REZOLVAREA UNEI PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU ECUAȚIA BIARMONICĂ

DE

CAROL KALIK

Comunicare prezentată în ședința de comunicări a Institutului de calcul al Academiei R.P.R., Filiala Cluj, din noiembrie 1958

1. Începînd din anul 1948 a apărut o serie de lucrări ale lui G. Fichera, precum și ale altor matematicieni, în care se demonstrează completitatea unor mulțimi de funcții respectiv vectori, alese în așa fel încît cu ajutorul lor să putem construi soluția anumitor probleme la limită (vezi de exemplu lucrarea [1] sau [2]). Urmînd calea acestor lucrări, ne vom ocupa de rezolvarea unei probleme la limită legată de ecuația biarmonică.

Fie Ω un domeniu arbitrar, mărginit de curba Γ. Vom presupune că Γ poate fi împărțit într-un număr finit de porțiuni, în așa fel ca fiecare dintre acestea să se poată reprezenta în coordonate locale cu ajutorul unei funcții $y=\varphi(x)$, unde $\varphi(x)$ este continuă și derivata ei satisface condiției lui Lipschitz. De asemenea presupunem pozitivă raza de curbură ρ_0 a lui Γ. Studiem următoarea problemă la limită: să se determine funcția $u(x,y)$ în domeniul Ω în așa fel ca ea să satisfacă condițiilor

$$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \text{ în } \Omega, \tag{1}$$

$$u = f_1(s) \text{ pe } \Gamma, \tag{2}$$

$$-\Delta u + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(s) \text{ pe } \Gamma, \tag{2'}$$

unde $f_1(s)$ și $f_2(s)$ sînt funcții date, de patrat integrabile pe Γ, $0<\sigma<1$ fiind constanta lui Poisson, iar ν este normala interioară la Γ.

Vom rezuma pe scurt ideia urmată în rezolvarea acestei probleme. Să notăm cu $\{v_i\}$ un şir de funcţii biarmonice. Pe baza formulei lui Green avem

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v_i - \Delta u \frac{\partial v_i}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial \nu}\Delta v_i - u \frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu}\right) d\sigma = 0, \quad (i = 1,2,\ldots)$$

de unde, ţinînd seamă de (2) şi (2′), obţinem sistemul de ecuaţii integrale relativ la vectorul necunoscut $\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}, -\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right]$:

$$\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\left(-\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\right) - \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v_i\right] d\sigma =$$

$$= \int_{\Gamma}\left(f_2 \frac{\partial v_i}{\partial \nu} - f_1 \frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu}\right) d\sigma = C_i, \ (i = 1,2,\ldots). \tag{3}$$

Acest sistem de ecuaţii integrale este numit sistem Riesz-Fischer. Construind în aşa fel şirul de funcţii biarmonice $\{v_i\}$ ca şirul de vectori

$$\{\nu_i\} = \left\{-\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial v_i}{\partial \nu}, v_i\right\}, \ (i = 1,2,\ldots)$$

să fie ortogonal şi complet pe Γ în sensul lui Hilbert, din sistemul (3) obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\left(-\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\right) \quad \text{şi} \quad -\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i v_i \, ^{1)}.$$

Aceste serii converg în medie patratică pe Γ. Considerînd şi condiţiile la limită (2) şi (2′), cunoaştem pe Γ cele patru funcţii u, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, Δu şi $\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}$ cu ajutorul cărora putem scrie soluţia problemei la limită formulată, avînd în vedere formula bine cunoscută:

$$u(P) = \frac{1}{8\pi}\int_{\Gamma}\left(u \frac{\partial \Delta U}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Delta U + \Delta u \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} U\right) d\sigma,$$

unde $U = r \ln r$ este soluţia fundamentală a ecuaţiei biarmonice.

Menţionăm că această metodă, ideia căreia a fost elaborată de M. Picone, reprezintă un deosebit interes din punct de vedere practic, avînd avantaje faţă de majoritatea metodelor de rezolvare aproximativă a problemelor la limită. Anume, pentru calcularea soluţiilor aproximative avem de calculat valoarea integralelor pe frontieră Γ şi nu pe Ω. În afară de aceasta, funcţiile v_i, care intervin în calcule, sînt polinoame armonice şi biarmonice, respectiv combinaţiile lor, ceea ce de asemenea uşurează calculul.

---

1) Condiţia $\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 < \infty$ se îndeplineşte, vectorii $\left[\frac{\partial v_i}{\partial \nu}, -\frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu}\right]$ fiind de pătrat integrabile.

