consecință importantă este că restul $R$ din formula (169) se poate scrie sub forma

$$R = (-1)^{n+m} f^{(n+m+2q)}(\xi) \int_{x_{n-1}'}^{x_{m-1}''} \varphi(x)\,dx = (-1)^m I\, f^{(n+m+2q)}(\xi) \qquad (170)$$

unde $\xi \in (x_{n-1}', x_{m-1}'')$, iar

$$I = \frac{1}{(n+m+2q)!} \int_a^b p(x)(x-a)(b-x)(x-x_1')\ldots(x-x_{n-1}')(x_1''-x)\ldots(x_{m-1}''-x)dx, \qquad (171)$$

din care se deduce că

$$|R| \leq \rho(x_{n-1}', \ldots, x_{m-1}'')$$

unde

$$\rho(x_{n-1}', \ldots, x_{m-1}'') = I\, M_{n+m+2q},$$

$M_{n+m+2q}$ fiind o margine superioară a lui $|f^{(n+m+2q)}(x)|$ în intervalul $(x_{n-1}', x_{m-1}'')$.

40. *Formule de cuadratură cu nodurile a, b, noduri exterioare la dreapta lui b și noduri interioare, de tip Gauss.* Se stabilește ca la punctul 39 formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = A_0' f(a) + A_0'' f(b) + A_1'' f(x_1'') + \ldots + A_{m-1}'' f(x_{m-1}'') +$$

$$+ C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) + (-1)^{m+1} \int_a^{x_{m-1}''} \varphi(x) f^{(m+2q+1)}(x)dx, \quad (172)$$

în care nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_q$, socotite duble, sînt rădăcinile reale distincte și cuprinse între $a$ și $b$ ale polinomului $U_q(x)$, unde $U_0(x), U_1(x), \ldots, U_q(x)$ formează un șir de polinoame ortogonale în intervalul $[a,b]$ față de funcția

$$p_4(x) = p(x)(x-a)(x-b)(x-x_1'')\ldots(x-x_{m-1}'')$$

care este continuă și are un semn constant în intervalul $(a,b)$.

Funcția $\varphi(x)$ din formula de cuadratură (172) coincide în intervalele $[a,x_1]$, $\ldots$, $[x_{m-2}'', x_{m-1}'']$ cu funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ care sînt integralele ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(m+2q+1)}(x) = \begin{cases} p(x) \text{ dacă } i = 1,2,\ldots, q+1 \\ 0 \quad \text{dacă } i = q+2,\ldots, q+m \end{cases}$$

și care verifică următoarele condiții la limită

$$\varphi_1(a) = 0, \qquad \varphi_1'(a) = 0, \ldots, \varphi_1^{(m+2q-1)}(a) = 0$$

$$\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), \qquad \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \ldots, \varphi_2^{(m+2q-1)}(x_1) = \varphi_1^{(m+2q-1)}(x_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{q+1}(x_q) = \varphi_q(x_q), \varphi_{q+1}'(x_q) = \varphi_q'(x_q), \ldots, \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(x_q) = \varphi_q^{(m+2q-1)}(x_q)$$

$$\varphi_{q+2}(b) = \varphi_{q+1}(b), \varphi_{q+2}'(b) = \varphi_{q+1}'(b), \ldots, \varphi_{q+2}^{(m+2q-1)}(b) = \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(b)$$

$$\varphi_{q+3}(x_1'') = \varphi_{q+2}(x_1''), \varphi_{q+3}'(x_1'') = \varphi_{q+2}'(x_1''), \ldots, \varphi_{q+3}^{(m+2q-1)}(x_1'') = \varphi_{q+2}^{(m+2q-1)}(x_1'')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{q+m}(x_{m-2}'') = \varphi_{q+m-1}(x_{m-2}''), \varphi_{q+m}'(x_{m-2}'') = \varphi_{q+m-1}'(x_{m-2}''), \ldots,$$

$$\varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x_{m-2}'') = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-1)}(x_{m-2}'')$$

$$\varphi_{q+m}(x_{m-1}'') = 0, \qquad \varphi_{q+m}'(x_{m-1}'') = 0, \ldots, \varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x_{m-1}'') = 0.$$

Coeficienții $A_0'$, $A_i''$, $C_i$ din formula (172) sînt dați de formulele

$$A_0' = -\varphi_1^{(m+2q)}(a),$$

$$\begin{cases} C_1 = \varphi_1^{(m+2q)}(x_1) - \varphi_2^{(m+2q)}(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_q = \varphi_q^{(m+2q)}(x_q) - \varphi_{q+1}^{(m+2q)}(x_q), \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0'' = \varphi_{q+1}^{(m+2q)}(b) - \varphi_{q+2}^{(m+2q)}(b) \\ A_1'' = \varphi_{q+2}^{(m+2q)}(x_1'') - \varphi_{q+3}^{(m+2q)}(x_1'') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-2}'' = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q)}(x_{m-2}'') - \varphi_{q+m}^{(m+2q)}(x_{m-2}'') \\ A_{m-1}'' = \varphi_{q+m}^{(m+2q)}(x_{m-1}'') \end{cases}$$



Se arată că *coeficienții* $A_0'$ *și* $A_0''$ *sînt pozitivi, iar coeficientul* $A_i''$ *are semnul lui* $(-1)^i$, $i = 1,2,\ldots, m-1$.

Se demonstrează că funcțiile $\varphi_{q+2}(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ sînt polinoame de grad efectiv $m+2q$. Se demonstrează apoi că funcția $\varphi(x)$ păstrează semnul minus în intervalul $(a, x_{m-1}'')$ de unde rezultă că restul $R$ din formula (172) se poate scrie sub forma

$$R = (-1)^{m+1} \int_a^{x_{m-1}''} \varphi(x)\, f^{(m+2q+1)}(x)\,dx = (-1)^m I f^{(m+2q+1)}(\xi), \quad (173)$$

unde $\xi \in (a, x_{m-1}'')$ iar

$$I = \frac{1}{(m+2q+1)!} \int_a^b p(x)(x-a)(b-x)(x_1''-x)\ldots(x_{m-1}''-x)\,U_q^2(x)\,dx. \quad (173')$$

*Exemplu.* Pentru $m=2$, $q=1$, $b=a+h$, $x_1'' = a+2h$, ecuația care determină nodul $x_1$ este

$$\gamma_1 - \gamma_0 x = 0,$$

unde

$$\gamma_0 = \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\,dx = \frac{h^4}{4},$$

$$\gamma_1 = \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\,x\,dx = f\frac{h^4}{4}\left(a + \frac{7h}{15}\right).$$

Se găsește $x_1 = a + \frac{7h}{15}$ și formula de cuadratură corespunzătoare este

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{30912}\left[4600 f(a) + 6118 f(a+h) - 56 f(a+2h) + 20250 f\left(a+\frac{7h}{15}\right)\right] -$$

$$- \int_a^{a+h} \varphi(x) f^{(5)}(x)\,dx, \quad (118)$$

unde nodul $x_1 = a + \frac{7h}{15}$ este dublu.

