

Rezolvarea unei probleme la limită pentru ecuația biarmonică

1. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 1-10.

2. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 11-18.

3. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 19-26.

4. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 27-34.

5. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 35-42.

6. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 43-50.

7. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 51-58.

8. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 59-66.

9. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 67-74.

10. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 75-82.

BIBLIOGRAFIE

1. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 1-10.

2. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 11-18.

3. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 19-26.

4. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 27-34.

5. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 35-42.

6. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 43-50.

7. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 51-58.

8. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 59-66.

9. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 67-74.

10. A. I. KALIK, *Travaux de l'Institut de calcul de l'Académie R.P.R.*, Cluj, 1958, t. 1, p. 75-82.

REZOLVAREA UNEI PROBLEME LA LIMITĂ PENTRU ECUAȚIA BIARMONICĂ

DE
CAROL KALIK

*Comunicare prezentată în ședința de comunicări a Institutului de calcul al Academiei R.P.R.,
Filiala Cluj, din noiembrie 1958*

1. Începînd din anul 1948 a apărut o serie de lucrări ale lui G. F i c h e r a, precum și ale altor matematicieni, în care se demonstrează completitatea unor mulțimi de funcții respectiv vectori, alese în așa fel încît cu ajutorul lor să putem construi soluția anumitor probleme la limită (vezi de exemplu lucrarea [1] sau [2]). Urmînd calea acestor lucrări, ne vom ocupa de rezolvarea unei probleme la limită legată de ecuația biarmonică.

Fie Ω un domeniu arbitrar, mărginit de curba Γ . Vom presupune că Γ poate fi împărțit într-un număr finit de porțiuni, în așa fel ca fiecare dintre acestea să se poată reprezenta în coordonate locale cu ajutorul unei funcții $y=\varphi(x)$, unde $\varphi(x)$ este continuă și derivata ei satisface condiției lui Lipschitz. De asemenea presupunem pozitivă raza de curbură ρ_0 a lui Γ . Studiem următoarea problemă la limită: să se determine funcția $u(x,y)$ în domeniul Ω în așa fel ca ea să satisfacă condițiilor

$$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \text{ în } \Omega, \tag{1}$$

$$u = f_1(s) \text{ pe } \Gamma, \tag{2}$$

$$-\Delta u + \frac{1-\sigma}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2(s) \text{ pe } \Gamma, \tag{2'}$$

unde $f_1(s)$ și $f_2(s)$ sînt funcții date, de patrat integrabile pe Γ , $0 < \sigma < 1$ fiind constanta lui Poisson, iar ν este normala interioară la Γ .

Vom rezuma pe scurt ideea urmată în rezolvarea acestei probleme. Să notăm cu $\{v_i\}$ un șir de funcții biarmonice. Pe baza formulei lui Green avem

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v_i - \Delta u \frac{\partial v_i}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta v_i - u \frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

de unde, ținând seamă de (2) și (2'), obținem sistemul de ecuații integrale relativ la vectorul necunoscut $\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}, -\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \right]$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} \left(-\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial \nu} \right) - \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} v_i \right] d\sigma = \\ & = \int_{\Gamma} \left(f_2 \frac{\partial v_i}{\partial \nu} - f_1 \frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu} \right) d\sigma = C_i, \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

Acest sistem de ecuații integrale este numit sistem Riesz-Fischer. Construind în așa fel șirul de funcții biarmonice $\{v_i\}$ ca șirul de vectori

$$\{v_i\} = \left\{ -\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0} \frac{\partial v_i}{\partial \nu}, v_i \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

să fie ortogonal și complet pe Γ în sensul lui Hilbert, din sistemul (3) obținem

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \left(-\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0} \frac{\partial v_i}{\partial \nu} \right) \quad \text{și} \quad -\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i v_i^{1)}$$

Aceste serii converg în medie patrată pe Γ . Considerînd și condițiile la limită (2) și (2'), cunoaștem pe Γ cele patru funcții $u, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \Delta u$ și $\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}$ cu ajutorul cărora putem scrie soluția problemei la limită formulată, avînd în vedere formula bine cunoscută:

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial \Delta U}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \Delta U + \Delta u \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} U \right) d\sigma,$$

unde $U = r \ln r$ este soluția fundamentală a ecuației biarmonice.

