

de cubatură în care intervin și valorile derivatelor parțiale ale lui $f(M)$ în anumite puncte.

Restul ρ al formulei (1) reprezintă valoarea, dată de această formulă, a unei funcționale aditive și omogene, pe care, pentru a indica funcția $f(M)$, o vom nota de asemenea cu $\rho(f)$.

2. Vom spune că formula (1) are gradul parțial de exactitate (n_1, n_2, \dots, n_s) dacă:

- $\rho(P) = 0$ pentru orice polinom $P(M)$ de grad (n_1, n_2, \dots, n_s) .
- $\rho(P) \neq 0$ pentru cel puțin un polinom $P(M)$ de grad $(n_1 + 1, n_2 + 1, \dots, n_s + 1)$.

3. Problemele de bază care se pun acum sînt următoarele:

- A construi formulele de cubatură, adică a determina coeficienții c_i și nodurile M_i .
- A da și studia expresia restului acestor formule pentru a putea evalua eroarea care se comite cînd pentru $I(f)$ se ia valoarea aproximativă $J(f)$.

Se știe că o metodă generală de construire a formulelor de cubatură constă în a înlocui funcția $f(M)$ prin expresia sa dată de o formulă de interpolare.

Dacă presupunem că $f(M)$ este dezvoltabilă în seria uniform convergentă în D

$$f(M) = \sum_{i_1, \dots, i_s=0}^{\infty} a_{i_1, \dots, i_s} (t^1)^{i_1} \dots (t^s)^{i_s} \quad (4)$$

și punem

$$I_{i_1, \dots, i_s} = \int \dots \int_D K(t^1, \dots, t^s) (t^1)^{i_1} \dots (t^s)^{i_s} dv_M,$$

restul va fi reprezentat de seria

$$\rho = \sum_{i_1, \dots, i_s=0}^{\infty} a_{i_1, \dots, i_s} \left[I_{i_1, \dots, i_s} - \sum_{j=1}^N p_j (t^1)^{i_1} \dots (t^s)^{i_s} \right], \quad (5)$$

cantitățile între parantezele drepte fiind toate independente de $f(M)$.

Dacă $f(M)$ e un polinom de gradul (n_1, n_2, \dots, n_s) , avem

$$I(f) = J(f),$$

oricare ar fi coeficienții a_{i_1, \dots, i_s} pentru care $i_k \leq n_k (k=1, s)$.

Aceasta ne conduce la următoarele ecuații

$$\sum_{j=1}^N p_j (t^1)^{i_1} \dots (t^s)^{i_s} = I_{i_1, \dots, i_s}$$

4. E firesc să căutăm să mărim precizia formulei de cubatură despre care vorbim, căutînd să determinăm cele sN necunoscute $(t_p^1, t_p^2, \dots, t_p^s)$, $i = \overline{1, N}$ astfel ca să se anuleze, oricare ar fi funcția $f(M)$, și cei sN termeni următori din seria (5), deducînd în acest mod sN ecuații noi de forma

$$\sum_{j=1}^N p_j (t_j^1)^{i_1} \dots (t_j^s)^{i_s} = I_{i_1, \dots, i_s}.$$

În felul acesta se obține în total un sistem de $(s+1)N$ ecuații cu tot atîtea necunoscute

$$c_i; t_p^1, t_p^2, \dots, t_p^s \quad (i = \overline{1, N}).$$

Pentru ca problema să fie posibilă va trebui ca sistemul liniar care se obține să fie compatibil și să ne conducă la N puncte M_i reale aparținînd domeniului D și fără să fie situate pe o hipersuprafață de ordinul (n_1, n_2, \dots, n_s) pentru a nu se anula anumiți determinanți care vor interveni la numitorii expresiilor coeficienților c_i .

5. Într-o lucrare precedentă [3], relativ la sistemul de $N = (n_1+1) \dots (n_s+1)$ noduri

$$M_{i_1, \dots, i_s} = M_{i_1, \dots, i_s}(t_{i_1}^1, t_{i_1 i_2}^2, \dots, t_{i_1, \dots, i_s}^s), \quad (6)$$

am dat formula de interpolare

$$f(M) = L_{n_1 n_2 \dots n_s}(M) + R_s(M), \quad (7)$$

unde

$$L_{n_1, \dots, n_s}(M) = \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \dots \sum_{i_s=1}^{n_s+1} l_{i_1}^1(t^1) \dots l_{i_1, \dots, i_s}^s(t^s) f(M_{i_1, \dots, i_s}), \quad (8)$$

cu

$$l_{i_1, \dots, i_k}^k(t^k) = \frac{w_{i_1, \dots, i_{k-1}}^k(t^k)}{(t^k - t_{i_1, \dots, i_k}^k) w_{i_1, \dots, i_{k-1}}^k(t_{i_1, \dots, i_k}^k)},$$

$$w_{i_1, \dots, i_{k-1}}^k(t^k) = \prod_{i_k=1}^{n_k+1} (t^k - t_{i_1, \dots, i_k}^k),$$

e polinomul de interpolare de gradul (n_1, n_2, \dots, n_s) care coincide cu $f(M)$ pe nodurile (6):

Restul formulei (7) are expresia

$$R_s(M) = \sum_{p=1}^s \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \dots \sum_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}+1} l_{i_1}^1(t^1) \dots l_{i_1, \dots, i_{p-1}}^{p-1}(t^{p-1}) w_{i_1, \dots, i_{p-1}}^p S_{i_1, \dots, i_{p-1}}^p,$$

unde

$$S_{i_1 \dots i_{p-1}}^p = \left[t^p, t_{i_1 \dots i_{p-1} 1}^p, \dots, t_{i_1 \dots i_{p-1} n_{p+1}}^p; f(t_{i_1}^1, \dots, t_{i_1 \dots i_{p-1}}^{p-1}, t^p, \dots, t^s) \right]$$

Aici în membrul drept avem diferența divizată pe nodurile $t^p, t_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} 1}^p, \dots, t_{i_1 i_2 \dots i_{p-1} n_{p+1}}^p$ aplicată variabilei t^p a funcției

$$f(t_{i_1}^1, t_{i_1 i_2}^2, \dots, t_{i_1 \dots i_{p-1}}^{p-1}, t^p, t^{p+1}, \dots, t^s).$$

6. Să presupunem că punctele (6) aparțin domeniului D . Dacă se utilizează formula (7) se obține formula de cubatură

$$\int \int \dots \int_D K(M) f(M) dv_M = \sum_{i_1=1}^{n_1+1} \dots \sum_{i_s=1}^{n_s+1} A_{i_1 \dots i_s} f(M_{i_1 \dots i_s}) + \varphi_s \quad (9)$$

unde coeficienții sînt dați de formula

$$A_{i_1 \dots i_s} = \iint \dots \int_D K(t^1, \dots, t^s) l_{i_1}^1(t^1) \dots l_{i_s}^s(t^s) dt^1 \dots dt^s \quad (10)$$

iar restul e dat de

$$\varphi_s = \iint \dots \int_D K(M) R_s(M) dM. \quad (11)$$

7. Exemplu. Considerînd în cazul $s = 2$ nodurile

$$\begin{aligned} M_1(-a, -b), M_2\left(-a, -\frac{b-c}{2}\right), M_3(-a, c) \\ M_4\left(0, -\frac{b+c}{2}\right), M_5(0, 0), M_6\left(0, \frac{b+c}{2}\right) \\ M_7(a, -c), M_8\left(a, \frac{b-c}{2}\right), M_9(a, b), \end{aligned} \quad (12)$$

formula (7) ne conduce la formula de interpolare

$$\begin{aligned} f(x, y) = \frac{1}{a^2(b+c)^2} x(x-a) \left(y + \frac{b-c}{2}\right) (y+b) f(-a, c) - \\ - \frac{2}{a^2(b+c)^2} x(x-a) (y+b) (y-c) f\left(-a, \frac{c-b}{2}\right) + \\ + \frac{1}{a^2(b+c)^2} x(x-a) (y-c) \left(y + \frac{b-c}{2}\right) f(-a, -b) - \\ - \frac{2}{a^2(b+c)^2} (x^2 - a^2) y \left(y + \frac{b+c}{2}\right) f\left(0, \frac{b+c}{2}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{4}{a^2(b+c)^2} (x^2 - a^2) \left[y^2 - \frac{(b+c)^2}{4}\right] f(0, 0) - \\ - \frac{2}{a^2(b+c)^2} (x^2 - a^2) \left(y - \frac{b+c}{2}\right) y f\left(0, -\frac{b+c}{2}\right) + \\ + \frac{1}{a^2(b+c)^2} x(x+a) (y+c) \left(y - \frac{b-c}{2}\right) f(a, b) - \\ - \frac{2}{a^2(b+c)^2} x(x+a) (y-b) (y+c) f\left(a, \frac{b-c}{2}\right) + \\ + \frac{1}{a^2(b+c)^2} x(x+a) (y-b) \left(y - \frac{b-c}{2}\right) f(a, -c) + r(x, y), \end{aligned} \quad (13)$$