Se arată că restul acestei formule se poate scrie sub forma

$$R = \frac{11\,h^6}{108.000} f^{(5)}(\xi), \quad (174)$$

unde $\xi \in (a, a+2h)$.

Se regăsește formula (118) din § 6, în care restul s-a scris sub forma (174).

41. *Formule de cuadratură cu nodul a, noduri exterioare la dreapta lui b, și noduri interioare de tip Gauss.* Se stabilește ca la punctul 39, formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = A_0' f(a) + A_1'' f(x_1'') + \ldots + A_{m-1}'' f(x_{m-1}'') + \tag{175}$$
$$+ C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) + (-1)^m \int_a^{x_{m-1}''} \varphi(x)\, f^{(m+2q)}(x)\,dx,$$

în care nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_q$, socotite duble, sînt rădăcinile reale distincte și cuprinse între $a$ și $b$ ale polinomului $V_q(x)$, unde $V_0(x), \ldots, V_q(x)$ formează un șir de polinoame ortogonale în intervalul $[a, b]$ față de funcția

$$p_5(x) = p(x)(x-a)(x-x_1'')\ldots(x-x_{m-1}''),$$

care este continuă și păstrează un semn constant în intervalul $(a, b)$.

Funcția $\varphi(x)$ din formula de cuadratură (175) coincide în intervalele $[a, x_1], \ldots, [x_{m-2}'', x_{m-1}'']$ cu funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ care sînt integrale ale ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(m+2q)}(x) = \begin{cases} p(x) & \text{dacă } i = 1, \quad 2, \ldots, q+1 \\ 0 & \text{dacă } i = q+2, \ldots, q+m \end{cases}$$

și care verifică următoarele condiții la limită

$$\varphi_1(a) = 0, \quad \varphi_1'(a) = 0, \ldots, \quad \varphi_1^{(m+2q-2)}(a) = 0$$
$$\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), \quad \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \ldots, \varphi_2^{(m+2q-2)}(x_1) = \varphi_1^{(m+2q-2)}(x_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{q+1}(x_q) = \varphi_q(x_q), \quad \varphi_{q+1}'(x_q) = \varphi_q'(x_q), \ldots, \varphi_{q+1}^{(m+2q-2)}(x_q) = \varphi_q^{(m+2q-2)}(x_q)$$
$$\varphi_{q+2}(b) = \varphi_{q+1}(b), \quad \varphi_{q+2}'(b) = \varphi_{q+1}'(b), \ldots, \varphi_{q+2}^{(m+2q-2)}(b) = \varphi_{q+1}^{(m+2q-2)}(b)$$
$$\varphi_{q+3}(x_1'') = \varphi_{q+2}(x_1''), \quad \varphi'_{q+3}(x_1'') = \varphi_{q+2}'(x_1''), \ldots, \varphi_{q+3}^{(m+2q-2)}(x_1'') = \varphi_{q+2}^{(m+2q-2)}(x_1'')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{q+m}(x_{m-2}'') = \varphi_{q+m-1}(x_{m-2}''), \varphi_{q+m}'(x_{m-2}'') = \varphi_{q+m-1}'(x_{m-2}''), \ldots,$$
$$\varphi_{q+m}^{(m+2q-2)}(x_{m-2}'') = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-2)}(x_{m-2}'')$$
$$\varphi_{q+m}(x_{m-1}'') = 0, \ \varphi_{q+m}'(x_{m-1}'') = 0, \ldots, \ \varphi_{q+m}^{(m+2q-2)}(x_{m-1}'') = 0.$$

Coeficienții $A_0'$, $A_i''$, $C_i$ din formula de cuadratură (175) sînt dați de formulele

$$A_0' = -\varphi_1^{(m+2q-1)}(a),$$
$$\begin{cases} A_1'' = \varphi_{q+2}^{(m+2q-1)}(x_1'') - \varphi_{q+3}^{(m+2q-1)}(x_1'') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-2}'' = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-1)}(x_{m-2}'') - \varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x_{m-1}'') \end{cases}$$
$$\begin{cases} C_1 = \varphi_1^{(m+2q-1)}(x_1) - \varphi_2^{(m+2q-1)}(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_q = \varphi_2^{(m+2q-1)}(x_q) - \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(x_q). \end{cases}$$



Se arată că *coeficientul $A_0'$ este pozitiv, iar coeficientul $A_i''$ are semnul lui $(-1)^i$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$.*

Se demonstrează că funcțiile $\varphi_{q+2}(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ sînt polinoame de grad efectiv $m + 2q - 1$ și cu ajutorul acestei proprietăți se demonstrează că funcția $\varphi(x)$ păstrează semnul minus în intervalul $(a, x_{m-1}'')$.

Restul în formula de cuadratură (175) se poate scrie sub forma

$$R = (-1)^m \int_a^{x_{m-1}''} \varphi(x) f^{(m+2q)}(x)\,dx = (-1)^m I\, f^{(m+2q)}(\xi), \tag{176}$$

unde $\xi \in (a, x_{m-1}'')$, iar

$$I = \frac{-1}{(m+2q)!} \int_a^b p(x)(x-a)(x_1''-x)\ldots(x_{m-1}''-x)\, V_q^2(x)\,dx. \tag{176'}$$

*Exemplu.* Pentru $m = 2$, $q = 1$, $b = a + 2h$, nodul $x_1$ este determinat de ecuația

$$\gamma_1 - \gamma_0 x = 0,$$

unde

$$\gamma_0 = \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-2h)\,dx = -\frac{2h^3}{3}$$

$$\gamma_1 = \int_a^{a+h} (x-a)(x-a-2h)\,x\,dx = -\frac{2h^3}{3}a - \frac{5h^4}{12}.$$

Se deduce că $x_1 = a + \frac{5h}{8}$ și formula de cuadratură corespunzătoare este

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{660}\left[143 f(a) + 512 f\left(a + \frac{5h}{8}\right) + 5 f(a+2h)\right] + \tag{117}$$
$$+ \int_a^{a+2h} \varphi(x) f^{(4)}(x)\,dx$$

unde $x_1 = a + \frac{5h}{8}$ este un nod dublu.