Menționăm că această metodă, ideea căreia a fost elaborată de M. Picone, reprezintă un deosebit interes din punct de vedere practic, avînd avantaje față de majoritatea metodelor de rezolvare aproximativă a problemelor la limită. Anume, pentru calcularea soluțiilor aproximative avem de calculat valoarea integralelor pe frontieră Γ și nu pe Ω . În afară de aceasta, funcțiile v_i , care intervin în calcule, sînt polinoame armonice și biarmonice, respectiv combinațiile lor, ceea ce de asemenea ușurează calculul.

¹⁾ Condiția $\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 < \infty$ se îndeplinește, vectorii $\left[\frac{\partial v_i}{\partial \nu}, -\frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu} \right]$ fiind de pătrat integrabile.

La punctul 5 al lucrării vom construi șirul $\{v_i\}$ în așa fel ca ele să satisfacă condițiilor de mai sus.

2. Păstrînd notațiile, precum și condițiile asupra lui Γ , din punctul precedent, vom formula două teoreme care sînt consecințe imediate ale rezultatelor lui G. Fichera [1].

Teorema 1. Dacă $\varphi_1(Q) \in L(\Gamma)$ și $\varphi_2(Q) \in L(\Gamma)^2$, atunci funcția

$$v(P) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) U(P, Q) d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(P, Q) d\sigma$$

există aproape pentru fiecare $P \in \Gamma$ și este sumabilă pe Γ .

Proape pentru fiecare $M \in \Gamma$ avem

$$\lim v(P) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) U(M, Q) d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(M, Q) d\sigma$$

și

$$\lim \frac{\partial v(P)}{\partial \nu_M} = \pm \pi \varphi_2(M) + \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial \nu_M} d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_M} d\sigma^3)$$

cînd $P \rightarrow M$ pe normala la Γ în punctul M , iar limitele sînt funcții sumabile pe Γ .

Teorema 2. Dacă $\varphi_1(Q) \in L(\Gamma)$ și $\varphi_2(Q) \in L(\Gamma)$, atunci funcția

$$w(P) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial U(P, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(P, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma$$

există aproape pentru fiecare $P \in \Gamma$ și este sumabilă pe Γ .

Proape pentru fiecare $M \in \Gamma$ avem

$$\lim w(P) = \mp \pi \varphi_2(M) + \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma^4)$$

cînd $P \rightarrow M$ pe normala la Γ în punctul M și funcția la limită este sumabilă pe Γ .

Observăm că limitele din aceste două teoreme există dacă punctul M este punct Lebesgue al funcțiilor $\varphi_1(Q)$ și $\varphi_2(Q)$.

3. Introducem mulțimea funcțiilor $\{u\}$ definite pe domeniul Ω în felul următor: o funcție u aparține mulțimii $\{u\}$, dacă există două funcții $\varphi_1(Q) \in L_2(\Gamma)$ și $\varphi_2(Q) \in L_2(\Gamma)$ în așa fel ca

$$u(P) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) U(P, Q) d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(P, Q) d\sigma.$$

Mulțimea este caracterizată prin

²⁾ În general notăm cu $L(D)$ mulțimea funcțiilor reale sumabile pe domeniul D , iar cu $L_2(D)$ mulțimea funcțiilor reale de pătrat integrabile pe D .

³⁾ Considerăm semnul + cînd punctul P se află în interiorul domeniului Ω și semnul - cînd P se află în exteriorul domeniului Ω .

⁴⁾ Limitele sînt considerate cînd $P \rightarrow M$ pe normala la curba Γ în punctul M , ceea ce vom subînțelege și în viitor fără ca să menționăm special.