unde restul are expresia

$$\begin{aligned} r(x, y) = x(x^2 - a^2) [-a, 0, a, x; f(x, y)] + \\ + \frac{1}{2a^2} x(x-a) (y+b) (y-c) \left(y + \frac{b-c}{2}\right) \cdot \left[c, \frac{c-b}{2}, -b, y; f(a, y)\right] - \\ - \frac{1}{a^2} (x^2 - a^2) y \left(y^2 - \frac{(b+c)^2}{4}\right) \left[\frac{b+c}{2}, 0, -\frac{b+c}{2}, y; f(0, y)\right] + \\ + \frac{1}{2a^2} x(x+a) (y-b) \left(y - \frac{b-c}{2}\right) (y+c) \left[b, \frac{b-c}{2}, -c, y; f(-a, y)\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Luînd ca domeniu de integrare paralelogramul D de vîrfuri

$$M_1(-a, -b), M_3(-a, c), M_7(a, -c), M_9(a, b) \quad (15)$$

și făcînd $K(x, y) = 1$, formula de cubatură (9) devine

$$\begin{aligned} \int \int_D f(x, y) dx dy = \frac{a}{90(b+c)} \left\{ (22bc - b^2 - c^2) [f(a, b) + f(-a, c) + \right. \\ + f(-a, -b) + f(a, -c)] + 8(7b^2 + 26bc + 7c^2) f(0, 0) + \\ + 16(2b^2 + bc + 2c^2) \left[f\left(0, \frac{b+c}{2}\right) + f\left(-a, \frac{c-b}{2}\right) + \right. \\ \left. \left. + f\left(0, -\frac{b+c}{2}\right) + f\left(a, \frac{b-c}{2}\right) \right] \right\} + \varphi', \end{aligned} \quad (16)$$

unde

$$\varphi' = \int \int_D r(x, y) dx dy. \quad (17)$$

Formula de cubatură (16) are gradul parțial de exactitate (2,2) și gradul global de exactitate egal cu 3.

Dacă facem $d = c$ obținem următoarea formulă de cubatură de grad parțial de exactitate (3,3)

$$\begin{aligned} & \iint_D f(x, y) dx dy = \\ & = \frac{ab}{9} \left\{ f(a, b) + f(-a, b) + f(-a, -b) + f(a, -b) + 4[f(0, b) + \right. \\ & \quad \left. + f(-a, 0) + f(0, -b) + f(a, 0)] + 16f(0, 0) \right\} + \rho, \end{aligned} \quad (18)$$

care este tocmai formula clasică a lui Cavalieri-Simpson extinsă la două variabile. Domeniul de integrare D este în acest caz dreptunghiul definit de inegalitățile

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b. \quad (19)$$

Restul formulei de cubatură a lui Cavalieri-Simpson e dat de formula

$$\rho = \iint_D R(x, y) dx dy, \quad (20)$$

unde

$$\begin{aligned} R(x, y) = & x(x^2 - a^2)[-a, 0, a, x; f(x, y)] + \\ & + y(y^2 - b^2)[-b, 0, b, y; f(x, y)] - \\ & - x(x^2 - a^2)y(y^2 - b^2) \begin{vmatrix} -a, 0, & a, x \\ -b, 0, & -b, y \end{vmatrix} f(x, y). \end{aligned} \quad (21)$$

8. În continuare vom căuta să dăm o evaluare a restului (20).

Se observă că putem scrie

$$\begin{aligned} \rho = & \int_{-a}^a \int_{-b}^b R(x, y) dx dy = \int_{-a}^a \left\{ x(x^2 - a^2) \left[-a, 0, a, x; \int_{-b}^b f(x, y) dy \right] - \right. \\ & \left. - x(x^2 - a^2) \left[-a, 0, a, x \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [b, 0, -b; f(x, y)] dy \right] \right\} dx + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [-b, 0, b, y; f(x, y)] dx dy. \end{aligned} \quad (22)$$

Utilizând formula elementară

$$\int_{-A}^A F(u) du = \int_0^A [F(t) + F(-t)] dt \quad (23)$$

vom putea scrie succesiv

$$\rho = \int_0^a \left\{ t(t^2 - a^2) \left[-a, 0, a, t; \int_{-b}^b f(t, y) dy \right] - \right.$$

$$\begin{aligned} & - t(t^2 - a^2) \left[-a, 0, a, t; \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [b, 0, -b, y; f(t, y)] dy \right] - \\ & - t(t^2 - a^2) \left[a, 0, -a, t; \int_{-b}^b f(t, y) dy \right] + \\ & + t(t^2 - a^2) \left[a, 0, -a, -t; \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [b, 0, -b, y; f(t, y)] dy \right] \Big\} dt + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [-b, 0, b, y; f(x, y)] dx dy = \int_0^a t(t^2 - a^2) \left(\left[-a, 0, a, t; \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{-b}^b f(t, y) dy \right] - \left[a, 0, -a, t; \int_{-b}^b f(t, y) dy \right] \right) - t(t^2 - a^2) \left(\left[-a, 0, a, t; \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [b, 0, -b, y; f(t, y)] dy \right] - \left[a, 0, -a, -t; \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) \right. \right. \\ & \left. \left. [b, 0, -b, y; f(t, y)] dy \right] \right) \Big\} + \int_{-a}^a \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [-b, 0, b, y; f(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

Dar în baza formulei de recurență a diferențelor divizate avem

$$\begin{aligned} & \left[-a, 0, a, t; \int_{-b}^b f(t, y) dy \right] - \left[a, 0, -a, -t; \int_{-b}^b f(t, y) dy \right] = \\ & = 2t \left[-a, 0, a, t, -t; \int_{-b}^b f(t, y) dy \right] \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} & \left[-a, 0, a, t; \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [b, 0, -b, y; f(t, y)] dy \right] - \\ & - \left[a, 0, -a, -t; \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [b, 0, -b, y; f(t, y)] dy \right] = \\ & = 2t \left[-a, 0, a, t, -t; \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [b, 0, -b, y; f(t, y)] dy \right]. \end{aligned}$$

Cu acestea vom putea scrie în continuare

$$\begin{aligned} \rho = & 2 \int_0^a t^2(t^2 - a^2) \left\{ \left[-a, 0, a, t, -t; \int_{-b}^b f(t, y) dy \right] - \right. \\ & \left. - \left[-a, 0, a, t, -t; \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [b, 0, -b, y; f(t, y)] dy \right] \right\} dt + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b y(y^2 - b^2) [-b, 0, b, y; f(x, y)] dx dy. \end{aligned}$$

Deoarece $t^2 (t^2 - a^2)$ păstrează un semn constant în intervalul de integrare, putem aplica formula mediei și găsim

$$\begin{aligned} \rho &= 2 \left\{ \left[-a, 0, a, \xi', -\xi'; \int_{-b}^b f(\xi', y) dy \right] - \left[-a, 0, a, \xi', -\xi'; \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{-b}^b y (y^2 - b^2) [b, 0, -b, y; f(\xi', y)] dy \right\} \int_0^a t^2 (t^2 - a^2) dt + \\ &+ \int_{-a}^a \int_{-b}^b y (y^2 - b^2) [-b, 0, b, y; f] dx dy = -\frac{2 \cdot 2 a^5}{4! \cdot 15} \left(\int_{-b}^b \frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial \xi^4} dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-b}^b y (y^2 - b^2) \left[b, 0, -b, y; \frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial \xi^4} \right] dy \right) + \\ &+ \int_{-a}^a \int_{-b}^b y (y^2 - b^2) [-b, 0, b, y; f] dx dy = -\frac{a^5}{90} \int_{-b}^b \frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial \xi^4} dy + \\ &\quad + \frac{a^5}{90} \int_{-b}^b y (y^2 - b^2) \left[b, 0, -b, y; \frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial \xi^4} \right] dy + \\ &+ \int_{-a}^a \int_{-b}^b y (y^2 - b^2) [-b, 0, b, y; f] dx dy = -\frac{a^5 b}{45} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^4} + \\ &+ \int_{-b}^b y (y^2 - b^2) \left[-b, 0, b, y; \int_{-a}^a f(x, y) dx + \frac{a^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial \xi^4} \right] dy. \end{aligned}$$