Restul din această formulă se poate scrie sub forma

$$R = -\frac{19h^5}{480} f^{(4)}(\xi). \tag{177}$$

Se regăsește formula (117), în care s-a scris restul sub forma (177).

42. *Formule de cuadratură cu nodul b, noduri exterioare la dreapta lui b și noduri interioare de tip Gauss.* Se stabilește ca la punctul 39 formula de cuadratură

$$\int_a^b p(x)f(x) = A_0'' f(b) + A_1'' f(x_1'') + \ldots + A_{m-1}'' f(x_{m-1}'') + \tag{178}$$
$$+ C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \ldots + C_q f(x_q) + (-1)^m \int_a^{x_{m-1}''} \varphi(x) f^{(m+2q)}(x)\, dx,$$

în care nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_q$ socotite duble sînt rădăcinile reale distincte și cuprinse între $a$ și $b$ ale polinomului $W_q(x)$, unde $W_0, (x), W_1(x), \ldots, W_q(x)$ formează un șir de polinoame ortogonale în intervalul $[a, b]$ față de funcția

$$p_6(x) = p(x)(x-b)(x-x_1'')\ldots(x-x_{m-1}'')$$

care este continuă și păstrează un semn constant în intervalul $(a, b)$.

Funcția $\varphi(x)$ din formula (178) coincide cu funcțiile $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ în intervalele $[a, x_1], \ldots, [x_{m-2}'', x_{m-1}'']$, care sînt integralele ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_i^{(m+2q)}(x) = \begin{cases} p(x) & \text{dacă } i = 1,2,\ldots,q+1 \\ 0 & \text{dacă } i = q+2,\ldots,q+m \end{cases}$$

și care verifică următoarele condiții la limită

$$\varphi_1(a) = 0, \varphi_1'(a) = 0, \ldots \varphi_1^{(m+2q-2)}(a) = 0, \varphi_1^{(m+2q-1)}(a) = 0$$
$$\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1), \varphi_2'(x_1) = \varphi_1'(x_1), \ldots, \varphi_2^{(m+2q-2)}(x_1) = \varphi_1^{(m+2q-2)}(x_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{q+1}(x_q) = \varphi_q(x_q), \varphi_{q+1}'(x_q) = \varphi_q'(x_q), \ldots, \varphi_{q+1}^{(m+2q-2)}(x_q) = \varphi_q^{(m+2q-2)}(x_q)$$
$$\varphi_{q+2}(b) = \varphi_{q+1}(b), \varphi_{q+2}'(b) = \varphi_{q+1}'(b), \ldots, \varphi_{q+2}^{(m+2q-2)}(b) = \varphi_{q+1}^{(m+2q-2)}(b)$$
$$\varphi_{q+3}(x_1'') = \varphi_{q+2}(x_1''), \varphi_{q+3}'(x_1'') = \varphi_{q+2}'(x_1''), \ldots, \varphi_{q+3}^{(m+2q-2)}(x_1'') = \varphi_{q+2}^{(m+2q-2)}(x_1'')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{q+m}(x_{m-2}'') = \varphi_{q+m-1}(x_{m-2}''), \varphi_{q+m}'(x_{m-2}'') = \varphi_{q+m-1}'(x_{m-2}''), \ldots,$$
$$\varphi_{q+m}^{(m+2q-2)}(x_{m-2}'') = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-2)}(x_{m-2}'')$$
$$\varphi_{q+m}(x_{m-1}'') = 0, \varphi_{q+m}'(x_{m-1}'') = 0, \ldots, \varphi_{q+m}^{(n+2q-2)}(x_{m-1}'') = 0.$$

Coeficienții $A_i''$ și $C_i$ din formula de cuadratură (178) sînt dați de următoarele formule

$$\begin{cases} A_0'' = \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(b) - \varphi_{q+2}^{(m+2q+1)}(b) \\ A_1'' = \varphi_{q+2}^{(m+2q-1)}(x_1'') - \varphi_{q+3}^{(m+2q-1)}(x_1'') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{m-2}'' = \varphi_{q+m-1}^{(m+2q-1)}(x_{m-2}'') - \varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x_{m-2}'') \\ A_{m-1}'' = \varphi_{q+m}^{(m+2q-1)}(x_{m-1}'') \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \varphi_1^{(m+2q-1)}(x_1) - \varphi_2^{(m+2q-1)}(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_q = \varphi_q^{(m+2q-1)}(x_q) - \varphi_{q+1}^{(m+2q-1)}(x_q) \end{cases}$$



Se arată că *coeficientul* $A_i''$ *are semnul lui* $(-1)^i$, $i = 0,1,\ldots, m-1$ *iar coeficienții* $C_i$ *sînt pozitivi.*

Se demonstrează că funcțiile $\varphi_{q+2}(x), \ldots, \varphi_{q+m}(x)$ sînt polinoame de grad efectiv $m + 2q - 1$ și aceasta servește la a demonstra că funcția $\varphi(x)$ păstrează semnul plus în intervalul $(a, x_{m-1}'')$.

Se deduce că restul din formula de cuadratură (178) se poate scrie sub forma

$$R = (-1)^m \int_a^{x_{m-1}''} \varphi(x) f^{(m+2q)}(x)\, dx = (-1)^m I f^{(m+2q)}(\xi), \tag{179}$$

unde $\xi \in (a, x_{m-1}'')$, iar

$$I = \frac{1}{(m+2q)!} \int_a^b p(x)(b-x)(x_1''-x)\ldots(x_{m-1}''-x) W_q^2(x)\, dx. \tag{180}$$

*Exemplu.* Pentru $m = 2$, $q = 1$, $b = a + h$, $x_1'' = a + 2h$, nodul $x_1$ este determinat de ecuația

$$\gamma_1 - \gamma_0 x = 0$$

unde

$$\gamma_0 = \int_a^{a+h} (x-a-h)(x-a-2h)\, dx = \frac{5h^3}{6},$$

$$\gamma_1 = \int_a^{a+h} (x-a-h)(x-a-2h)\, x\, dx = \frac{5h^3}{6} a + \frac{h^4}{4}.$$

Se deduce că $x_1 = a + \frac{3}{10} h$, și formula de cuadratură corespunzătoare este

$$\int_a^{a+h} f(x)\, dx = \frac{h}{714}\left[221 f(a+h) - 7 f(a+2h) + 500 f\left((a+\frac{3h}{10})\right)\right] + \tag{116}$$
$$+ \int_a^{a+h} \varphi(x) f^{(4)}(x)\, dx.$$

Restul acestei formule de cuadratură se poate scrie sub forma

$$R = \frac{11h^5}{300} f^{(4)}(\xi). \tag{181}$$

Se regăsește astfel formula (116) în care s-a precizat și restul sub forma (181).