La punctul 5 al lucrării vom construi şirul $\{v_i\}$ în aşa fel ca ele să satisfacă condiţiilor de mai sus.

2. Păstrînd notaţiile, precum şi condiţiile asupra lui Γ, din punctul precedent, vom formula două teoreme care sînt consecinţe imediate ale rezultatelor lui G. Fichera [1].

Teorema 1. *Dacă* $\varphi_1(Q) \in L(\Gamma)$ *şi* $\varphi_2(Q) \in L(\Gamma)$[2], *atunci funcţia*

$$v(P) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q)\, U(P, Q)\, d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(P, Q)\, d\sigma$$

există aproape pentru fiecare $P \in \Gamma$ *şi este sumabilă pe* Γ.

Aproape pentru fiecare $M \in \Gamma$ *avem*

$$\lim v(P) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q)\, U(M, Q)\, d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(M, Q)\, d\sigma$$

şi

$$\lim \frac{\partial v(P)}{\partial \nu_M} = \pm \pi \varphi_2(M) + \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial \nu_M} d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_M} d\sigma \, ^{3)}$$

cînd $P \to M$ *pe normala la* Γ *în punctul* M, *iar limitele sînt funcţii sumabile pe* Γ.

Teorema 2. *Dacă* $\varphi_1(Q) \in L(\Gamma)$ *şi* $\varphi_2(Q) \in L(\Gamma)$, *atunci funcţia*

$$w(P) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial U(P, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(P, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma$$

există aproape pentru fiecare $P \in \Gamma$ *şi este sumabilă pe* Γ.

Aproape pentru fiecare $M \in \Gamma$ *avem*

$$\lim w(P) = \mp \pi \varphi_2(M) + \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma \, ^{4)}$$

cînd $P \to M$ *pe normala la* Γ *în punctul* M *şi funcţia la limită este sumabilă pe* Γ.

Observăm că limitele din aceste două teoreme există dacă punctul M este punct Lebesgue al funcţiilor $\varphi_1(Q)$ şi $\varphi_2(Q)$.

3. Introducem mulţimea funcţiilor $\{u\}$ definite pe domeniul Ω în felul următor: o funcţie u aparţine mulţimii $\{u\}$, dacă există două funcţii $\varphi_1(Q) \in L_2(\Gamma)$ şi $\varphi_2(Q) \in L_2(\Gamma)$ în aşa fel ca

$$u(P) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q)\, U(P, Q)\, d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(P, Q)\, d\sigma.$$

Mulţimea este caracterizată prin

---

2) În general notăm cu $L(D)$ mulţimea funcţiilor reale sumabile pe domeniul D, iar cu $L_2(D)$ mulţimea funcţiilor reale de pătrat integrabile pe D.

3) Considerăm semnul + cînd punctul P se află în interiorul domeniului Ω şi semnul − cînd P se află în exteriorul domeniului Ω.

4) Limitele sînt considerate cînd $P \to M$ pe normala la curba Γ în punctul M, ceea ce vom subînţelege şi în viitor fără ca să menţionăm special.

T e o r e m a 3. *Dacă* $u \in \{u\}$, *atunci*

a) *aproape pentru fiecare* $M \in \Gamma$ *au loc egalitățile*

$$\lim u(P) = \mu_1(M),$$

$$\lim \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_M} = \delta_1(M),$$

$$\lim \Delta u(P) = \mu_2(M),$$

$$\lim \frac{\partial \Delta u(P)}{\partial \nu_M} = \delta_2(M),$$

b) *pentru fiecare* $P \in \Omega$ *avem*

$$8\pi u(P) = \int_\Gamma \Big[\mu_1(Q) \frac{\partial \Delta U(P, Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_1(Q)\, \Delta U(P, Q) + \mu_2(Q) \frac{\partial U(P, Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_2(Q)\, U(P, Q) \Big] d\sigma \qquad (4)$$

c) *pentru fiecare* $P' \in C\Omega$ ($C\Omega$ *=mulțimea complementară a lui* Ω *relativă la planul întreg) avem*

$$0 = \int_\Gamma \Big[\mu_1(Q) \frac{\partial \Delta U(P', Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_1(Q)\, \Delta U(P', Q) + \mu_2(Q) \frac{\partial U(P', Q)}{\partial \upsilon_Q} - \delta_2(Q)\, U(P', Q) \Big] d\sigma. \qquad (5)$$

Invers, dacă $\mu_1, \delta_1, \mu_2, \delta_2 \in L_2(\Gamma)$ *și dacă aceste funcții satisfac condiția c, atunci funcția* $u(P)$ *din formula* (4) *aparține mulțimii* $\{u\}$.