Teorema 3. Dacă $u \in \{u\}$, atunci

a) aproape pentru fiecare $M \in \Gamma$ au loc egalitățile

$$\lim u(P) = \mu_1(M),$$

$$\lim \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_M} = \delta_1(M),$$

$$\lim \Delta u(P) = \mu_2(M),$$

$$\lim \frac{\partial \Delta u(P)}{\partial \nu_M} = \delta_2(M),$$

b) pentru fiecare $P \in \Omega$ avem

$$8\pi u(P) = \int_{\Gamma} \left[\mu_1(Q) \frac{\partial \Delta U(P, Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_1(Q) \Delta U(P, Q) + \mu_2(Q) \frac{\partial U(P, Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_2(Q) U(P, Q) \right] d\sigma \quad (4)$$

c) pentru fiecare $P' \in C\Omega$ ($C\Omega =$ mulțimea complementară a lui Ω relativă la planul întreg) avem

$$0 = \int_{\Gamma} \left[\mu_1(Q) \frac{\partial \Delta U(P', Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_1(Q) \Delta U(P', Q) + \mu_2(Q) \frac{\partial U(P', Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_2(Q) U(P', Q) \right] d\sigma. \quad (5)$$

Invers, dacă $\mu_1, \delta_1, \mu_2, \delta_2 \in L_2(\Gamma)$ și dacă aceste funcții satisfac condiția c, atunci funcția $u(P)$ din formula (4) aparține mulțimii $\{u\}$.

Demonstrație. Fie $u \in \{u\}$. Pe baza teoremelor 1 și 2 avem

$$\mu_1(M) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) U(M, Q) d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(M, Q) d\sigma,$$

$$\delta_1(M) = \pi \varphi_2(M) + \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial \nu_M} d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma,$$

$$\mu_2(M) = 4 \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \ln r(M, Q) d\sigma + 3 \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) d\sigma,$$

$$\delta_2(M) = 4\pi \varphi_1(M) + 4 \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_Q} d\sigma.$$

Se observă că aceste funcții sînt de patrat integrabile. Înlocuind aceste expresii în partea a doua a egalității (4), pe care o notăm cu I , obținem

$$I = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) d\sigma \int_{\Gamma} \left[U(M, Q) \frac{\partial \Delta U(P, M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial U(M, Q)}{\partial \nu_M} \Delta U(P, M) + 4 \ln r(M, Q) \frac{\partial U(P, M)}{\partial \nu_M} - 4 \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_M} U(P, M) \right] d\sigma + \\ + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) d\sigma \int_{\Gamma} \left[\ln r(M, Q) \frac{\partial \Delta U(P, M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_M} \Delta U(P, M) \right] d\sigma + \\ + 3 \int_{\Gamma} \frac{\partial U(P, M)}{\partial \nu_M} d\sigma \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) d\sigma - 4\pi \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) U(P, Q) d\sigma - \pi \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \Delta U(P, Q) d\sigma.$$

Pe de altă parte, fie Q' un punct pe normala exterioară la Γ în punctul Q . $U(P, Q')$ este o funcție biarmonică regulată cînd P aparține lui Ω , deci

$$8\pi U(P, Q') = \int_{\Gamma} \left[U(M, Q') \frac{\partial \Delta U(P, M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial U(M, Q')}{\partial \nu_M} \Delta U(P, M) + \Delta U(M, Q') \frac{\partial U(P, M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial \Delta U(M, Q')}{\partial \nu_M} U(P, M) \right] d\sigma.$$

Trecînd la limită cînd $Q' \rightarrow Q$, obținem

$$\int_{\Gamma} \left[U(M, Q) \frac{\partial \Delta U(P, M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial U(M, Q)}{\partial \nu_M} \Delta U(P, M) + 4 \ln r(M, Q) \frac{\partial U(P, M)}{\partial \nu_M} - 4 \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_M} U(P, M) \right] d\sigma = 12\pi U(P, Q) - 3 \int_{\Gamma} \frac{\partial U(P, M)}{\partial \nu_M} d\sigma.$$

În mod analog avem

$$\int_{\Gamma} \left[\ln r(M, Q) \frac{\partial \Delta U(P, M)}{\partial \nu_M} - \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial \nu_M} \Delta U(P, M) \right] d\sigma = 8\pi \ln r(P, Q) + \pi \Delta U(P, Q).$$

Introducem aceste rezultate în expresia lui I , de unde

$$I = 8\pi u(P)$$

ceea ce înseamnă că condiția (4) este satisfăcută. La fel se verifică și egalitatea (5); punctul Q' , care intervine aici în calculele ajutoare, trebuie să fie pe normala interioară la Γ în punctul Q .