## § 9. Formula de cuadratură cu nodurile $a, b, \frac{a+b}{2}$ și noduri exterioare simetrice față de mijlocul intervalului $(a, b)$ în progresie aritmetică cu rația $h = \frac{b-a}{2}$

43. În formula de cuadratură (169) să presupunem $p(x) = 1$ și $q = 1$. Să mai presupunem că nodurile $x_i'$ și $x_i''$ sînt simetrice față de mijlocul $x_0$ al intervalului $(a, b)$, adică avem

$$x_i' = x_0 - \lambda_i h, \quad x_i'' = x_0 + \lambda_i h \tag{182}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Se demonstrează ca la punctul 37, că *nodul interior* $x_1$, *socotit dublu, este* $x_1 = \frac{a+b}{2}$ *și că coeficienții* $A_i'$, $A_i''$ *din formula* (168) *sînt egali.*

În acest caz formula (169) se poate scrie sub forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_0\,[f(a) + f(b)] + A_1\,[f(x_1') + f(x_1'')] + \ldots$$
$$+ A_{n-1}[f(x_{n-1}') + f(x_{n-1}'')] + C f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_{x_{n-1}'}^{x_{n-1}''} \varphi(x) f^{(2n+2)}(x)\,dx. \tag{183}$$

În această formulă funcția $\varphi(x)$ are în intervalul $(x_{n-1}', x_{n-1}'')$ semnul plus dacă $n$ este par sau semnul minus dacă $n'$ este impar.

44. *Cazul nodurilor* $x_0, x_1', x_2', \ldots$ *în progresie aritmetică.* Vom nota în acest caz, nodurile cu

$$x_k = x_0 + kh,$$

unde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Cu această notație avem $x_{-1} = a$, $x_1 = b$ și formula (183) se scrie

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = A_0\,[f(x_{-1}) + f(x_1)] + A_1\,[f(x_{-2}) + f(x_2)] + \ldots + A_{n-1}[f(x_{-n}) + f(x_n)] +$$
$$+ C f(x_0) + \int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x)\, f^{(2n+2)}(x)\,dx. \tag{183'}$$

Introducînd diferențele de ordin par pe nodurile considerate avem

$$\Delta^2 f(x_{-1}) = f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1})$$
$$\Delta^4 f(x_{-2}) = f(x_2) - 4f(x_1) + 6f(x_0) - 4f(x_{-1}) + f(x_{-2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^{2k} f(x_{-k}) = f(x_k) - C_{2k}^1 f(x_{k-1}) + \ldots - C_{2k}^k f(x_{-k+1}) + f(x_{-k}).$$



Din aceste formule se deduce că $f(x_1) + f(x_{-1})$ se exprimă liniar cu ajutorul lui $f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_{-1})$, apoi $f(x_2) + f(x_{-2})$ se exprimă liniar cu ajutorul lui $f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_{-1})$, $\Delta^4 f(x_{-2}) \ldots$, și în general $f(x_k) + f(x_{-k})$ se exprimă liniar cu ajutorul lui $f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_{-1}), \ldots, \Delta^{2k} f(x_{-k})$.

Formula de cuadratură se scrie atunci și sub forma

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = B_0 f(x_0) + B_1\,\Delta^2 f(x_{-1}) + \ldots + B_n\,\Delta^{2n} f(x_{-n}) +$$
$$+ \int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x)\, f^{(2n+2)}(x)\,dx. \tag{183''}$$

Coeficienții $B_0, B_1, \ldots, B_n$ se determină în modul următor: se înlocuiește $f(x)$ cu 1 și se obține $B_0 = 2h$, apoi pentru a determina în general pe $B_k$ se înlocuiește în formula (183'') $f(x)$ cu

$$f(x) = (x - x_0)^2 (x - x_1)(x - x_{-1}) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{-k+1}).$$

Este evident că avem $f(x_0) = 0$, $\Delta^2 f(x_{-1}) = 0, \ldots, \Delta^{2(k-1)} f(x_{-k+1}) = 0$ și vom avea de asemenea $\Delta^{2(k+1)} f(x_{k+1}) = 0, \ldots$ deoarece $f(x)$ este un polinom de gradul $2k$. Formula (183) ne va da atunci

$$B_k\,\Delta^{2k} f(x_{-k}) = \int_{x_{-1}}^{x_1} (x - x_0)^2 (x - x_1)(x - x_{-1}) \ldots (x - x_k)(x - x_{-k})\,dx.$$

Observînd că

$$\Delta^{2k} f(x_{-k}) = (2k)!\, h^{2k}$$

și făcînd în integrală schimbarea de variabilă $x - x_0 = uh$, vom avea

$$(2k)!\, h^{2k} B_k = h^{2k} \cdot h \int_{-1}^{+1} u^2 (u^2 - 1) \ldots [u^2 - (k-1)^2]\,du =$$
$$= 2h^{2k+1} \int_0^1 u^2 (u^2 - 1^2) \ldots [u^2 - (k-1)^2]\,du$$

de unde rezultă că dacă notăm

$$L_k = \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 u^2 (u^2 - 1^2) \ldots [u^2 - (k-1)^2]\,du, \tag{184}$$

vom avea

$$B_k = 2\,h\,L_k$$

și formula (183) devine

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\,[f(x_0) + L_1\,\Delta^2 f(x_{-1}) + L_2\,\Delta^4 f(x_{-2}) + \ldots + L_n\,\Delta^{2n} f(x_{-n})] +$$

$$+ \int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x)\, f^{(2n+2)}(x)\,dx. \qquad (183''')$$

Restul în această formulă se poate scrie sub forma

$$R = f^{(2n+2)}(\xi) \int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x)\,dx$$

și integrala din membrul al doilea se calculează înlocuind în formula (183''') pe $f(x)$ cu

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^2\,(x-x_1)\,(x-x_{-1})\ldots(x-x_n)\,(x-x_{-n})}{(2n+2)!}.$$

Vom avea

$$\int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{[2(n-1)]!} \int_{x_{-1}}^{x_1} (x-x_0)^2\,(x-x_1)(x-x_{-1})\ldots(x-x_n)(x-x_{-n})\,dx$$

adică

$$\int_{x_{-n}}^{x_n} \varphi(x)\,dx = 2\,h^{2n+3}\,L_{n+1}.$$

Formula de cuadratură (183''') se poate scrie deci în definitiv sub forma

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\,[f(x_0) + L_1\,\Delta^2 f(x_{-1}) + L_2\,\Delta^4 f(x_{-2}) + \ldots + L_n\,\Delta^{2n} f(x_{-n})] +$$

$$+ 2\,h^{2n+3}\,L_{n+1}\,f^{(2n+2)}(\xi). \qquad (185)$$

Am obținut astfel formula de cuadratură care de obicei se deduce aplicînd formula de interpolare a lui Stirling.