Aplicînd iarăși formula (23), primim succesiv

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{a^5 b}{45} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^4} + \int_0^b \left(\tau (\tau^2 - b^2) \left[-b, 0, b, \tau; \int_{-a}^a f(x, \tau) dx + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{a^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} \right] - \tau (\tau^2 - b^2) \left[b, 0, -b, -\tau; \int_{-a}^a f(x, \tau) dx + \frac{a^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} \right] \right) d\tau = \\ &= -\frac{a^5 b}{45} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^4} + \int_0^b \tau (\tau^2 - b^2) \left(\left[-b, 0, b, \tau; \int_{-a}^a f(x, \tau) dx + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{a^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} \right] - \left[-b, 0, b, -\tau; \int_{-a}^a f(x, \tau) dx + \frac{a^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} \right] \right) d\tau = \\ &= -\frac{a^5 b}{45} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^4} + 2 \int_0^b \tau^2 (\tau^2 - b^2) \left[-b, 0, b, \tau, -\tau; \int_{-a}^a f(x, \tau) dz + \right. \\ &+ \left. \frac{a^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} \right] d\tau = -\frac{a^5 b}{45} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^4} + 2 [-b, 0, b, \eta', -\eta'; \int_{-a}^a f(x, \eta') dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{a^5}{90} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta')}{\partial \xi^4} \int_{-b}^b \tau^2 (\tau^2 - b^2) d\tau = -\frac{a^5 b}{45} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^4} - \\ &- \frac{4b^5}{15} \cdot \frac{1}{24} \int_{-a}^a \frac{\partial^4 f(x, \eta)}{\partial \eta^4} dx - \frac{4 a^5 b^5}{15 \cdot 24 \cdot 90} \frac{\partial^8 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^4 \partial \eta^4} = \\ &= -\frac{a^5 b}{45} \frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^4} - \frac{ab^5}{45} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^4} - \frac{a^5 b^5}{90^2} \frac{\partial^8 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^4 \partial \eta^4}. \end{aligned}$$

Dacă introducem o notație simbolică dată de J. F. Steffensen [6] și mai nou utilizată mult de Ș. E. Mikeladze [1]

$$\frac{\partial^p f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^p} = D_\xi^p, \quad \frac{\partial^q f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^q} = D_\eta^q, \quad \frac{\partial^{p+q} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} = D_\xi^p D_\eta^q, \quad (24)$$

restul (20) se va scrie în definitiv astfel

$$\rho = -\frac{a b}{45} \left[a^4 D_\xi^4 + b^4 D_\eta^4 + \frac{a^4 b^4}{180} D_\xi^4 D_\eta^4 \right]. \quad (25)$$

Observații. 1^o. Restul dat de Ș. E. Mikeladze la pag. 491 a lucrării [1] trebuie rectificat întrucît în loc de factorul $\frac{1}{180}$ care multiplă derivata $D_\xi^4 D_\eta^4$, în formula sa figurează $\frac{1}{45}$; această inexactitate provine din formula mai generală care o precede pe aceasta.

2^o. Formula (18), cu restul (25) a fost dată în cazul patratului cu centrul în origine și cu latura unu de către J. F. Steffensen [6], însă fără să se arate că ξ și η care intervin mai sus sînt aceiași.

§ 2. Unele formule practice de cubatură pentru integralele s-uple

9. Pentru formulele pe care le vom da va fi util să introducem un operator S_m definit astfel

$$\begin{aligned} S_i \varphi(M) &= S_i \varphi(t^1, \dots, t^{i-1}, t^i, t^{i+1}, \dots, t^s) = \\ &= \varphi(t^1, \dots, t^{i-1}, t_0^i + h_i t^i, t^{i+1}, \dots, t^s) + \varphi(t^1, \dots, t^{i-1}, t_0^i - h_i t^i, t^{i+1}, \dots, t^s). \end{aligned} \quad (26)$$

Oricare sînt numerele naturale i, k , ($i < k$; $i, k \leq s$), se stabilește imediat că avem

$$\begin{aligned} S_i(S_k \varphi) &= S_k(S_i \varphi) = \\ &= \varphi(t^1, \dots, t^{i-1}, t_0^i + h_i t^i + h_k t^k, t^{i+1}, \dots, t^{k-1}, t_0^k + h_k t^k, t^{k+1}, \dots, t^s) + \\ &+ \varphi(t^1, \dots, t^{i-1}, t_0^i - h_i t^i + h_k t^k, t^{i+1}, \dots, t^{k-1}, t_0^k - h_k t^k, t^{k+1}, \dots, t^s) + \\ &+ \varphi(t^1, \dots, t^{i-1}, t_0^i + h_i t^i, t^{i+1}, \dots, t^{k-1}, t_0^k - h_k t^k, t^{k+1}, \dots, t^s) + \\ &+ \varphi(t^1, \dots, t^{i-1}, t_0^i - h_i t^i, t^{i+1}, \dots, t^{k-1}, t_0^k + h_k t^k, t^{k+1}, \dots, t^s). \end{aligned} \quad (27)$$

10. Ne vor fi utile două leme importante.

Lema 1. — Relativ la funcția $f(M)$ și la nodurile $M_{i_1, \dots, i_s} (t_{i_1}^1, t_{i_2}^2, \dots, t_{i_s}^s)$ a căror coordonată de ordinul k parurge valorile

$$t_0^k - p_k h_k, \dots, t_0^k - h_k, t_0^k, t_0^k + h_k, \dots, t_0^k + p_k h_k \quad (28)$$

$(k = 1, 2, \dots, s)$

avem formula de interpolare

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^s} S_1 S_2 \dots S_s f(M) &= \frac{(-1)^s}{P} U f(M_0) + \\ &+ \sum_{i=1}^s \frac{U_i}{P_i} \sum_{j_i=1}^{p_i} (-1)^{N-j_i} \frac{v_{j_i}^i(t^i)}{(p_i-j_i)!(p_i+j_i)!} S_{j_i}^{0,i} f(M_0) + \\ &+ \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=2}^s \frac{U_{i,k}}{P_{i,k}} \sum_{j_i=1}^{p_i} \sum_{j_k=1}^{p_k} (-1)^{N-j_i-j_k} \frac{v_{j_i}^i(t^i)}{(p_i-j_i)!(p_i+j_i)!} \frac{v_{j_k}^k(t^k)}{(p_k-j_k)!(p_k+j_k)!} \\ &\quad \cdot S_{j_i}^{0,i} S_{j_k}^{0,k} f(M_0) \\ &+ \dots \\ &+ \sum_{j_1=1}^{p_1} \dots \sum_{j_s=1}^{p_s} (-1)^{N-j_1-\dots-j_s} \frac{v_{j_1}^1(t^1)}{(p_1-j_1)!(p_1+j_1)!} \dots \frac{v_{j_s}^s(t^s)}{(p_s-j_s)!(p_s+j_s)!} \\ &\quad \cdot S_{j_1}^{0,1} \dots S_{j_s}^{0,s} f(M_0) + R_{12\dots s}(f; M), \end{aligned} \quad (29)$$

unde

$$\begin{cases} U = u_1(t^1) u_2(t^2) \dots u_s(t^s) \\ U_i = u_1(t^1) \dots u_{i-1}(t^{i-1}) u_{i+1}(t^{i+1}) \dots u_s(t^s) \\ U_{ik} = u_1(t^1) \dots u_{i-1}(t^{i-1}) u_{i+1}(t^{i+1}) \dots u_{k-1}(t^{k-1}) u_{k+1}(t^{k+1}) \dots u_s(t^s) \\ \dots \\ U_{12\dots s} = 1; \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} u_i(t^i) = [(t^i)^2 - 1^2] [(t^i)^2 - 2^2] \dots [(t^i)^2 - p_i^2] \\ v_{j_i}^i(t^i) = (t^i)^2 [(t^i)^2 - 1^2] \dots [(t^i)^2 - (j_i - 1)^2] [(t^i)^2 - (j_i + 1)^2] \dots [(t^i)^2 - p_i^2]; \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} P = (p_1!)^2 (p_2!)^2 \dots (p_s!)^2 \\ P_i = (p_1!)^2 \dots (p_{i-1}!)^2 (p_{i+1}!)^2 \dots (p_s!)^2 \\ P_{ik} = (p_1!)^2 \dots (p_{i-1}!)^2 (p_{i+1}!)^2 \dots (p_{k-1}!)^2 (p_{k+1}!)^2 \dots (p_s!)^2 \\ \dots \\ P_{12\dots s} = 1; \end{cases} \quad (32)$$

$$S_{j_i}^{0,i} f(M_0) = f(t_0^1, \dots, t_0^{i-1}, t_0^i + j_i h_i, t_0^{i+1}, \dots, t_0^s) + f(t_0^1, \dots, t_0^{i-1}, t_0^i - j_i h_i, t_0^{i+1}, \dots, t_0^s). \quad (33)$$