Trecem la demonstrația afirmației inverse. Fie μ_1, δ_1, μ_2 și $\delta \in L_2(\Gamma)$. Considerăm sistemul de ecuații integrale de tip Fredholm :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \delta_2(M) &= \varphi_1(M) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\delta \ln r(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma \\ \frac{1}{\pi} \delta_1(M) &= \varphi_2(M) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma + \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma. \end{aligned} \right\} (6)$$

Vom arăta că acest sistem are o soluție $[\varphi_1, \varphi_2]$, și cu ajutorul ei funcția $u(P)$ poate fi reprezentată cu formula (3).

Paralel cu (6) să considerăm sistemul omogen

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(M) &= -\frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma \\ \varphi_2(M) &= -\frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma - \frac{\lambda}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma. \end{aligned} \right\} (6')$$

Pentru $\lambda=1$ sistemul (6') are ca vector propriu numai pe $[0, \varphi_0]$, $\varphi_0(M)$ fiind unica funcție proprie a primei ecuații din sistemul (6') pentru $\lambda=1$. Despre această ultimă afirmație ne putem convinge în felul următor: observăm că

$$\lim_{Q \rightarrow M} \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial v_M} = -\frac{\text{curbura în } M}{2}$$

când $Q \rightarrow M$, ceea ce înseamnă că $\frac{\delta \ln r(M, Q)}{\partial v_M}$ este continuă pe Γ , deci orice funcție

proprie a ecuației satisface condiția lui Lipschitz [3].

Să presupunem acum că prima ecuație a sistemului (6') are două funcții proprii liniar independente $g_1(M)$ și $g_2(M)$. Fie

$$V(P) = \int_{\Gamma} [C_1 g_1(Q) + C_2 g_2(Q)] \ln r(P, Q) d\sigma.$$

Dat fiindcă $\lim_{P \rightarrow M} \frac{\partial V(P)}{\partial v_M} = 0$, avem $V(P) \equiv C$ pe $\Omega + \Gamma$. Alegem constantele C_1

și C_2 în așa fel ca să avem $V(P) \equiv 0$. Dar

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} (\text{grad } V)^2 d\tau = \int_{\Gamma} V \frac{\partial V}{\partial v} d\sigma = 0$$

deci $V(P) \equiv 0$ în tot planul. Și în sfârșit fie $P \in \Omega$ și $P' \in C\Omega$ atunci

$$\lim \left[\frac{\partial V(P)}{\partial v_M} - \frac{\partial V(P')}{\partial v_M} \right] = 2\pi [C_1 g_1(M) + C_2 g_2(M)] = 0,$$

ceea ce este în contradicție cu ipoteza că funcțiile $g_1(M)$ și $g_2(M)$ sînt liniar independente. Trecem acum la verificarea primei afirmații. Fie $[\psi_1, \psi_2]$ un vector propriu oarecare al sistemului (6') când $\lambda=1$. Este ușor de văzut că $\psi_1 \equiv 0$ și $\psi_2 = c\varphi_0$. Într-adevăr, pe baza celor de mai sus $\psi_1 = c\varphi_0$ și atunci

$$\varphi_2(M) = -\frac{c}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_0(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma.$$

Această ecuație are soluție numai dacă termenul liber este ortogonal pe funcția proprie unică a ecuației omogene conjugate, care în cazul de față este constanta. Deci trebuie să se îndeplinească egalitatea

$$\frac{c}{\pi} K \int_{\Gamma} d\sigma \int_{\Gamma} \varphi_0(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial v_M} d\sigma = 0$$

sau

$$-\frac{c}{\pi} K \iint_{\Omega} d\tau \int_{\Gamma} \varphi_0(Q) \Delta U(P, Q) d\sigma = 0.$$