Avem

$$L_1 = \frac{1}{6},\quad L_2 = -\frac{1}{180},\quad L_3 = \frac{1}{1512},\quad L_4 = -\frac{23}{226\,800},\quad L_5 = \frac{263}{14\,968\,800}$$



astfel că pentru $n = 1, 2, 3, 4$ formula (185) este

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\left[f(x_0) + \frac{1}{6}\,\Delta^2 f(x_{-1})\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi),$$

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\left[f(x_0) + \frac{1}{6}\,\Delta^2 f(x_{-1}) - \frac{1}{180}\,\Delta^4 f(x_{-2})\right] + \frac{h^7}{756} f^{(6)}(\xi)$$

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\left[f(x_0) + \frac{1}{6}\,\Delta^2 f(x_{-1}) - \frac{1}{180}\,\Delta^4 f(x_{-2}) + \frac{1}{1512}\,\Delta^6 f(x_{-3})\right] -$$

$$- \frac{23h^9}{113\,400} f^{(8)}(\xi)$$

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\left[f(x_0) + \frac{1}{6}\,\Delta^2 f(x_{-1}) - \frac{1}{180}\,\Delta^4 f(x_{-2}) + \frac{1}{1512}\,\Delta^6 f(x_{-3}) -\right.$$

$$\left. - \frac{23}{226800}\,\Delta^8 f(x_{-4})\right] + \frac{263\,h^{11}}{7484400} f^{10}(\xi).$$

Din formula de cuadratură (185) se deduce următoarea evaluare a valorii absolute a restului

$$|R| \leqslant \rho(x_{-n}, \ldots, x_n), \qquad (186)$$

unde

$$\rho(x_{-n}, \ldots, x_n) = 2\,|L_{n+1}|\,h^{2n+3}\,M_{2n+2} \qquad (187)$$

unde $M_{2n+2}$ este marginea superioară a lui $|f^{(2n+2)}(x)|$ în intervalul $[x_{-n}, x_n]$.

Să comparăm marginea superioară $\rho(x_{-n}, \ldots, x_n)$ dată de formula (187) cu marginea superioară a lui $|R|$ din formulele obișnuite ale lui Gauss, de aceeași precizie

$$\rho(a, b) = \frac{[(n+1)!]^4\,2^{2n+3}}{[(2n+2)!]^3\,(2n+3)}\,h^{2n+3}\,M^0_{2n+2}.$$

Deducem următorul tablou

| $n$ | $\rho(x_{-n}, \ldots, x_n)$ | $\rho(a, b)$ | $\dfrac{\rho(x_{-n}, \ldots, x_n)}{\rho(a, b)}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{h^5}{90} M_4$ | $\dfrac{h^5}{135} M^0_4$ | $\dfrac{3}{2}\dfrac{M_4}{M^0_4}$ |
| 2 | $\dfrac{h^7}{756} M_6$ | $\dfrac{h^7}{15750} M^0_6$ | $\dfrac{875}{42}\dfrac{M_6}{M^0_6} = 20{,}8\ldots\dfrac{M_6}{M^0_6}$ |
| 3 | $\dfrac{23h^9}{113400} M_8$ | $\dfrac{h^9}{3472875} M^0_8$ | $\dfrac{5635}{8}\dfrac{M_8}{M^0_8} = 704{,}375\dfrac{M_8}{M^0_8}$ |
| 4 | $\dfrac{263\,h^{11}}{7484400} M_{10}$ | $\dfrac{h^{11}}{1237732650} M^0_{10}$ | $\dfrac{26792074}{616}\dfrac{M_{10}}{M^0_{10}} = 43493{,}6\ldots\dfrac{M_{10}}{M^0_{10}}$ |

(188)

Numerele din ultima coloană care cresc vertiginos, arată că formulele de cuadratură cu noduri interioare de tip Gauss sînt preferabile și față de formulele de cuadratură cu nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{-1}, \ldots, x_{-n}$ care provine din formula de interpolare a lui Stirling.

45. *Comparație între marginile superioare ale valorii absolute ale restului din formulele de cuadratură care se obțin din formulele de interpolare ale lui Newton la stînga, Bessel, și Stirling.*

S-a dat în această lucrare formulele de cuadratură (90), (108), (185) care de obicei se obțin aplicînd formulele de interpolare ale lui Newton la stînga, Bessel și Stirling fără însă să se folosească aceste formule. Din studiul amănunțit al restului lor și din compararea lor cu restul din formulele de cuadratură de aceeași precizie ale lui Gauss cu noduri interioare se desprind următoarele concluzii.

Pentru formulele (90), (108), (185) marginile valorii absolute ale restului găsite la punctele 25, 29, 44 sînt:

$$\begin{aligned} \rho_N\,(x_0 - (4n+3)\,h, \ldots, x_0 - h) &= (2h)^{2n+3}\, J_{2n}\, M_{2n+2} \\ \rho_B(x_{n+1}, \ldots, x'_{n+1}) &= (2h)^{2n+3}\,|\,K_{n+1}|\,M_{2n+2} \\ \rho_S\,(x_{-n+1}, \ldots, x_n) &= (2h)^{2n+3}.\,|\,L_{n+1}|\,M_{2n+2}. \end{aligned} \tag{189}$$

Marginea superioară a valorii abolute a restului din formula lui Gauss este

$$\rho_G\,(a,b) = \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3\,(2n+1)}\,(2h)^{2n+1}\,M^0_{2n}\,.$$