Restul are următoarea expresie

$$R_{12\dots s}(f; M) = \frac{1}{2^s} \rho_{12\dots s}(f; M)$$

cu

$$\begin{aligned} \rho_{12\dots s}(f; M) &= 2 \sum_{i=1}^s h_i^{2p_i+2} (t^i)^2 u_i(t^i) [t_0^i, t_0^i \pm h_i, \dots, t_0^i \pm p_i h_i, t_0^i \pm h_i t^i; F_i] - \\ &- 4 \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=2}^s h_i^{2p_i+2} h_k^{2p_k+2} (t^i)^2 (t^k)^2 u_i(t^i) u_k(t^k) \cdot \\ &\quad \left[\begin{matrix} t_0^i, t_0^i \pm h_i, \dots, t_0^i \pm p_i h_i, t_0^i \pm h_i t^i \\ t_0^k, t_0^k \pm h_k, \dots, t_0^k \pm p_k h_k, t_0^k \pm h_k t^k \end{matrix}; F_{ik} \right] \\ &+ \dots \\ &+ (1)^{s-1} h_1^{2p_1+2} \dots h_s^{2p_s+2} (t^1)^2 \dots (t^s)^2 u_1(t^1) \dots u_s(t^s) \cdot \\ &\quad \left[\begin{matrix} t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1 \\ \dots \\ t_0^s, t_0^s \pm h_s, \dots, t_0^s \pm p_s h_s, t_0^s \pm h_s t^s \end{matrix}; F_{12\dots s} \right] \end{aligned} \quad (35)$$

unde

$$\begin{aligned} F_i &= S_1 S_2 \dots S_{i-1} S_{i+1} \dots S_s f(M) \\ F_{ik} &= S_1 \dots S_{i-1} S_{i+1} \dots S_{k-1} S_{k+1} \dots S_s f(M) \\ &\dots \\ F_{12\dots s} &= f(M) \end{aligned}$$

Pentru demonstrație se consideră formula de interpolare a lui Lagrange pentru s valabile, cu restul sub forma dată de J. F. Steffensen [6]. Interpolarea se face pe o rețea hiperparalelipedică cu coordonatele nodurilor echidistante. Că această formulă se poate aduce la forma (29) se poate demonstra prin inducție completă¹⁾.

Lema 2. — Oricare ar fi funcția $f(M)$ integrabilă în hiperparalelipedul

$$t_0^i - m h_i \leq t^i \leq t_0^i + m_i h_i, (i = \overline{1, s}), \quad (37)$$

avem formula

$$\int_{t_0^1 - m_1 h_1}^{t_0^1 + m_1 h_1} \dots \int_{t_0^s - m_s h_s}^{t_0^s + m_s h_s} f(M) dM = h_1 \dots h_s \int_0^{m_1} \dots \int_0^{m_s} S_1 \dots S_s f(M) dM. \quad (38)$$

Demonstrația se face de asemenea prin inducție completă asupra lui s .

¹⁾ Vezi lucrarea [4].

11. Bazați pe aceste leme vom putea enunța următoarea

TEOREMĂ: *Relativ la funcția f(M) și la nodurile pe care le folosește formula (29) avem formula de cubatură*

$$\begin{aligned} \iint \dots \int_D f(M) dM &= \int_{t_0^1 - m_1 h_1}^{t_0^1 + m_1 h_1} \dots \int_{t_0^s - m_s h_s}^{t_0^s + m_s h_s} f(M) dM = \\ &= h_1 \dots h_s \left[A_0^0 f(M_0) + \sum_{i=1}^s \sum_{j_i=1}^{p_i} A_{j_i}^i S_{j_i}^{0,i} f(M_0) + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=2}^s \sum_{j_k=1}^{p_k} \sum_{j_i=1}^{p_i} A_{j_i j_k}^{i,k} S_{j_i}^{0,i} S_{j_k}^{0,k} f(M_0) + \\ &+ \dots \\ &+ \left. \sum_{j_1=1}^{p_1} \dots \sum_{j_s=1}^{p_s} A_{j_1 j_2 \dots j_s}^{1,2,\dots,s} S_{j_1}^{0,1} \dots S_{j_s}^{0,s} f(M_0) \right] + r_s, \end{aligned} \tag{35}$$

unde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^s} A_0^0 &= (-1)^N \int_0^{m_1} \dots \int_0^{m_s} \frac{U}{P} dM \\ \frac{1}{2^s} A_{j_i}^i &= \frac{(-1)^{N-j_i}}{(p_i-j_i)!(p_i+j_i)!} \int_0^{m_1} \dots \int_0^{m_s} \frac{U_i}{P_i} v_{j_i}^i dM \\ \frac{1}{2^s} A_{j_i j_k}^{i,k} &= \frac{(-1)^{N-j_i-j_k}}{(p_i-j_i)!(p_i+j_i)!(p_k-j_k)!(p_k+j_k)!} \int_0^{m_1} \dots \int_0^{m_s} \frac{U_{ik}}{P_{ik}} v_{j_i}^i v_{j_k}^k dM \\ &\dots \\ \frac{1}{2^s} A_{j_1 j_2 \dots j_s}^{1,2,\dots,s} &= \frac{(-1)^{N-j_1-\dots-j_s}}{(p_1-j_1)!(p_1+j_1)! \dots (p_s-j_s)!(p_s+j_s)!} \int_0^{m_1} \dots \int_0^{m_s} v_{j_1}^1 \dots v_{j_s}^s dM \end{aligned} \tag{40}$$

iar

$$r_s = h_1 \dots h_s \int_0^{m_1} \dots \int_0^{m_s} \rho_{12\dots s}(f; M) dM. \tag{41}$$

Relativ la rest vom demonstra următoarea

TEOREMĂ: *Dacă în domeniul D funcția f(M) e continuă împreună cu derivatele sale parțiale de ordinul (2p₁+2, 2p₂+2, ..., 2p_s+2), atunci pentru restul (41) se obține evaluarea*

$$\frac{1}{2^s} r_s = \sum_{i=1}^s \frac{N_i h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_s}{(2p_i+2)!} B_i D_{\xi_i}^{2p_i+2} -$$

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=1}^s \frac{N_{ik} h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_{k-1} h_{k+1} \dots h_s}{(2p_i+2)! (2p_k+2)!} B_i B_k D_{\xi_i}^{2p_i+2} D_{\xi_k}^{2p_k+2} \\ + \dots \\ + (-1)^{s-1} \frac{h_1^{2p_1+2} \dots h_s^{2p_s+2}}{(2p_1+2)! \dots (2p_s+2)!} B_1 B_2 \dots B_s D_{\xi_1}^{2p_1+2} \dots D_{\xi_s}^{2p_s+2} \end{aligned} \tag{42}$$

unde

$$\begin{aligned} N_i &= m_1 \dots m_{i-1} m_{i+1} \dots m_s \\ N_{ik} &= m_1 \dots m_{i-1} m_{i+1} \dots m_{k-1} m_{k+1} \dots m_s \\ &\dots \\ N_{12\dots s} &= 1 \end{aligned} \tag{43}$$