Demonstrație. Fie $u \in \{u\}$. Pe baza teoremelor 1 și 2 avem

$$\mu_1(M) = \int_\Gamma \varphi_1(Q)\, U(M, Q)\, d\sigma + \int_\Gamma \varphi_2(Q) \ln r(M, Q)\, d\sigma,$$

$$\delta_1(M) = \pi \varphi_2(M) + \int_\Gamma \varphi_1(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial \nu_M} d\sigma + \int_\Gamma \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma,$$

$$\mu_2(M) = 4 \int_\Gamma \varphi_1(Q) \ln r(M, Q)\, d\sigma + 3 \int_\Gamma \varphi_1(Q)\, d\sigma,$$

$$\delta_2(M) = 4\pi \varphi_1(M) + 4 \int_\Gamma \varphi_1(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma.$$

Se observă că aceste funcții sînt de patrat integrabile. Înlocuind aceste expresii în partea a doua a egalității (4), pe care o notăm cu I, obținem

$$I = \int_\Gamma \varphi_1(Q) d\sigma \int_\Gamma \Big[U(M,Q) \frac{\partial \Delta U(P,M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial U(M,Q)}{\partial \nu_M} \Delta U(P,M) + 4 \ln r(M,Q) \frac{\partial U(P,M)}{\partial \nu_M} - 4 \frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M} U(P,M) \Big] d\sigma +$$

$$+ \int_\Gamma \varphi_2(Q) d\sigma \int_\Gamma \Big[\ln r(M,Q) \frac{\partial \Delta U(P,M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M} \Delta U(P,M) \Big] d\sigma +$$

$$+ 3 \int_\Gamma \frac{\partial U(P,M)}{\partial \nu_M} d\sigma \int_\Gamma \varphi_1(Q) d\sigma - 4\pi \int_\Gamma \varphi_1(Q) U(P,Q) d\sigma - \pi \int_\Gamma \varphi_2(Q) \Delta U(P,Q) d\sigma.$$

Pe de altă parte, fie Q' un punct pe normala exterioară la Γ în punctul Q. $U(P, Q')$ este o funcție biarmonică regulară cînd P aparține lui Ω, deci

$$8\pi U(P,Q') = \int_\Gamma \Big[U(M,Q') \frac{\partial \Delta U(P,M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial U(M,Q')}{\partial \nu_M} \Delta U(P,M) + \Delta U(M,Q') \frac{\partial U(P,M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial \Delta U(M,Q')}{\partial \nu_M} U(P,M) \Big] d\sigma.$$

Trecînd la limită cînd $Q' \to Q$, obținem

$$\int_\Gamma \Big[U(M, Q) \frac{\partial \Delta U(P,M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial U(M, Q')}{\partial \nu_M} \Delta U(P,M) + 4 \ln r(M,Q) \frac{\partial U(P,M)}{\partial \nu_M} - 4 \frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M} U(P,M) \Big] d\sigma = 12\pi U(P,Q) - 3 \int_\Gamma \frac{\partial U(P,M)}{\partial \nu_M} d\sigma.$$

În mod analog avem

$$\int_\Gamma \Big[\ln r(M,Q) \frac{\partial \Delta U(P,M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M} \Delta U(P,M) \Big] d\sigma = 8\pi \ln r(P,Q) + \pi \Delta U(P,Q).$$

Introducem aceste rezultate în expresia lui I, de unde

$$I = 8\pi u(P)$$

ceea ce înseamnă că condiția (4) este satisfăcută. La fel se verifică și egalitatea (5); punctul Q', care intervine aici în calculele ajutătoare, trebuie să fie pe normala interioară la Γ în punctul Q.

Trecem la demonstrația afirmației inverse. Fie μ_1, δ_1, μ_2 și $\delta \in L_2(\Gamma)$. Considerăm sistemul de ecuații integrale de tip Fredholm :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\delta_2(M) &= \varphi_1(M) + \frac{\lambda}{\pi}\int_\Gamma \varphi_1(Q)\frac{\delta \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M}d\sigma \\ \frac{1}{\pi}\delta_1(M) &= \varphi_2(M) + \frac{\lambda}{\pi}\int_\Gamma \varphi_1(Q)\frac{\partial U(M,Q)}{\partial \nu_M}d\sigma + \frac{\lambda}{\pi}\int_\Gamma \varphi_2(Q)\frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M}d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Vom arăta că acest sistem are o soluție $[\varphi_1, \varphi_2]$, și cu ajutorul ei funcția $u(P)$ poate fi reprezentată cu formula (3).