De aici urmează $c=0$, fiindcă $\int_{\Gamma} \varphi_0(Q) \Delta U(P, Q) d\sigma \equiv \text{constantă} \neq 0$. Ca urmare

$\psi_1 \equiv 0$ și $\psi_2 = c\varphi_0$. Pe baza teoremelor lui Fredholm putem afirma că sistemul conjugat al lui (6') are de asemenea un singur vector propriu, când $\lambda=1$. Imediat se observă că $[1, 0]$ este acest vector. Deci condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul (6) să aibă soluție este ca

$$\int_{\Gamma} \delta_2(Q) d\sigma = 0$$

iar soluția generală este

$$\varphi_1(M) = \varphi_1^*(M) ; \varphi_2(M) = \varphi_2^*(M) + c\varphi_0(M),$$

unde $[\varphi_1^*, \varphi_2^*]$ reprezintă o soluție particulară a sistemului (6).

Vom arăta că

$$u(P) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) U(P, Q) d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(P, Q) d\sigma.$$

Într-adevăr, fie P_0 un punct arbitrar din domeniul Ω . Definim constanta c din condiția

$$u(P_0) = \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) U(P_0, Q) d\sigma + \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(P_0, Q) d\sigma.$$

Notăm

$$v(P) = u(P) - \int_{\Gamma} \varphi_1(Q) U(P, Q) d\sigma - \int_{\Gamma} \varphi_2(Q) \ln r(P, Q) d\sigma.$$

Este evident că $v(P) \in \{u\}$ și $\lim_{\partial v_M} \frac{\partial v(P)}{\partial v_M} = \lim_{\partial v_M} \frac{\partial \Delta v(P)}{\partial v_M} = 0$. Notăm $\lim v(P) = v_1(M)$ și $\lim \Delta v_2(P) = v_2(M)$. Folosind egalitatea (5) avem

$$\int_{\Gamma} \left[v_1(Q) \frac{\partial \Delta U(P', Q)}{\partial v_Q} + v_2(Q) \frac{\partial U(P', Q)}{\partial v_Q} \right] d\sigma = 0.$$

Dar aplicînd operatorul Δ la această egalitate obținem

$$\int_{\Gamma} v_2(Q) \frac{\partial \ln r(P', Q)}{\partial v_Q} d\sigma = 0.$$

Trecînd la limită cînd $P' \rightarrow M$ pe normala în punctul M avem

$$4\pi v_1(M) = -4 \int_{\Gamma} v_1(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial v_Q} d\sigma - \int_{\Gamma} v_2(Q) \frac{\partial U(M, Q)}{\partial v_Q} d\sigma$$

respectiv

$$\pi v_2(M) = - \int_{\Gamma} v_2(Q) \frac{\partial \ln r(M, Q)}{\partial v_Q} d\sigma.$$

Făcînd abstracție de un factor constant acest sistem coincide cu sistemul conjugat al lui (6). Deci singura soluție este $[c, 0]$. Aplicînd formula (4) găsim

$$v(P) = \frac{c}{8\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta U(P, Q)}{\partial v_Q} d\sigma = \frac{c}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \ln r(P, Q)}{\partial v_Q} d\sigma = c, (P \in \Omega^5).$$

Dar $v(P_0) = 0$ deci $v(P) \equiv 0$, ceea ce demonstrează afirmația noastră.

L e m a 1. Dacă $u \in \{u\}$ atunci

$$\int_{\Gamma} \delta_2(Q) d\sigma = 0.$$

Demonstrație. Aplicăm operatorul Δ egalității (5):

$$\int_{\Gamma} \left[\mu_2(Q) \frac{\partial \Delta U(P', Q)}{\partial v_Q} - \delta_2(Q) \Delta U(P', Q) \right] d\sigma = 0.$$

⁵⁾ În lema 1, care urmează, vom demonstra că această egalitate este îndeplinită pentru orice funcție a mulțimii $\{u\}$.