și

$$B_i = \int_0^{m_i} (t^i)^2 u_i(t) dt^i. \tag{44}$$

Demonstrația o vom da în cazul s=3; în cazul lui s oarecare se va proceda exact la fel, ținând numai seama de formula (35) și de lema 2. În cazul lui E₃ restul (35) se scrie explicit astfel

$$\begin{aligned} \rho_{123}(f; M) &= 2h_1^{2p_1+2} (t^1)^2 u_1(t^1) [t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1; F_{11}] \\ &+ 2h_2^{2p_2+2} (t^2)^2 u_2(t^2) [t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \dots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2; F_{22}] \\ &+ 2h_3^{2p_3+2} (t^3)^2 u_3(t^3) [t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \dots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3; F_{33}] \\ &- 4h_1^{2p_1+2} h_2^{2p_2+2} (t^1 t^2)^2 u_1(t^1) u_2(t^2) \left[\begin{matrix} t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1 \\ t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \dots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2 \end{matrix}; F_{12} \right] \\ &- 4h_1^{2p_1+2} h_3^{2p_3+2} (t^1 t^3)^2 u_1(t^1) u_3(t^3) \left[\begin{matrix} t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1 \\ t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \dots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3 \end{matrix}; F_{13} \right] \\ &- 4h_2^{2p_2+2} h_3^{2p_3+2} (t^2 t^3)^2 u_2(t^2) u_3(t^3) \left[\begin{matrix} t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \dots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2 \\ t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \dots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3 \end{matrix}; F_{23} \right] \\ &+ 8 h_1^{2p_1+2} h_2^{2p_2+2} h_3^{2p_3+2} (t^1 t^2 t^3)^2 u_1(t^1) u_2(t^2) u_3(t^3) \times \\ &\times \left[\begin{matrix} t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1 \\ t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \dots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2; F_{123} \\ t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \dots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3 \end{matrix} \right] \end{aligned} \tag{45}$$

unde

$$\begin{aligned} F_1 &= S_2 S_3 f(t^1, t^2, t^3) = f(t^1, t_0^2 + h_2 t^2, t_0^3 + h_3 t^3) + f(t^1, t_0^2 - h_2 t^2, t_0^3 + h_3 t^3) + f(t^1, t_0^2 + \\ &+ h_2 t^2, t_0^3 - h_3 t^3) + f(t^1, t_0^2 - h_2 t^2, t_0^3 - h_3 t^3) \\ F_2 &= S_1 S_3 f(t^1, t^2, t^3) \\ F_3 &= S_1 S_2 f(t^1, t^2, t^3) \\ F_{12} &= S_3 f(t^1, t^2, t^3) = f(t^1, t^2, t_0^3 + h_3 t^3) + f(t^1, t^2, t_0^3 - h_3 t^3) \\ F_{13} &= S_2 f(t^1, t^2, t^3) \\ F_{23} &= S_1 f(t^1, t^2, t^3) \\ F_{123} &= f(t^1, t^2, t^3). \end{aligned}$$

Să calculăm acum integrala

$$I_3(\rho_{123}) = h_1 h_2 h_3 \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} \rho(t^1, t^2, t^3) dt^1 dt^2 dt^3. \quad (46)$$

Vom evalua mai întâi această integrală pentru primul termen al restului (45); primim

$$\begin{aligned} r_3^1 &= 2 h_1^{2p_1+3} h_2 h_3 \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} (t^1)^2 u_1(t^1) [t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1; F_1] dt^2 dt^3 \\ &= 2 h_1^{2p_1+3} h_2 h_3 \int_0^{m_2} dt^2 \int_0^{m_3} dt^3 \int_0^{m_1} t^1 ([t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1; F_1]) dQ_1(t^1), \end{aligned}$$

unde

$$Q_1(t^1) = \int_{-m_1}^{t^1} t^1 u_1(t^1) dt^1$$

este o funcție care conform studiului făcut de J. F. Steffensen [6]²⁾ păstrează un semn constant în intervalul $[-m_1, 0]$.

Integrând prin părți găsim

$$r_3^1 = -2 h_1^{2p_1+3} h_2 h_3 \int_0^{m_2} dt^2 \int_0^{m_3} dt^3 \int_{-m_1}^0 Q_1(t^1) \frac{\partial}{\partial t^1} \{t^1 [t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1; F_1] dt^1$$

Dar

$$\begin{aligned} [t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1; F_1] &= \frac{1}{2 h_1 t^1} ([t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 + \\ &+ h_1 t^1; F_1] + [t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 - h_1 t^1; F_1]), \end{aligned}$$

astfel că vom putea scrie în continuare

$$\begin{aligned} r_3^1 &= -h_1^{2p_1+3} h_2 h_3 \int_0^{m_2} dt^2 \int_0^{m_3} dt^3 \int_{-m_1}^0 Q_1(t^1) ([t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 + \\ &+ h_1 t^1, t_0^1 + h_1 t^1; F_1] + [t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 - h_1 t^1 - h_1 t^1; F_1]) dt^1. \end{aligned}$$

²⁾ pag. 155. Vezi de asemenea și S. E. Mikeldze [1], pag. 312.

Aplicând teorema mediei integralelor triple și ținând seama că $f(M)$ admite în (D) derivate parțiale de ordinul $(2p_1 + 2, 2p_2 + 2, 2p_3 + 2)$ continue, putem scrie

$$\begin{aligned} r_3^1 &= -h_1^{2p_1+3} h_2 h_3 ([t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 + h_1 \xi_1, t_0^1 + h_1 \xi_1; F_1']_1 + \\ &+ [t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 - h_1 \xi_1, t_0^1 - h_1 \xi_1; F_1']) \int_0^{m_2} dt^2 \int_0^{m_3} dt^3 \int_{-m_1}^0 Q_1(t^1) dt^1, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} F_1' &= f(\xi_1, t_0^2 + h_2 \eta_1, t_0^3 + h_3 \zeta_1) + f(\xi_1, t_0^2 - h_2 \eta_1, t_0^3 + h_3 \zeta_1) + f(\xi_1, t_0^2 + \\ &+ h_2 \eta_1, t_0^3 - h_3 \zeta_1) + f(\xi_1, t_0^2 - h_2 \eta_1, t_0^3 - h_3 \zeta_1). \end{aligned}$$

Aplicând acum teorema de medie a diferențelor divizate obținem³⁾

$$r_3^1 = -8 \frac{h_1^{2p_1+3} h_2 h_3}{(2p_1+2)!} \frac{\partial^{2p_1+2} f(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi^{2p_1+2}} \int_0^{m_2} dt^2 \int_0^{m_3} dt^3 \int_{-m_1}^0 Q_1(t^1) dt^1.$$

Integrând prin părți se găsește că

$$\int_{-m_1}^0 Q(t^1) dt^1 = t^1 Q_1(t^1) \Big|_{-m_1}^0 - \int_{-m_1}^0 t^1 Q_1'(t^1) dt^1 = - \int_{-m_1}^0 (t^1)^2 u_1(t^1) dt^1.$$

Înlocuind mai sus găsim în definitiv că

$$r_3^1 = 8h \frac{h_1^{2p_1+3} h_2 h_3 m_2 m_3}{(2p_1+2)!} D_{\xi_1}^{2p_1+2} \int_0^{m_1} (t^1)^2 u_1(t^1) dt^1.$$

La fel se procedează la evaluarea integralei triple I_3 din următorii doi termeni ai restului (45).

Al patrulea termen al restului este

$$\begin{aligned} r_3^4 &= -4 h_1^{2p_1+3} h_2^{2p_2+3} h_3 \int_0^{m_1} dt^2 \int_0^{m_2} dt^2 \int_0^{m_3} (t^1 t^2)^2 u_1(t^1) u_2(t^2) \\ &\cdot \left[\begin{array}{l} t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1 \\ t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \dots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2; F_{12} \end{array} \right] dt^3. \end{aligned}$$

Ținând seama de proprietatea de suprapunere a diferențelor divizate definite pe rețele Marchaud, să calculăm integrala

$$I_1 = \int_0^{m_3} dt^3 \int_0^{m_2} (t^2)^2 u_2(t^2) [t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \dots, t_0^2 + p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2; F_{12}] dt^2.$$

Pe baza rezultatelor precedente avem

$$I_1 = \frac{2m_3}{(2p_2+2)!} D_{\xi_2}^{2p_2+2} \int_0^{m_2} (t^2)^2 u_2(t^2) dt^2.$$

³⁾ Vezi [4].