Paralel cu (6) să considerăm sistemul omogen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(M) &= -\frac{\lambda}{\pi}\int_\Gamma \varphi_1(Q)\frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M}d\sigma \\ \varphi_2(M) &= -\frac{\lambda}{\pi}\int_\Gamma \varphi_1(Q)\frac{\partial U(M,Q)}{\partial \nu_M}d\sigma - \frac{\lambda}{\pi}\int_\Gamma \varphi_2(Q)\frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M}d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

Pentru $\lambda=1$ sistemul (6′) are ca vector propriu numai pe $[0, \varphi_0]$, $\varphi_0(M)$ fiind unica funcție proprie a primei ecuații din sistemul (6′) pentru $\lambda=1$. Despre această ultimă afirmație ne putem convinge în felul următor: observăm că

$$\lim \frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M} = -\frac{\text{curbura în } M}{2}$$

cînd $Q \to M$, ceea ce înseamnă că $\dfrac{\delta \ln r(M,Q)}{\delta \nu_M}$ este continuă pe Γ, deci orice funcție proprie a ecuației satisface condiția lui Lipschitz [3].

Să presupunem acum că prima ecuație a sistemului (6′) are două funcții proprii liniar independente $g_1(M)$ și $g_2(M)$. Fie

$$V(P) = \int_\Gamma [C_1 \cdot g_1(Q) + C_2 g_2(Q)] \ln r(P,Q)\, d\sigma.$$

Dat fiindcă $\lim \dfrac{\partial V(P)}{\partial \nu_M} = 0$, avem $V(P) \equiv C$ pe $\Omega + \Gamma$. Alegem constantele C_1 și C_2 în așa fel ca să avem $V(P) \equiv 0$. Dar

$$\int_C\int_\Omega (\text{grad } V)^2 d\tau = \int_\Gamma V\frac{\partial V}{\partial \nu}d\sigma = 0$$

deci $V(P) \equiv 0$ în tot planul. Și în sfîrșit fie $P \in \Omega$ și $P' \in C\Omega$ atunci

$$\lim\left[\frac{\partial V(P)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial V(P')}{\partial \nu_M}\right] = 2\pi[C_1 g_1(M) + C_2 g_2(M)] = 0,$$

ceea ce este în contradicție cu ipoteza că funcțiile $g_1(M)$ și $g_2(M)$ sînt liniar independente. Trecem acum la verificarea primei afirmații. Fie $[\psi_1, \psi_2]$ un vector propriu oarecare al sistemului (6′) cînd $\lambda=1$. Este ușor de văzut că $\psi_1 \equiv 0$ și $\psi_2 = c\varphi_0$. Într-adevăr, pe baza celor de mai sus $\psi_1 = c\varphi_0$ și atunci

$$\varphi_2(M) = -\frac{c}{\pi}\int_\Gamma \varphi_0(Q)\frac{\partial U(M,Q)}{\partial \nu_M}d\sigma - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \varphi_2(Q)\frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_M}d\sigma.$$

Această ecuație are soluție numai dacă termenul liber este ortogonal pe funcția proprie unică a ecuației omogene conjugate, care în cazul de față este constanta. Deci trebuie să se îndeplinească egalitatea

$$\frac{c.K}{\pi}\int_\Gamma d\sigma\int_\Gamma \varphi_0(Q)\frac{\partial U(M,Q)}{\partial \nu_M}d\sigma = 0$$

sau

$$-\frac{c.K}{\pi}\int_C\int_\Omega d\tau\int_\Gamma \varphi_0(Q)\,\Delta U(P,Q)\,d\sigma = 0.$$

De aici urmează $c = 0$, fiindcă $\int_\Gamma \varphi_0(Q)\,\Delta U(P,Q)\,d\sigma \equiv$ constantă $\neq 0$. Ca urmare $\psi_1 \equiv 0$ și $\psi_2 = c\varphi_0$. Pe baza teoremelor lui Fredholm putem afirma că sistemul conjugat al lui (6′) are de asemenea un singur vector propriu, cînd $\lambda=1$. Imediat se observă că [1,0] este acest vector. Deci condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul (6) să aibă soluție este ca

$$\int_\Gamma \delta_2(Q)\,d\sigma = 0$$

iar soluția generală este

$$\varphi_1(M) = \varphi_1^*(M) \ ; \ \varphi_2(M) = \varphi_2^*(M) + c\varphi_0(M),$$

unde $[\varphi_1^*, \varphi_2^*]$ reprezintă o soluție particulară a sistemului (6).