Integrăm pe un cerc arbitrar C_R de rază R , care conține domeniul Ω în interiorul său

$$\int_{\Gamma} \mu_2(Q) d\sigma \int_{C_R} \frac{\partial \Delta U(P', Q)}{\partial v_Q} d\sigma - \int_{\Gamma} \delta_2(Q) d\sigma \int_{C_R} \Delta U(P', Q) d\sigma = 0.$$

Dar $\int_{C_R} \Delta U(P', Q) d\sigma = \int_{C_R} [4 \ln r(P', Q) + 3] d\sigma \equiv$ constantă pe Γ , fiindcă

$$\int_{C_R} \ln r(P', Q) d\sigma \equiv c \text{ în interiorul cercului. De aici urmează și } \int_{C_R} \frac{\partial \Delta U(P', Q)}{\partial v_Q} d\sigma = 0$$

prin urmare $\int_{\Gamma} \delta_2(Q) d\sigma = 0$.

4. Vom demonstra unicitatea soluției problemei la limită propuse la punctul 2, relativ la elementele mulțimii $\{u\}$.

Introducem funcționala

$$F(u) = \int_{\Gamma} (\mu_1 \delta_2 - \mu_2 \delta_1) d\sigma + (1 - \sigma) \int_{\Gamma} \delta_1^2 d\sigma \quad (7)$$

definită pe elementele mulțimii $\{u\}$. $F(u)$ este o funcțională pozitivă, ceea ce este evident dacă în prealabil observăm că

$$\int_{\Gamma} (\mu_1 \delta_2 - \mu_2 \delta_1) d\sigma = \iint_{\Omega} (\Delta u)^2 d\sigma.$$

Dar această ultimă egalitate se poate verifica înlocuind în membrul întii expresiile funcțiilor $\mu_1, \delta_1, \mu_2, \delta_2$ și efectuînd calcule simple urmînd calea demonstrației teoremei 3.

T e o r e m a 4. Dacă $u \in \{u\}$ și

$$u = 0 \text{ pe } \Gamma$$

$$-\Delta u + \frac{1 - \sigma}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \text{ pe } \Gamma$$

atunci $u \equiv 0$ în Ω .

Demonstrație. Evident $F(u) = 0$, de unde urmează

$$\iint_{\Omega} (\Delta u)^2 d\tau = 0 \text{ și } \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 d\sigma = 0.$$

Deci $\Delta u = 0$ în Ω și $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$ pe Γ . Aceasta înseamnă că u este soluția problemei lui

Neumann cu condiția $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$ pe frontieră; deci $u \equiv c$ în Ω , și fiindcă condiția teoremei

impune ca $u = 0$ pe Γ , urmează $u \equiv 0$.

5. Fie $P(\rho, \varphi)$ și $Q(\rho', \varphi')$ două puncte în plan. Este bine cunoscută formula

$$\ln r(P, Q) = \ln \rho' - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\zeta^n}{\rho'^n} \cos n(\varphi - \varphi').$$

Cu ajutorul ei obținem

$$r^2 \ln r = \ln \rho' (\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \gamma) + \rho^2 - \rho\rho' \cos \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{\rho^{n+2}}{\rho'^n} \cos n\gamma + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \frac{\rho^n}{\rho'^{n-2}} \cos n\gamma,$$

unde $\gamma = \varphi - \varphi'$. Dacă introducem următoarele notații

$$\alpha_1 = -\rho \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{cases}; \quad \alpha_n = \frac{1}{n(n-1)} \rho^n \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad (n=2, 3, \dots),$$

$$\beta_0 = \rho^2; \quad \beta_n = -\frac{1}{n(n+1)} \rho^{n+2} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\gamma_n = \rho'^{-n} \begin{cases} \cos n\varphi' \\ \sin n\varphi' \end{cases} \quad (n=0, 1, \dots),$$

$$\delta_n = \rho'^{n-2} \begin{cases} \cos n\varphi' \\ \sin n\varphi' \end{cases} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Cu ajutorul lor putem scrie

$$r^2 \ln r = \beta_0 \ln \rho' + \rho' \ln \rho + 2\alpha_1 \delta_1 \ln \rho' + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \gamma_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_n.$$