Cu acestea

$$r_3^4 = - \frac{8m_3 h_1^{2p_1+3} h_2^{2p_2+3} h_3}{(2p_2+2)!} \int_0^{m_2} (t^2)^2 u_2(t^2) dt^2 \int_{-m_1}^0 (t^1)^2 u_1(t^1) \cdot [t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1; D_{\xi_2}^{2p_2+2}] dt^1.$$

Și acum, folosind iar evaluarea dată la primul termen al restului, se găsește că

$$r_3^4 = \frac{-8 h_1^{2p_1+3} h_2^{2p_2+3} h_3 m_3}{(2p_1+2)! (2p_2+2)!} D_{\xi_1}^{2p_1+2} D_{\xi_2}^{2p_2+2} \int_0^{m_1} (t^1)^2 u_1(t^1) dt^1 \int_0^{m_2} (t^2)^2 u_2(t^2) dt^2.$$

În mod analog se obțin

$$r_3^5 = \frac{-8 h_1^{2p_1+3} h_2 h_3^{2p_3+3} m_2}{(2p_1+2)! (2p_3+2)!} D_{\xi_1}^{2p_1+2} D_{\xi_3}^{2p_3+2} \int_0^{m_1} (t^1)^2 u_2(t^1) dt^1 \int_0^{m_3} (t^3)^2 u_3(t^3) dt^3.$$

$$r_3^6 = \frac{-8 h_1 h_2^{2p_2+3} h_3^{2p_3+3} m_1}{(2p_2+2)! (2p_3+2)!} D_{\xi_2}^{2p_2+2} D_{\xi_3}^{2p_3+2} \int_0^{m_2} (t^2)^2 u_1(t^2) dt^2 \int_0^{m_3} (t^3)^2 u_3(t^3) dt^3.$$

Al șaptelea și ultimul termen al restului este

$$r_3^7 = 8 h_1^{2p_1+3} h_2^{2p_2+3} h_3^{2p_3+3} \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} (t^1 t^2 t^3)^2 u_1(t^1) u_2(t^2) u_3(t^3) \cdot$$

$$\left[\begin{array}{l} t_0^1, t_0^1 \pm h_1, \dots, t_0^1 \pm p_1 h_1, t_0^1 \pm h_1 t^1 \\ t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \dots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2; f \\ t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \dots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3 \end{array} \right] \cdot dt^1 dt^2 dt^3.$$

În baza celor precedente avem

$$\int_0^{m_3} (t^3)^2 u_3(t^3) [t_0^3, t_0^3 \pm h_3, \dots, t_0^3 \pm p_3 h_3, t_0^3 \pm h_3 t^3; f] dt^3 = \frac{1}{(2p_3+2)!} D_{\xi_3}^{2p_3+2} \int_0^{m_3} (t^3)^2 u_3(t^3) dt^3$$

și

$$\frac{1}{(2p_3+2)!} \int_0^{m_3} (t^3)^2 u_3(t^3) dt^3 \int_0^{m_2} (t^2)^2 u_2(t^2) [t_0^2, t_0^2 \pm h_2, \dots, t_0^2 \pm p_2 h_2, t_0^2 \pm h_2 t^2; D_{\xi_2}^{2p_2+2}] dt^2 = \frac{1}{(2p_2+2)! (2p_3+2)!} D_{\xi_2}^{2p_2+2} D_{\xi_3}^{2p_3+2} \times \int_0^{m_2} (t^2)^2 u_2(t^2) dt^2 \int_0^{m_3} (t^3)^2 u_3(t^3) dt^3.$$

Astfel că

$$r_3^7 = \frac{8 h_1^{2p_1+3} h_2^{2p_2+3} h_3^{2p_3+3}}{(2p_1+2)! (2p_2+2)! (2p_3+2)!} D_{\xi_1}^{2p_1+2} D_{\xi_2}^{2p_2+2} D_{\xi_3}^{2p_3+2} \int_0^{m_1} (t^1)^2 u_1 dt^1 \times \int_0^{m_2} (t^2)^2 u_2 dt^2 \int_0^{m_3} (t^3)^2 u_3 dt^3.$$

Așadar în E_3 restul formulei de cubatură (39) poate fi exprimat prin formula

$$\begin{aligned} r_3 = r_3^1 + \dots + r_3^7 = & \frac{8m_2 m_3 h_1^{2p_1+3} h_2 h_3}{(2p_1+2)!} B_1 D_{\xi_1}^{2p_1+2} + \\ & + \frac{8m_1 m_3 h_1 h_2^{2p_2+3} h_3}{(2p_2+2)!} B_2 D_{\xi_2}^{2p_2+2} + \frac{8m_1 m_2 h_1 h_2 h_3^{2p_3+3}}{(2p_3+2)!} B_3 D_{\xi_3}^{2p_3+2} - \\ & - \frac{8m_3 h_1^{2p_1+3} h_2^{2p_2+3} h_3}{(2p_1+2)! (2p_2+2)!} B_1 B_2 D_{\xi_1}^{2p_1+2} D_{\xi_2}^{2p_2+2} - \\ & - \frac{8m_2 h_1^{2p_1+3} h_2 h_3^{2p_3+3}}{(2p_1+2)! (2p_3+2)!} B_1 B_3 D_{\xi_1}^{2p_1+2} D_{\xi_3}^{2p_3+2} - \\ & - \frac{8m_1 h_1 h_2^{2p_2+3} h_3^{2p_3+3}}{(2p_2+2)! (2p_3+2)!} B_2 B_3 D_{\xi_2}^{2p_2+2} D_{\xi_3}^{2p_3+2} + \\ & + \frac{8 h_1^{2p_1+3} h_2^{2p_2+3} h_3^{2p_3+3}}{(2p_1+2)! (2p_2+2)! (2p_3+2)!} B_1 B_2 B_3 D_{\xi_1}^{2p_1+2} D_{\xi_2}^{2p_2+2} D_{\xi_3}^{2p_3+2}, \end{aligned} \quad (47)$$

unde

$$B_i = \int_0^{m_i} (t^i)^2 u_i(t^i) dt^i.$$

12. O categorie importantă de formule de cubatură se obține din (39) dacă se ia $m_i = p_i$, $i = \overline{1, s}$. Asemenea formule le vom numi, împreună cu I. F. Steffensen [6] și S. E. Mikeladze [1], formule de tip închis.

În cazul când limitele integralei a $i - a$ ($i = \overline{1, s}$) sînt în afara intervalului ($t_0^i - p_i h_i, t_0^i + p_i h_i$), cu alte cuvinte $m_i > p_i$ ($i = \overline{1, s}$), obținem așa numitele formule de tip deschis.

Și, în sfîrșit, dacă $m_i < p_i$, obținem formulele de cubatură cu noduri așezate în afara domeniului de integrare.

§ 3. Cazuri particulare importante ale formulilor de cubatură precedente

13. Vom considera acum anumite cazuri particulare, care ni se par mai interesante, ale formulei (39).

În cazul $s=1$ majoritatea formulilor care se obțin au fost date de către I. F. Steffensen [6], S. E. Mikeladze [1], W. E. Milne [2], etc.

Schimbînd puțin notațiile, formula (39) în cazul $s=1$ devine

$$\begin{aligned} \int_{x_0-mh}^{x_0+mh} f(x) dx = & h \left[A_0^0 f(x_0) + \sum_{j=1}^p A_j^1 S_j^0 f(x_0) \right] + r_1 = \\ = & h \left[A_0^0 f(x_0) + \sum_{j=1}^p A_j^1 \left(f(x_0 + jh) + f(x_0 - jh) \right) \right] + r_1, \end{aligned} \quad (48)$$

unde

$$\frac{1}{2} A_0^0 = \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \int_0^m (x^2 - 1) \dots (x^2 - p^2) dx$$

$$\frac{1}{2} A_j^0 = \frac{(-1)^{p-j}}{(p-j)! (p+j)!} \int_0^m x^2 (x^2 - 1) \dots (x^2 - j - 1)^2$$

și

$$\frac{1}{2} r_1 = \frac{h^{2p+3}}{(2p+2)!} D_{\xi}^{2p+2} \int_0^m x^2 (x^2 - 1) \dots (x^2 - p^2) dx.$$

14. Dacă se ia în (48) $p=0$ se obține formula de cuadratură cu un nod

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} f(x) dx = 2mh f(x_0) + \frac{m^3 h^3}{3} f''(\xi), \quad (49)$$

iar dacă facem $p=1$ se găsește formula cu 3 noduri

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} f(x) dx = \frac{mh}{3} [2(3-m^2)f(x_0) + m^2 f(x_0+h) + f(x_0-h)] + \frac{m^3(3m^2-5)}{180} h^5 f^{(5)}(\xi). \quad (50)$$

Pentru $m=1$ se obține o binecunoscută formulă de tip închis: formula lui Cavalieri-Simpson.