Vom arăta că

$$u(P) = \int_\Gamma \varphi_1(Q)\,U(P,Q)\,d\sigma + \int_\Gamma \varphi_2(Q) \ln r(P,Q)\,d\sigma.$$

Într-adevăr, fie P_0 un punct arbitrar din domeniul Ω. Definim constanta c din condiția

$$u(P_0) = \int_\Gamma \varphi_1(Q)\,U(P_0,Q)\,d\sigma + \int_\Gamma \varphi_2(Q) \ln r(P_0,Q)\,d\sigma.$$

Notăm

$$v(P) = u(P) - \int_\Gamma \varphi_1(Q)\, U(P,Q)\, d\sigma - \int_\Gamma \varphi_2(Q) \ln r(P,Q)\, d\sigma.$$

Este evident că $v(P)\in\{u\}$ şi $\lim \frac{\partial v(P)}{\partial \nu_M} = \lim \frac{\partial \Delta v(P)}{\partial \nu_M} = 0.$ Notăm $\lim v(P) = \nu_1(M)$ şi $\lim \Delta \nu_2(P) = v_2(M)$. Folosind egalitatea (5) avem

$$\int_\Gamma \left[\nu_1(Q)\frac{\partial \Delta U(P',Q)}{\partial \nu_Q} + \nu_2(Q)\frac{\partial U(P',Q)}{\partial \nu_Q}\right] d\sigma = 0.$$

Dar aplicînd operatorul Δ la această egalitate obţinem

$$\int_\Gamma \nu_2(Q)\frac{\partial \ln r(P',Q)}{\partial \nu_Q}\, d\sigma = 0.$$

Trecînd la limită cînd $P' \to M$ pe normala în punctul M avem

$$4\pi\nu_1(M) = -4\int_\Gamma \nu_1(Q)\frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_Q}\, d\sigma - \int_\Gamma \nu_2(Q)\frac{\partial U(M,Q)}{\partial \nu_Q}\, d\sigma$$

respectiv

$$\pi\nu_2(M) = -\int_\Gamma \nu_2(Q)\frac{\partial \ln r(M,Q)}{\partial \nu_Q}\, d\sigma.$$

Făcînd abstracţie de un factor constant acest sistem coincide cu sistemul conjugat al lui (6). Deci singura soluţie este $[c,0]$. Aplicînd formula (4) găsim

$$v(P) = \frac{c}{8\pi}\int_\Gamma \frac{\partial \Delta U(P,Q)}{\partial \nu_Q}\, d\sigma = \frac{c}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial \ln r(P,Q)}{\partial \nu_Q}\, d\sigma = c, \quad (P\in\Omega)$$[5].

Dar $v(P_0) = 0$ deci $v(P)\equiv 0$, ceea ce demonstrează afirmaţia noastră.

L e m a 1. *Dacă* $u\in\{u\}$ *atunci*

$$\int_\Gamma \delta_2(Q)\, d\sigma = 0.$$

Demonstraţie. Aplicăm operatorul Δ egalităţii (5):

$$\int_\Gamma \left[\mu_2(Q)\frac{\partial \Delta U(P',Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_2(Q)\, \Delta U(P',Q)\right] d\sigma = 0.$$

[5]) În lema 1, care urmează, vom demonstra că această egalitate este îndeplinită pentru orice funcţie a mulţimii $\{u\}$.

Integrăm pe un cerc arbitrar C_R de rază R, care conţine domeniul Ω în interiorul său

$$\int_\Gamma \mu_2(Q)\, d\sigma \int_{C_R}\frac{\partial \Delta U(P',Q)}{\partial \nu_Q}\, d\sigma - \int_\Gamma \delta_2(Q)\, d\sigma \int_{C_R} \Delta U(P',Q)\, d\sigma = 0.$$

Dar $\int_{C_R} \Delta U(P',Q)\, d\sigma = \int_{C_R} [4\ln r(P',Q) + 3]\, d\sigma \equiv$ constantă pe Γ, fiindcă $\int_{C_R} \ln r(P',Q)\, d\sigma \equiv c$ în interiorul cercului. De aici urmează şi $\int_{C_R}\frac{\partial \Delta U(P',Q)}{\partial \nu_Q}\, d\sigma = 0$ prin urmare $\int_\Gamma \delta_2(Q)\, d\sigma = 0.$

4. Vom demonstra unicitatea soluţiei problemei la limită propuse la punctul **2**, relativ la elementele mulţimii $\{u\}$.