Pentru a ușura calculele ce urmează, introducem notații prescurtate

$$P(u) = \mu_1(Q) - \delta_1(Q) + \mu_2(Q) - \delta_2(Q); \quad G(v) = \frac{\partial \Delta v}{\partial v_Q} + \Delta v + \frac{\partial v}{\partial v} + v$$

iar

$$P(u) \cdot G(v) = \mu_1 \frac{\partial \Delta v}{\partial v_Q} - \delta_1 \Delta v + \mu_2 \frac{\partial v}{\partial v_Q} + \delta_2 v.$$

Înlocuind în formula (5) $U = r^2 \ln r$ prin șirul ei de mai sus și folosind notațiile prescurtate, egalitatea (5) se poate scrie

$$\ln \rho' \int_{\Gamma} P(u) \cdot G(\beta_0) d\sigma + 2\delta_1 \ln \rho' \int_{\Gamma} P(u) G(\alpha_1) d\sigma + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \int_{\Gamma} P(u) \cdot G(\beta_n) d\sigma + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_{\Gamma} P(u) G(\alpha_n) d\sigma = 0, \quad (8)$$

care este valabilă pentru fiecare punct exterior față de un cerc care conține în interiorul său pe Ω . Fie C_R un asemenea cerc fixat. Dat fiindcă pe C_R șirul de funcții $1, \sin \varphi', \cos \varphi', \sin 2\varphi', \cos 2\varphi', \dots$ este complet, din egalitatea (8) urmează

$$\int_{\Gamma} P(u) G(\beta_0) d\sigma + \ln R \int_{\Gamma} P(u) G(\beta_0) d\sigma = 0. \\ 2R \ln R \int_{\Gamma} P(u) G(\alpha_1) d\sigma + \int_{\Gamma} P(u) G(\beta_1) d\sigma + R \int_{\Gamma} P(u) G(\alpha_1) d\sigma = 0 \\ \int_{\Gamma} P(u) G(\beta_n) d\sigma + R^2 \int_{\Gamma} P(u) G(\alpha_n) d\sigma = 0 \quad (n=2, 3, \dots).$$

Dar acest sistem este valabil și pentru orice $R_1 > R$, de unde rezultă

$$\int_{\Gamma} P(u) G(\alpha_n) d\sigma = 0, \quad (n=1, 2, \dots), \\ \int_{\Gamma} P(u) G(\beta_n) d\sigma = 0, \quad (n=0, 1, \dots),$$

sau notînd cu $\{v_n\}$ șirul $\{\alpha_n\} \cup \{\beta_n\}$:

$$\int_{\Gamma} P(u) G(v_n) d\sigma = 0, \quad (n=1, 2, \dots). \quad (9)$$

Din cele de mai sus rezultă că sistemul (9) reprezintă condiția necesară pentru ca $u \in \{u\}$. Relația (9) reprezintă totodată și condiția suficientă. Într-adevăr, fie $\mu_1, \delta_1, \mu_2, \delta_2 \in L_2(\Gamma)$; funcția

$$w(P') = \int_{\Gamma} \left[\mu_1(Q) \frac{\partial \Delta U(P', Q)}{\partial v_Q} - \delta_1(Q) \Delta U(P', Q) + \mu_2(Q) \frac{\partial U(P', Q)}{\partial v_Q} - \delta_2(Q) U(P', Q) \right] d\sigma$$

este biarmonică în $C\Omega$. Însă din (9) urmează $w(P') \equiv 0$ în exteriorul cercului C_R ceea ce înseamnă că $w(P') \equiv 0$ și în $C\Omega$.

Rezultatul final este formulat în teorema următoare:

Teorema 5. Șirul de vectori $\{\psi_i\} = \left\{ v_i - \Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial v} \right\}$ este complet

în sensul lui Hilbert pe Γ .