Pentru $m=3$, $p=2$ se găsește formula de cuadratură de tip deschis

$$\int_{x_0-3h}^{x_0+3h} f(x) dx = \frac{h}{30} [234 f(x_0) - 126 f(x_0+h) + f(x_0-h) + 99 f(x_0+2h) + f(x_0-2h)] + \frac{41}{140} h^7 f^{(7)}(\xi)$$

de grad de exactitate 5.

15. În cazul $s=2$ formula de cubatură (39) se scrie

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} dx \int_{y_0-nk}^{y_0+nk} f(x,y) dy = hk \left[A_0^0 f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^p A_i^1 S_i^{0,1} f(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^q A_j^2 S_j^{0,2} f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q A_{i,j}^{1,2} S_i^{0,1} S_j^{0,2} f(x_0, y_0) \right] + r_2, \quad (51)$$

sau mai explicit

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} dx \int_{y_0-nk}^{y_0+nk} f(x,y) dy =$$

$$= hk \left[A_0^0 f(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^p A_i^1 \left(f(x_0 + ih, y_0) + f(x_0 - ih, y_0) \right) + \sum_{j=1}^q A_j^2 \left(f(x_0, y_0 + jk) + f(x_0, y_0 - jk) \right) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q A_{i,j}^{1,2} \left(f(x_0 + ih, y_0 + jk) + f(x_0 - ih, y_0 + jk) + f(x_0 + ih, y_0 - jk) + f(x_0 - ih, y_0 - jk) \right) \right] + r_2, \quad (52)$$

unde

$$\frac{1}{4} A_0^0 = \frac{(-1)^{p+q}}{(p!)^2 (q!)^2} \int_0^m \int_0^n u(x) v(y) dx dy$$

$$\frac{1}{4} A_i^1 = \frac{(-1)^{p+q-i}}{(p-i)! (p+i)! (q!)^2} \int_0^m \int_0^n v(y) a_i(x) dx dy \quad (53)$$

$$\frac{1}{4} A_j^2 = \frac{(-1)^{p+q-j}}{(p!)^2 (q-j)! (q+j)!} \int_0^m \int_0^n u(x) b_j(y) dx dy$$

$$\frac{1}{4} A_{i,j}^{1,2} = \frac{(-1)^{p+q-i-j}}{(p-i)! (p+i)! (q-j)! (q+j)!} \int_0^m \int_0^n a_i(x) b_j(y) dx dy$$

iar

$$u(x) = \prod_{i=1}^p (x^2 - i^2), \quad v(y) = \prod_{j=1}^q (y^2 - j^2)$$

$$a_i(x) = x^2 (x^2 - 1) \dots (x^2 - i - 1)^2 (x^2 - i + 1)^2 \dots (x^2 - p^2) \quad (54)$$

$$b_j(y) = y^2 (y^2 - 1) \dots (y^2 - j - 1)^2 (y^2 - j + 1)^2 \dots (y^2 - q^2).$$

Restul are următoarea expresie

$$\frac{1}{4} r_2 = \frac{nh^{2p+3}k}{(2p+2)!} D_{\xi}^{2p+2} \int_0^m x^2 u(x) dx + \frac{mhk^{2q+3}}{(2q+2)!} D_{\eta}^{2q+2} \int_0^n y^2 v(y) dy - \frac{h^{2p+3}k^{2q+3}}{(2p+2)! (2q+2)!} D_{\xi}^{2p+2} D_{\eta}^{2q+2} \int_0^m \int_0^n x^2 u(x) dx \int_0^n y^2 v(y) dy. \quad (55)$$

16. Dacă în (52) se ia $p=q=0$ se obține următoarea formulă de cubatură de tip deschis de grad de exactitate (1,1)

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} dx \int_{y_0-nk}^{y_0+nk} f(x,y) dy = 4mnhk f(x_0, y_0) = \rho,$$

unde

$$\rho = \frac{2}{3} m^3 n h^3 k D_{\xi}^2 + \frac{2}{3} m n^3 h k^3 D_{\eta}^2 - \frac{1}{9} m^3 n^3 h^3 k^3 D_{\xi}^2 D_{\eta}^2.$$

Se obține o formulă de cubatură importantă dacă se ia $p = q = 1$

$$\int_{x_0-mh}^{x_0+mh} dx \int_{y_0-nk}^{y_0+nk} f(x,y) dy =$$

$$= \frac{nmhk}{9} \left[4(m^2-3)(n^2-3)f(x_0, y_0) - 2m^2(n^3-3) \right.$$

$$\left. \left(f(x_0+h, y_0) + f(x_0-h, y_0) \right) - 2n^2(m^2-3) \left(f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0-k) \right) \right. + m^2 n^2 \left(f(x_0+h, y_0+k) \right.$$

$$\left. + f(x_0-h, y_0+k) + f(x_0+h, y_0-k) + f(x_0-h, y_0-k) \right) \left. \right] + \rho,$$

unde restul are expresia

$$\rho = \frac{h^5 k m^3 n (3m^2 - 5)}{90} D_{\xi}^4 + \frac{h k^5 m n^3 (3n^2 - 5)}{90} D_{\eta}^4 -$$

$$- \frac{h^5 k^5 m^3 n^3 (3m^2 - 5)(3n^2 - 5)}{144} D_{\xi}^4 D_{\eta}^4.$$

Făcînd mai sus $m = n = 1$ se ajunge la formula de cubatură a lui Cavalieri-Simpson pentru două variabile

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} dx \int_{y_0-k}^{y_0+k} f(x,y) dy =$$

$$= \frac{hk}{9} [f(x_0+h, y_0+k) + f(x_0-h, y_0+k) + f(x_0+h, y_0-k) + f(x_0-h, y_0-k)$$

$$+ 4(f(x_0+h, y_0) + f(x_0-h, y_0) + f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0-k)) + 16 f(x_0, y_0)] + \rho,$$

unde

$$\rho = -\frac{hk}{45} \left[h^4 D_{\xi}^4 + k^4 D_{\eta}^4 + \frac{1}{180} h^4 k^4 D_{\xi}^4 D_{\eta}^4 \right].$$

Am regăsit astfel pe altă cale expresia (25) a restului formulei lui Cavalieri-Simpson.

Pentru $m=n=2$ avem

$$\int_{x_0-2h}^{x_0+2h} dx \int_{y_0-2k}^{y_0+2k} f(x,y) dy =$$

$$= \frac{16hk}{9} \{ f(x_0, y_0) - 2[f(x_0+h, y_0) + f(x_0-h, y_0) + f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0-k)] +$$

$$+ 4[f(x_0+h, y_0+k) + f(x_0-h, y_0+k) + f(x_0+h, y_0-k) + f(x_0-h, y_0-k)] \} + \rho,$$

cu

$$\rho = \frac{56}{45} h^5 k D_{\xi}^4 + \frac{56}{45} h k^5 D_{\eta}^4 - \frac{196}{9} h^5 k^5 D_{\xi}^4 D_{\eta}^4.$$

Pentru $p=q=2$ formula (52) devine, luînd pentru simplificare $x_0=y_0=0$

$$\int_{-mh}^{mh} \int_{-nk}^{nk} f(x,y) dx dy =$$

$$= \frac{nmhk}{32400} \{ C_{00} f(0,0) + C_{10} [f(h,0) + f(-h,0)] + C_{20} [f(2h,0) + f(-2h,0)] \quad (56)$$

$$+ C_{01} [f(0,k) + f(0,-k)] + C_{02} [f(0,2k) + f(0,-2k)] + C_{11} [f(h,k) + f(-h,k)$$

$$+ f(h,-k) + f(-h,-k)] + C_{12} [f(h,2k) + f(-h,2k) + f(h,-2k) + f(-h,-2k)]$$

$$+ C_{21} [f(2h,k) + f(-2h,k) + f(2h,-k) + f(-2h,-k)] + C_{22} [f(2h,2k)$$

$$+ f(-2h,2k) + f(2h,-2k) + f(-2h,-2k)] \} + \rho.$$

unde

$$\rho = \frac{nmhk}{3780} [A h^6 D_{\xi}^6 + B k^6 D_{\eta}^6 - C h^6 k^6 D_{\xi}^6 D_{\eta}^6]$$