Introducem funcţionala

$$F(u) = \int_\Gamma (\mu_1\delta_2 - \mu_2\delta_1)\, d\sigma + (1-\sigma)\int_\Gamma \delta_1^2\, d\sigma \tag{7}$$

definită pe elementele mulţimii $\{u\}$. $F(u)$ este o funcţională pozitivă, ceea ce este evident dacă în prealabil observăm că

$$\int_\Gamma (\mu_1\delta_2 - \mu_2\delta_1)\, d\sigma = \iint_\Omega (\Delta u)^2 d\sigma.$$

Dar această ultimă egalitate se poate verifica înlocuind în membrul întîi expresiile funcţiilor μ_1, δ_1, μ_2, δ_2 şi efectuînd calcule simple urmînd calea demonstraţiei teoremei 3.

T e o r e m a 4. *Dacă* $u\in\{u\}$ *şi*

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma$$

$$-\Delta u + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ pe } \Gamma$$

atunci $u\equiv 0$ *în* Ω.

Demonstraţie. Evident $F(u)=0$, de unde urmează

$$\iint_\Omega (\Delta u)^2 d\tau = 0 \text{ şi } \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\sigma = 0.$$

Deci $\Delta u = 0$ în Ω şi $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ pe Γ. Aceasta înseamnă că u este soluţia problemei lui Neumann cu condiţia $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ pe frontieră; deci $u\equiv c$ în Ω, şi fiindcă condiţia teoremei impune ca $u=0$ pe Γ, urmează $u\equiv 0$.

5. Fie $P(\rho,\varphi)$ şi $Q(\rho',\varphi')$ două puncte în plan. Este bine cunoscută formula

$$\ln r(P,Q) = \ln\rho' - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\rho^n}{\rho'^n}\cos n(\varphi-\varphi').$$

Cu ajutorul ei obţinem

$$r^2\ln r = \ln\rho'(\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\gamma)+\rho^2-\rho\rho'\cos\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\frac{\rho^{n+2}}{\rho'^n}\cos n\gamma+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}\frac{\rho^n}{\rho'^{n-2}}\cos n\gamma,$$

unde $\gamma=\varphi-\varphi'$. Dacă introducem următoarele notaţii

$$\alpha_1=-\rho\begin{cases}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{cases};\quad \alpha_n=\frac{1}{n(n-1)}\rho^n\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}\quad (n=2,3,\ldots),$$

$$\beta_0=\rho^2;\quad \beta_n=-\frac{1}{n(n+1)}\rho^{n+2}\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}\quad (n=1,2,\ldots),$$

$$\gamma_n=\rho'^{-n}\begin{cases}\cos n\varphi'\\ \sin n\varphi'\end{cases}\quad (n=0,1,\ldots),$$

$$\delta_n=\rho'^{n-2}\begin{cases}\cos n\varphi'\\ \sin n\varphi'\end{cases}\quad (n=1,2,\ldots).$$

Cu ajutorul lor putem scrie

$$r^2\ln r=\beta_0\ln\rho'+\rho'^2\ln\rho+2\alpha_1\delta_1\ln\rho'+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\gamma_n+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\delta_n.$$

Pentru a uşura calculele ce urmează, introducem notări prescurtate

$$P(u)=\mu_1(Q)-\delta_1(Q)+\mu_2(Q)-\delta_2(Q);\quad G(v)=\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu_Q}+\Delta v+\frac{\partial v}{\partial\nu}+v$$

iar

$$P(u).\,G(v)=\mu_1\frac{\partial\Delta v}{\partial\nu_Q}-\delta_1\Delta v+\mu_2\frac{\partial v}{\partial\nu_Q}+\delta_2 v.$$