Cu aceste formule putem forma un tablou de comparație cu valorile lui $\frac{\rho_N}{\rho_G}, \frac{\rho_B}{\rho_G}, \frac{\rho_S}{\rho_G}$ pentru $n = 1, 2, 3, 4$. Vom avea

| $n$ | $\frac{\rho_N}{\rho_G}$ | $\frac{\rho_B}{\rho_G}$ | $\frac{\rho_S}{\rho_G}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $1506\,\frac{M_4}{M_4^0}$ | $66\,\frac{M_4}{M_4^0}$ | $1{,}5\,\frac{M_4}{M_4^0}$ |
| 2 | $636233{,}3\,\frac{M_6}{M_6^0}$ | $6366{,}6\,\frac{M_6}{M_6^0}$ | $20{,}8\,\frac{M_6}{M_6^0}$ |
| 3 | $524308330\,\frac{M_8}{M_8^0}$ | $1\,223\,530\,\frac{M_8}{M_8^0}$ | $704{,}375\,\frac{M_8}{M_8^0}$ |
| 4 | $710246014380\,\frac{M_{10}}{M_{10}^0}$ | $391528613{,}7\,\frac{M_{10}}{M_{10}^0}$ | $43\,493{,}6\,\frac{M_{10}}{M_{10}^0}$ |

(190)

Numerele din ultima coloană fiind mult mai mici decît cele din prima și a doua coloană, deducem că formula de cuadratură (185) este preferabilă față de formulele de cuadratură (90) și (108).

*Institutul de calcul*
*al Academiei R.P.R., Filiala Cluj*



## КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ВНЕШНИМИ УЗЛАМИ

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Изучаются квадратурные формулы с внешними узлами, вместе с их остаточным членом.

В § 1 строится квадратурная формула (12) при помощи функции $\varphi(x)$, совпадающей на отрезках $[x_n, x_{n-1}], \ldots, [x_{m-1}, x'_m]$ с функциями $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$, интегралами дифференциальынх уравнений (3) с граничными условиями (6)—(11). Доказывается, что функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}$ (x( суть многочлены фактической степени $n+m-1$; это позволяет заключить, что функция $\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак на отрезке $(x_n, x'_m)$. Таким образом получается вид (29) остаточного члена, откуда оценивается верхняя грань абсолютной величины $\rho(x_n, \ldots x'_m)$, выраженная формулой (32), где $I$ выражается формулой (30).

Приводится простой пример квадратурной формулы (40), для которой верхняя грань $|R|$ выражается формулой (41). Эта верхняя грань сравнивается с верхней гранью $\rho_s$, выражаемой формулой (46) и относящейся к формуле Симпсона (45) или с верхней гранью $\rho$, выражаемой формулой (49) и относящейся к квадратурной формуле (48) с внутренними узлами. Результаты этого сопоставления приводятся в формулах (47) и (50); они указывают на преимущество квадратурной формулы с внутренними узлами, рассмотренные в этой работе перед формулами с внешними узлами.

В § 2 строится квадратурная формула (53), также с внешними узлами, однако к которым добавляются узлы $a$ и $b$. Построение осуществляется при помощи функции $\varphi(x)$, совпадающей в промежутках $[x_{n-1}, x_{n-2}], \ldots, [x'_{n-2}, x'_{m-1}]$, с функциями $\varphi_s(x), \ldots, \varphi_{n+m-1}(x)$ — интегралами дифференциальных уравнений (54) с граничными условиями (55). Так же как и в § 1 доказывается, что функция $\varphi(x)$ не меняет знака в промежутке $(x_{n-1}, x'_{m-1})$, что дает возможность исследовать остаточный член как в § 1. В качестве примера имеем квадратурные формулы (68), (72), (73).

В § 3 строится квадратурная формула (74) с узлом $a$ и с внешними узлами, расположенными слева от $a$, причем доказывается, что остаточный член имеет вид (78), а функция $\varphi(x)$ не меняет знака в промежутке $(x_{n-1}, b)$.

В § 4 дается важное приложение, где устанавливается квадратурная формула (90) с ее остаточным членом. Отмечается, что для этой формулы не использована, как обычно, формула Ньютона для интерполирования слева.

Сравнивая верхние грани $\rho_n$ для $|R|$, выражаемые формулой (92), с верхними гранями для $|R'|$ или $|R''|$ в квадратурных формулах Гаусса одинаковой степени точности при $n = 1{,}2, \ldots, 10$ приходят к таблице (97). Возрастающие числа в последнем столбце этой таблицы, достигающие значения 710, 246, 214, 380, при $n = 10$, заставляют быть особенно внимательными при применении квадратурных формул с внешними узлами, расположенными слева по арифметической прогрессии, и заключить, что предпочтительно пользоваться квадратурными формулами с внутренними узлами гауссова типа.

В § 5 дается новое важное приложение и устанавливается квадратурная формула (108) с симметричными относительно $x_0$ внешними узлами, расположенными по арифметической прогрессии, причем одновременно получается и ее остаточный член. Квадратурная формула получена без обычного применения квадратурной формулы Бесселя. Сравнивая верхние грани $\rho_{rn}$ для $|R|$, выражаемые формулой (109), с верхними гранями для $|R'|$ квадратурной формулы Гаусса одинаковой степени точности приходят для $n = 1, 2, 3, 4, 5$ к таблице (110). Числа в последнем столбце этой таблицы, возрастающие быстро и достиигающие 391, 528, 613 при $n = 5$, ясно показывают недостаток формулы с внешними узлами.

Если сравнить таблицу (110) с таблицей (97), то можно заметить, что квадратурным формулам с симметричными по отношению к середине промежутка интегрирования внешними узлами следует отдать преимущество перед квадратурными формулами с расположенными слева внешними узлами.

В § 6 изучается на одном примере влияние внутренних узлов на вид кривой $y = \varphi(x)$. Это исследование проводится для квадратурной формулы (113) с узлами $a$, $a + h$, являющимися концами промежутка интегрирования с внешним узлом $a + 2h$ и с внутренним узлом $a + \lambda h$. Исследуется вид кривой $y = \varphi(x)$, когда $\lambda$ изменяется между 0 и 1; при этом получается рис. 15. Выявляются частные случаи (116), (117), (118), объяснение которых приводится в § 8.

В § 7 строится квадратурная формула (119) с внешними узлами $x'_1, \ldots, x'_n$, расположенными слева от $a$, и с внешними узлами $x''_1, \ldots, x''_m$ — справа от $b$ и с внутренними узлами $x_1, \ldots, x_q$, рассматриваемыми как двойные. Формула (119) дана Е. Б. Кристоффелем [6] и является обобщением формулы Гаусса. Обобщению формулы Гаусса посвящены работы проф. Т. Поповича [7], а обобщение формулы Кристоффеля дано Д. Д. Станку [8, 9].