Demonstrație. Fie φ un vector ortogonal pe toate elementele șirului $\{\psi_i\}$. Componentele vectorului φ le vom nota în felul următor: $\varphi = [-\delta_2, \delta_1]$. Condiția de ortogonalitate este

$$\int_{\Gamma} \left[-\delta_2 v_i - \delta_1 \Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho} \delta_1 \frac{\partial v_i}{\partial v} \right] d\sigma = 0, \quad (i=1, 2, \dots).$$

Dacă considerăm $\mu_1 \equiv 0$ și $\mu_2 = \frac{1-\sigma}{\rho_0} \delta_1$, atunci egalitățile precedente coincid cu (9), deci

$$u(P) = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{1-\sigma}{\rho_0} \delta_1(Q) \frac{\partial U(P, Q)}{\partial \nu_Q} - \delta_1(Q) \Delta U(P, Q) - \delta_2 U(P, Q) \right] d\sigma \in \{u\}.$$

Avem

$$\lim u(P) = 0, \quad \lim \Delta u(P) = \frac{1-\sigma}{\rho_0} \delta_1(M), \quad \lim \frac{\partial u(P)}{\partial \nu_M} = \delta_1(M)$$

și $\lim \frac{\partial \Delta u(P)}{\partial \nu_M} = \delta_2(M)$, toate considerate când $P \rightarrow M \in \Gamma$ pe normală.

Observînd că

$$\lim \left[-\Delta u + \frac{1-\sigma}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial \nu_M} \right] = -\frac{1-\sigma}{\rho_0} \delta_1 + \frac{1-\sigma}{\rho_0} \delta_1 = 0$$

și

$$\lim u = 0$$

pe baza teoremei de unicitate urmează $u \equiv 0$, deci $\frac{\partial u}{\partial \nu_M} = \delta_1 = 0$ și $\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = \delta_2 = 0$

pe Γ ceea ce înseamnă $\varphi \equiv 0$.

Institutul de calcul
al Academiei R.P.R., Filiala Cluj

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Обозначим через Ω плоскую область, ограниченную замкнутой кривой Γ . Предполагаем, что радиус кривизны ρ_0 кривой Γ является положительной функцией и что Γ является достаточно гладкой.

В данной работе доказывается, что последовательность вектор-функций

$$\left\{ v_i, -\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0} \frac{\partial v_i}{\partial \nu} \right\}$$

является полной в среднем по кривой Γ . Здесь

$$\{v_n\} = \{\alpha_n\} U \{\beta_n\}$$

и

$$\alpha_1 = -\rho \begin{cases} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{cases}; \alpha_n = \frac{1}{n(n-1)} \rho^n \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} (n=2,3,\dots); \gamma_n = \rho'^{-n} \begin{cases} \cos n\varphi' \\ \sin n\varphi' \end{cases} (n=0,1,\dots)$$

$$\beta_0 = \rho^2; \beta_n = -\frac{1}{n(n+1)} \rho^{n+2} \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} (n=1,2,\dots); \delta_n = \rho'^{n-2} \begin{cases} \cos n\varphi' \\ \sin n\varphi' \end{cases} (n=1,2,\dots),$$

где ρ и φ обозначают полярные координаты, центр которых помещается внутри области Ω , σ — постоянная величина Пуассона и ν обозначает внутреннюю нормаль. При доказательстве приведенного утверждения были использованы некоторые идеи работ [1] и [2].

Полная последовательность векторов

$$\left\{ v_i, -\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0} \frac{\partial v_i}{\partial \nu} \right\}$$

служит для решения следующей задачи: в области Ω ищется такая функция $u(x,y)$, для которой

$$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$u = f_1$$

и

$$-\Delta u + \frac{1-\sigma}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2$$

на Γ , где f_1 и f_2 — данные квадратично суммируемые функции на Γ .

LA SOLUTION D'UN PROBLÈME AUX LIMITES POUR L'ÉQUATION BIHARMONIQUE

RÉSUMÉ

Soit Ω un domaine borné par la courbe Γ . On suppose que la courbe Γ admet le rayon de courbure ρ_0 positif et, en outre, que cette courbe est suffisamment lisse.

Dans ce travail, on démontre que la succession des vecteurs

$$\left\{ v_i, -\Delta v_i + \frac{1-\sigma}{\rho_0} \frac{\partial v_i}{\partial \nu} \right\}$$