Înlocuind în formula (5) $U=r^2\ln r$ prin şirul ei de mai sus şi folosind notaţiile prescurtate, egalitatea (5) se poate scrie

$$\ln\rho'\int_\Gamma P(u)\cdot G(\beta_0)\,d\sigma+2\delta_1\ln\rho'\int_\Gamma P(u)\,G(\alpha_1)\,d\sigma+\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\int_\Gamma P(u)\cdot G(\beta_n)\,d\sigma+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\int_\Gamma P(u)\,G(\alpha_n)\,d\sigma=0, \tag{8}$$

care este valabilă pentru fiecare punct exterior faţă de un cerc care conţine în interiorul său pe Ω. Fie C_R un asemenea cerc fixat. Dat fiindcă pe C_R şirul de funcţii 1, $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$, $\sin 2\varphi'$, $\cos 2\varphi'$,... este complet, din egalitatea (8) urmează

$$\int_\Gamma P(u)\,G(\beta_0)\,d\sigma+\ln R\int_\Gamma P(u)\,G(\beta_0)\,d\sigma=0.$$

$$2R^2\ln R\int_\Gamma P(u)\,G(\alpha_1)\,d\sigma+\int_\Gamma P(u)\,G(\beta_1)\,d\sigma+R\int_\Gamma P(u)\,G(\alpha_1)\,d\sigma=0$$

$$\int_\Gamma P(u)\,G(\beta_n)\,d\sigma+R^2\int_\Gamma P(u)\,G(\alpha_n)\,d\sigma=0\qquad(n=2,3,\ldots).$$

Dar acest sistem este valabil şi pentru orice $R_1>R$, de unde rezultă

$$\int_\Gamma P(u)\,G(\alpha_n)\,d\sigma=0,\qquad(n=1,2,\ldots),$$

$$\int_\Gamma P(u)\,G(\beta_n)\,d\sigma=0,\qquad(n=0,1,\ldots),$$

sau notînd cu $\{v_n\}$ şirul $\{\alpha_n\}\,U\,\{\beta_n\}$:

$$\int_\Gamma P(u)\,G(v_n)\,d\sigma=0,\qquad(n=1,2,\ldots). \tag{9}$$

Din cele de mai sus rezultă că sistemul (9) reprezintă condiţia necesară pentru ca $u\in\{u\}$. Relaţia (9) reprezintă totodată şi condiţia suficientă. Într-adevăr, fie μ_1, δ_1, μ_2, $\delta_2\in L_2(\Gamma)$; funcţia

$$w(P')=\int_\Gamma\Big[\mu_1(Q)\frac{\partial\Delta U(P',Q)}{\partial\nu_Q}-\delta_1(Q)\,\Delta U(P',Q)+\mu_2(Q)\frac{\partial U(P',Q)}{\partial\nu_Q}-$$

$$-\delta_2(Q)\,U(P',Q)\Big]\,d\sigma$$

este biarmonică în $C\Omega$. Însă din (9) urmează $w(P')\equiv 0$ în exteriorul cercului C_R ceeace înseamnă că $w(P')\equiv 0$ şi în $C\Omega$.

Rezultatul final este formulat în teorema următoare:

T e o r e m a 5. *Şirul de vectori* $\{\psi_i\}=\left\{v_i-\Delta v_i+\frac{1-\sigma}{\rho}\frac{\partial v_i}{\partial\nu}\right\}$ *este complet în sensul lui Hilbert pe* Γ.

Demonstraţie. Fie φ un vector ortogonal pe toate elementele şirului $\{\psi_i\}$. Componentele vectorului φ le vom nota în felul următor: $\varphi=[-\delta_2,\delta_1]$. Condiţia de ortogonalitate este

$$\int_\Gamma\left[-\delta_2 v_i-\delta_1\Delta v_i+\frac{1-\sigma}{\rho_0}\delta_1\frac{\partial v_i}{\partial\nu}\right]d\sigma=0,\qquad(i=1,2,\ldots).$$

Dacă considerăm $\mu_1 \equiv 0$ şi $\mu_2 = \frac{1-\sigma}{\rho_0}\delta_1$, atunci egalităţile precedente coincid cu (9), deci

$$u(P) = \frac{1}{8\pi}\int_{\Gamma}\left[\frac{1-\sigma}{\rho_0}\delta_1(Q)\frac{\partial U(P,Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_1(Q)\,\Delta U(P,Q) - \delta_2 U(P,Q)\right] d\sigma \in \{u\}.$$

Avem

$$\lim u(P) = 0, \qquad \lim \Delta u(P) = \frac{1-\sigma}{\rho_0}\delta_1(M), \quad \lim \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_M} = \delta_1(M)$$

şi $\lim \frac{\partial \Delta u(P)}{\partial \nu_M} = \delta_2(M)$, toate considerate cînd $P \to M \in \Gamma$ pe normală.