В настоящей работе квадратурная формула (119) и другие аналогичные ей формулы изучаются с целью важного приложения к квадратурным формулам, которые обыкновенно выводятся из интерполяционной формулы Стирлинга.

Построение квадратурной формулы [119] осуществляется при помощи функции $\varphi(x)$, последовательно совпадающей на отрезках $[x'_n, x'_{n-1}], \ldots, [x''_{m-1}, x''_m]$ с функциями $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+1+q+1}(x)$ — интегралами дифференциальных уравнений (120) с граничными условиями (121) — (124). Оказывается, что узлы $x_1, \ldots, x_q$ суть попарно различные вещественные корни многочлена $Q_q(x)$, содержащиеся в формуле (140). Доказывается, что функция $\varphi(x)$ не меняет знака в промежутке $(x'_n, x''_m)$, что дает возможность представить остаточный член в виде (151).

В частном случае, когда $p(x) = 1$, $q = 1$ и когда внешние узлы симметричны по отношению к середине промежутка $(a, b)$ доказывается, что $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ и получается формула (154). В качестве примера приводится формула (161).

В § 8 автор возвращается к исследованной в § 7 задаче, прибавляя узлы $a$, $b$ или только один из узлов $a$, $b$. Таким образом получаются формулы (169), (172), (175), (178). В качестве примера приводятся формулы: (118) с внутренним узлом $a + \dfrac{7H}{15}$, рассматриваемым как двойной и (116) с внутренним узлом $\dfrac{5H}{8}$, рассматриваемым как двойной. Таким образом объясняются встречающиеся в § 6 (29) частные случаи.



В § 9 исследуются квадратурные формулы с узлами $a$, $b$, $\dfrac{a+b}{2}$ и с симметричными относительно середины промежутка $|a, b|$ внешними узлами, расположенными по арифметической прогрессии с разностью $h = \dfrac{b-a}{2}$.

Устанавливаются квадратурная формула (185) и ее остаточный член. Важно то, что эта формула получена без обычного применения интерполяционной формулы Стирлинга. Сравнивая выражаемые формулой (187) верхние грани $\rho$ с верхними гранями для $|R'|$ в квадратурной формуле Гаусса одинаковой точности получается для $n = 1, 2, 3, 4$ таблица (188).

Числа в последнем столбце этой таблицы возрастают с громадной быстротой, что показывает, что квадратурным формулам с внутренними узлами гауссова типа следует отдать предпочтение и по сравнению с квадратурными формулами вида (185).

В формуле (190) сравниваются отношения $\dfrac{\rho_N}{\rho_G}$, $\dfrac{\rho_B}{\rho_G}$, $\dfrac{\rho_S}{\rho_G}$ между верхними гранями абсолютной величины остаточных членов в формулах (90), (108), (185) и в формуле Гаусса. Числа в последнем столбце показывают преимущество формулы (185) по сравнению с формулой (90) и (108).

## FORMULES DE QUADRATURE À NŒUDS EXTÉRIEURS


### RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur étudie des formules de quadrature à nœuds extérieurs, en même temps que leur reste.

Dans le § 1, on construit la formule de quadrature (12) au moyen de la fonction $\varphi(x)$ qui coïncide, dans les intervalles $[x_n, x_{n-1}], \ldots, [x'_{m-1}, x'_m]$, avec les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$, intégrales des équations différentielles (3) aux conditions à la limite (6)—(11). On démontre que les fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_{n+2}(x), \ldots, \varphi_{n+m+1}(x)$ sont des polynômes du degré effectif $n+m-1$, ce qui permet d'en déduire ensuite que la fonction $\varphi(x)$ garde un signe constant dans l'intervalle $(x_n, x'_m)$. On obtient ainsi la forme (29) du reste, dont on déduit une limite supérieure de sa valeur absolue, $\rho(x_n, \ldots, x'_m)$, donnée par la formule (32), où $I$ est tiré de la formule (30).

On donne, comme un exemple simple, la formule de quadrature (40), pour laquelle l'une des limites supérieures de $|R|$ est donnée par la formule (41). On compare cette limite supérieure avec la limite supérieure $\rho_s$ donnée par la formule (46), relative à la formule de Simpson (45), ou bien avec la limite supérieure $\rho'$

donnée par la formule (49), relative à la formule de quadrature (48) à nœuds intérieurs. Les résultats de cette comparaison sont donnés par les formules (47) et (50), qui montrent que les formules de quadratures à nœuds intérieurs considérées dans ce travail sont préférables aux formules de quadratures à nœuds extérieurs.

Dans le § 2, on construit une autre formule de quadrature (53), toujours à nœuds extérieurs, auxquels on ajoute toutefois les nœuds $a$ et $b$. La construction est faite au moyen de la fonction $\varphi(x)$ qui coïncide avec les fonctions $\varphi_1(x),\ldots, \varphi_{n+m-1}(x)$ dans les intervalles $[x_{n-1}, x_{n-2}],\ldots, [x'_{m-2}, x'_{m-1}]$, intégrales des équations différentielles (54) aux conditions à la limite (55). Tout comme dans le § 1, on montre que la fonction $\varphi(x)$ a un signe constant dans l'intervalle $(x_{n-1}, x'_{m-1})$, ce qui permet d'étudier le reste comme au § 1. On donne comme exemples les formules de quadratures (68), (72), (73).

Dans le § 3, on construit la formule de quadrature (74) avec le nœud $a$ et des nœuds extérieurs à gauche de celui-ci et on démontre que le reste est de la forme (78), la fonction $\varphi(x)$ gardant un signe constant dans l'intervalle $(x_{n-1}, b)$.

Dans le § 4, on présente une application importante, en établissant la formule de quadrature (90) et son reste. On remarque que l'on est arrivé à cette formule sans avoir eu recours à la formule d'interpolation à gauche de Newton, ainsi qu'on procède d'ordinaire.

En comparant les limites supérieures $\rho_n$ de $|R|$, données par la formule (92), avec les limites supérieures de $|R'|$ ou $|R''|$ des formules de quadrature de Gauss, de la même précision, on a pu, pour $n = 1,2,\ldots, 10$, dresser le tableau (97). Les nombres de plus en plus grands de la dernière colonne de ce tableau, qui pour $n=10$ atteignent la valeur de 710 246 014 380, attirent l'attention sur la manière d'utiliser les formules de quadratures à nœuds extérieurs en progression arithmétique vers la gauche et permettent de conclure qu'il est préférable d'employer des formules de quadrature à nœuds intérieurs du type Gauss.