Observînd că

$$\lim\left[-\Delta u + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial \nu_M}\right] = -\frac{1-\sigma}{\rho_0}\delta_1 + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\delta_1 = 0$$

şi

$$\lim u = 0$$

pe baza teoremei de unicitate urmează $u \equiv 0$, deci $\frac{\partial u}{\partial \nu_M} = \delta_1 = 0$ şi $\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = \delta_2 = 0$ pe Γ ceea ce înseamnă $\varphi \equiv 0$.

Institutul de calcul
al Academiei R.P.R., Filiala Cluj

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Обозначим через Ω плоскую область, ограниченную замкнутой кривой Γ. Предполагаем, что радиус кривизны ρ_0 кривой Γ является положительной функцией и что Γ является достаточно гладкой.

В данной работе доказывается, что последовательность вектор-функций

$$\left\{v_i, -\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\right\}$$

является полной в среднем по кривой Γ. Здесь

$$\{v_n\} = \{\alpha_n\}\, U\,\{\beta_n\}$$

и

$$\alpha_1 = -\rho\begin{cases}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{cases};\ \alpha_n = \frac{1}{n(n-1)}\rho^n\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}(n=2,3,\ldots);\ \gamma_n = \rho'^{-n}\begin{cases}\cos n\varphi'\\ \sin n\varphi'\end{cases},(n=0,1,\ldots)$$

$$\beta_0 = \rho^2;\ \beta_n = -\frac{1}{n(n+1)}\rho^{n+2}\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}(n=1,2,\ldots);\ \delta_n = \rho'^{n-2}\begin{cases}\cos n\varphi'\\ \sin n\varphi'\end{cases},(n=1,2,\ldots),$$

где ρ и φ обозначают полярные координаты, центр которых помещается внутри области Ω, σ — постоянная величина Пуассона и ν обозначает внутреннюю нормаль. При доказательстве приведенного утверждения были использованы некоторые идеи работ [1] и [2].

Полная последовательность векторов

$$\left\{v_i, -\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\right\}$$

служит для решения следующей задачи: в области Ω ищется такая функция $u(x,y)$, для которой

$$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$u = f_1$$

и

$$-\Delta u + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2$$

на Γ, где f_1 и f_2 — данные квадратично суммируемые функции на Γ.

LA SOLUTION D'UN PROBLÈME AUX LIMITES POUR L'ÉQUATION BIHARMONIQUE

RÉSUMÉ

Soit Ω un domaine borné par la courbe Γ. On suppose que la courbe Γ admet le rayon de courbure ρ_0 positif et, en outre, que cette courbe est suffisamment lisse.

Dans ce travail, on démontre que la succession des vecteurs

$$\left\{v_i, -\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\right\}$$

est complète au sens de Hilbert sur Γ, où

$$\{v_n\} = \{\alpha_n\}\, U\, \{\beta_n\} \text{ et}$$

$$\alpha_1 = -\rho \begin{cases}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{cases};\ \alpha_n = \frac{1}{n(n-1)}\rho^n \begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}(n=2,3,\ldots);\ \gamma_n = \rho'^{-n}\begin{cases}\cos n\varphi'\\ \sin n\varphi'\end{cases}(n=0,1,\ldots),$$

$$\beta_0 = \rho^2;\quad \beta_n = -\frac{1}{n(n+1)}\rho^{n+2}\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases}(n=1,2,\ldots);\ \delta_n = \rho'^{n-2}\begin{cases}\cos n\varphi'\\ \sin n\varphi'\end{cases}(n=1,2,\ldots),$$

où ρ et φ sont les coordonnées polaires dont le centre est situé à l'intérieur du domaine Ω; σ est la valeur constante de Poisson; ν désigne la normale intérieure par rapport à Γ. Pour démontrer cette affirmation, l'auteur se base sur quelques idées des travaux [1] et [2].

La succession complète des vecteurs $\left\{v_i,\ -\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\right\}$ sert à résoudre le problème suivant: dans le domaine Ω on cherche la fonction $u(x,y)$ pour laquelle

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$u = f_1 \text{ et } -\Delta u + \frac{1-\sigma}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{sur } \Gamma,$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions données sur Γ, sommables en carrés.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Fichera, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni.* Ann. Mat. pura e appl., **27**, 1–28 (1948).
2. — *Teoremi di completezza connessi all' integrazione dell'equazione $\Delta_4 u = f$.* Giornale Mat. Battaglini, **77**, 184–199 (1947–1948).
3. Н. М. Гюнтер, *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.* Москва, 58—59 (1953).