Dans le § 5, on présente une autre application importante, en établissant la formule de quadrature (108) à nœuds extérieurs symétriques par rapport à $x_0$ et en progression arithmétique, ce qui permet d'obtenir, en outre, son reste. La formule de quadrature a été établie sans avoir recours à la formule de quadrature de Bessel, ce qui est le procédé ordinaire. En comparant les limites supérieures $\rho_{2n}$ de $|R|$, données par la formule (109), avec les limites supérieures de $|R'|$ dans la formule de quadrature de Gauss, de la même précision, on a pu dresser, pour $n = 1,2,3,4,5$, le tableau (110). Des nombres de la dernière colonne de ce tableau, qui, pour $n=5$ atteignent rapidement la valeur de 391 528 613, le désavantage des formules de quadratures à nœuds extérieurs ressort clairement.

Si l'on compare le tableau (110) avec le tableau (97), on constate que les formules de quadrature à nœuds extérieurs, symétriques par rapport au milieu de l'intervalle d'intégration, sont préférables aux formules de quadrature à nœuds extérieurs à gauche.

Dans le § 6, on étudie sur un exemple l'influence des nœuds intérieurs sur la forme de la courbe $y = \varphi(x)$. L'étude porte sur la formule de quadrature (113), avec les nœuds, $a$, $a+h$ qui sont les extrémités de l'intervalle d'intégration, avec le nœud extérieur $a+2h$ et avec le nœud intérieur $a+\lambda h$. On étudie la forme de la courbe $y = \varphi(x)$ dans le cas où $\lambda$ varie de 0 à 1 et on obtient la figure 15. On fait ressortir les cas particuliers (116), (117), (118) dont l'explication est donnée dans le § 8.



Dans le § 7, on construit la formule de quadrature (119) avec les nœuds extérieurs $x'_1,\ldots,x'_n$, à gauche de $a$, $x''_1,\ldots,x''_m$ à droite de $b$ et avec les nœuds intérieurs $x_1,\ldots x_q$ considérés doubles. La formule (119), donnée par E. B. Christoffel [6], constitue une généralisation de la formule de Gauss. Des travaux relatifs à la généralisation de la formule de Gauss ont également été entrepris par T. Popoviciu [7], et D. D. Stancu a donné une généralisation de la formule de Christoffel [8], [9].

Dans ce travail, l'auteur étudie la formule de quadrature (119) et d'autre formules analogues, en tenant compte d'une application importante aux formules de quadrature déduites en général de la formule d'interpolation de Stirling.

La formule de quadrature (119) est construite au moyen de la fonction $\varphi(x)$ qui coïncide tour à tour avec les fonctions $\varphi_1(x),\ldots, \varphi_{n+m+q+1}(x)$ dans les intervalles $[x'_n, x'_{n-1}],\ldots, [x''_{m-1}, x''_m]$, intégrales des équations différentielles (120) aux conditions à la limite (121)—(124). On prouve que les nœuds $x_1,\ldots,x_q$ sont les racines réelles, distinctes et comprises entre $a$ et $b$ du polynôme $Q_q(x)$ donné par la formule (140). On démontre que le signe de la fonction $\varphi(x)$ est constant dans l'intervalle $(x'_n, x''_m)$, ce qui permet de mettre le reste sous la forme (151).

Dans le cas particulier où $p(x) = 1$, $q = 1$, et les nœuds extérieurs sont symétriques par rapport au milieu de l'intervalle $(a,b)$, on démontre que $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et l'on aboutit à la formule (154). On donne, pour exemple, la formule (161).

Dans le § 8, on reprend le problème étudié au § 7, en ajoutant les nœuds $a,b$, ou un seul de ces nœuds $a,b$. On obtient ainsi les formules (169), (172), (175), (178). A titre d'exemple, on indique les formules: (118), avec le nœud intérieur $a + \dfrac{7h}{15}$ considéré double, (117), avec le nœud intérieur $a + \dfrac{5h}{8}$ considéré double, (116), avec le nœud intérieur $a + \dfrac{3h}{10}$ considéré double. Ainsi s'expliquent les cas particuliers rencontrés dans le § 6 (n° 29).

Dans le § 9, on étudie les formules de quadrature avec les nœuds $a,b$, $\dfrac{a+b}{2}$ et des nœuds extérieurs symétriques par rapport au milieu de l'intervalle $(a,b)$ en progression arithmétique à la raison $h = \dfrac{b-a}{2}$.

On établit la formule de quadrature (185) et son reste. Il faut remarquer qu'on est arrivé à cette formule sans avoir eu recours à la formule d'interpolation de Stirling, ainsi qu'on le fait d'ordinaire. En comparant les limites supérieures $\rho$, données par la formule (187), avec les limites supérieures de $|R'|$ de la formule de quadrature de Gauss, de la même précision, on a pu dresser, pour $n = 1,2,3,4$, le tableau (188).

Les nombres de la dernière colonne de ce tableau montent vertigineusement, en indiquant ainsi que les formules de quadrature à nœuds intérieurs du type Gauss sont préférables, même aux formules de quadrature de la forme (185).

Dans le tableau (190), on a comparé les quotients $\frac{\rho_N}{\rho_G}$, $\frac{\rho_B}{\rho_G}$, $\frac{\rho_S}{\rho_G}$ relatifs aux limites supérieures de la valeur absolue des restes des formules (90), (108), (185) et de la formule de Gauss. Les nombres de la dernière colonne montrent que la formule de quadrature (185) est de beaucoup préférable aux formules (90) et (108).

## BIBLIOGRAFIE


1. D. V. Ionescu, *Formule de cuadratură cu noduri exterioare*, (sub tipar).
2. — *Cuadraturi numerice*. Ed. tehnică, București, 1957, cap. I, § 8; cap. II, § 5 și 6; cap. I, § 6.
3. C. E. Микеладзе, *Численные методы математического анализа*. Mockea, 328, 1953.
4. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Parte seconda, Bologna, 1949.
5. E. B. Christoffel, *Über die Gaussische Quadratur und eine Veralgemeinerung derselben*. Journ. f. reine u. angew. Math., **55**, 61—82 (1858).
6. T. Popoviciu, *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. Studii și cercetări științifice, Iași, **6**, 29—57 (1955).
7. D. D. Stancu, *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss-Cristoffel*. Studii și cercetări științifice, Iași, **8**, 1—18 (1957).
8. — *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*. Comunicările Acad. R.P.R., **8**, 349—358 (1958).