$$C_{00} = 36(3m^4 - 25m^2 + 60)(3n^4 - 25n^2 + 60)$$

$$C_{10} = -24m^2(3m^2 - 20)(2n^4 - 25n^2 + 60)$$

$$C_{20} = 6m^2(3m^2 - 5)(3n^4 - 25n^2 + 60)$$

$$C_{01} = -24n^2(3n^2 - 20)(3m^4 - 25m^2 + 60)$$

$$C_{02} = 6n^2(3n^2 - 5)(3m^4 - 25m^2 + 60)$$

$$C_{11} = 16m^2 n^2 (3m^2 - 20)(3n^2 - 20)$$

$$C_{12} = -4m^2 n^2 (3m^2 - 20)(3n^2 - 5)$$

$$C_{21} = -4m^2 n^2 (3m^2 - 5)(3n^2 - 20)$$

$$C_{22} = m^2 n^2 (3m^2 - 5)(3n^2 - 5)$$

iar

$$A = m^2(3m^4 - 21m^2 + 28)$$

$$B = n^2(3n^4 - 21n^2 + 28)$$

$$C = \frac{1}{15120} m^2 n^2 (3m^4 - 21m^2 + 28)(3n^4 - 21n^2 + 28).$$

Dacă în (56) se face $n=m=2$ se obține următoarea formulă de cubatură de tip închis, care are gradul parțial de exactitate (5,5):

$$\int_{-2h}^{2h} \int_{-2k}^{2k} f(x,y) dx dy = \frac{4hk}{2025} \{ 144 f(0,0) + 384 [f(-h,0) + f(h,0) + f(0,-k) + f(0,k)]$$

$$+ 84 [f(-2h,0) + f(0,-2k) + f(0,2k) + f(2h,0)] + 1024 [f(-h,-k) + f(-h,k) +$$

$$+ f(h,-k) + f(h,k)] + 224 [f(-2h,-k) + f(-2h,k) + f(-h,-2k) + f(-h,2k) +$$

$$+ f(h,-2k) + f(h,2k) + f(2h,-k) + f(2h,k)] + 49 [f(-2h,-2k) + f(-2h,2k)$$

$$+ f(2h,-2k) + f(2h,2k)] \} + \rho.$$

cu

$$\rho = -\frac{32hk}{945} \left[h^6 D_{\xi}^6 + k^6 D_{\eta}^6 + \frac{2}{945} h^6 k^6 D_{\xi}^6 D_{\eta}^6 \right].$$

Pentru $m=n=3$ se obține formula de cubatură de tip deschis

$$\int_{-3h}^{3h} \int_{-3k}^{3k} f(x,y) dx dy = \frac{9hk}{100} \{676f(0,0) - 364[f(h,0) + f(-h,0) + f(0,k) + f(0,-k)] + 286[f(0,2k) + f(0,-2k) + f(2h,0) + f(-2h,0)] + 196[f(h,k) + f(-h,k) + f(h,-k) + f(-h,-k)] - 154[f(h,2k) + f(-h,2k) + f(h,-2k) + f(-h,-2k) + f(2h,k) + f(-2h,k) + f(2h,-k) + f(-2h,-k)] + 121[f(2h,2k) + f(-2h,2k) + f(2h,-2k) + f(-2h,-2k)] + \rho,$$

unde

$$\rho = \frac{123}{70} hk \left[h^6 D_{\xi}^6 + k^6 D_{\eta}^6 - \frac{41}{840} h^6 k^6 D_{\xi}^6 D_{\eta}^6 \right].$$

Pentru $m=n=2$ din (56) se obține o formulă de cubatură cu noduri în afara domeniului de integrare, care merită să fie menționată.

17. In cazul $s=3$ formula de cubatură (39) se scrie

$$\begin{aligned} & \int_{x_0-m_1h_1}^{x_0+m_1h_1} dx \int_{y_0-m_2h_2}^{y_0+m_2h_2} dy \int_{z_0-m_3h_3}^{z_0+m_3h_3} f(x,y,z) dz = \\ & = h_1 h_2 h_3 \left[A_0^0 f(x_0, y_0, z_0) + \sum_{j_1=1}^{p_1} A_{j_1}^1 S_{j_1}^{0,1} f(x_0, y_0, z_0) + \sum_{j_2=1}^{p_2} A_{j_2}^2 S_{j_2}^{0,2} f(x_0, y_0, z_0) + \right. \\ & \quad + \sum_{j_3=1}^{p_3} A_{j_3}^3 S_{j_3}^{0,3} f(x_0, y_0, z_0) + \sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_2=1}^{p_2} A_{j_1 j_2}^{1,2} S_{j_1}^{0,1} S_{j_2}^{0,2} f(x_0, y_0, z_0) + \\ & \quad + \sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_3=1}^{p_3} A_{j_1 j_3}^{1,3} S_{j_1}^{0,1} S_{j_3}^{0,3} f(x_0, y_0, z_0) + \sum_{j_2=1}^{p_2} \sum_{j_3=1}^{p_3} A_{j_2 j_3}^{2,3} S_{j_2}^{0,2} S_{j_3}^{0,3} f(x_0, y_0, z_0) \\ & \quad \left. + \sum_{j_1=1}^{p_1} \sum_{j_2=1}^{p_2} \sum_{j_3=1}^{p_3} A_{j_1 j_2 j_3}^{1,2,3} S_{j_1}^{0,1} S_{j_2}^{0,2} S_{j_3}^{0,3} f(x_0, y_0, z_0) \right] + r_3, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} S_{j_1}^{0,1} f(x_0, y_0, z_0) &= f(x_0 + j_1 h_1, y_0, z_0) + f(x_0 - j_1 h_1, y_0, z_0) \\ S_{j_2}^{0,2} f(x_0, y_0, z_0) &= f(x_0, y_0 + j_2 h_2, z_0) + f(x_0, y_0 - j_2 h_2, z_0) \\ S_{j_3}^{0,3} f(x_0, y_0, z_0) &= f(x_0, y_0, z_0 + j_3 h_3) + f(x_0, y_0, z_0 - j_3 h_3) \end{aligned} \quad (58)$$

iar restul r_3 are expresia de la (42) cu modificarea notației deja folosită

$$\begin{aligned} l^1 &= x, & l^2 &= y, & l^3 &= z \\ l_0^1 &= x_0, & l_0^2 &= y_0, & l_0^3 &= z_0. \end{aligned}$$

Coefficienții formulei (57) au expresiile

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} A_0^0 &= \frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3}}{(p_1!)^2 (p_2!)^2 (p_3!)} \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} u_1(x) u_2(y) u_3(z) dx dy dz \\ \frac{1}{8} A_{j_1}^1 &= \frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_1}}{(p_1-j_1)! (p_1+j_1)! (p_2!)^2 (p_3!)} \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} v_{j_1}^1(x) u_2(y) u_3(z) dx dy dz \\ \frac{1}{8} A_{j_2}^2 &= \frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_2}}{(p_2-j_2)! (p_2+j_2)! (p_1!)^2 (p_3!)} \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} u_1(x) v_{j_2}^2(y) u_3(z) dx dy dz \\ \frac{1}{8} A_{j_3}^3 &= \frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_3}}{(p_3-j_3)! (p_3+j_3)! (p_1!)^2 (p_2!)} \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} u_1(x) u_2(y) v_{j_3}^3(z) dx dy dz \\ \frac{1}{8} A_{j_1 j_2}^{1,2} &= \frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_1-j_2}}{(p_1-j_1)! (p_1+j_1)! (p_2-j_2)! (p_2+j_2)! (p_3!)} \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} v_{j_1}^1(x) v_{j_2}^2(y) u_3(z) dx dy dz \\ \frac{1}{8} A_{j_1 j_3}^{1,3} &= \frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_1-j_3}}{(p_1-j_1)! (p_1+j_1)! (p_2!)^2 (p_3-j_3)! (p_3+j_3)!} \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} v_{j_1}^1(x) u_2(y) v_{j_3}^3(z) dx dy dz \\ \frac{1}{8} A_{j_2 j_3}^{2,3} &= \frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_2-j_3}}{(p_1!)^2 (p_2-j_2)! (p_2+j_2)! (p_3-j_3)! (p_3+j_3)!} \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} u_1(x) v_{j_2}^2(y) v_{j_3}^3(z) dx dy dz \\ \frac{1}{8} A_{j_1 j_2 j_3}^{1,2,3} &= \frac{(-1)^{p_1+p_2+p_3-j_1-j_2-j_3}}{(p_1-j_1)! (p_1+j_1)! (p_2-j_2)! (p_2+j_2)! (p_3-j_3)! (p_3+j_3)!} \int_0^{m_1} \int_0^{m_2} \int_0^{m_3} v_{j_1}^1(x) v_{j_2}^2(y) v_{j_3}^3(z) dx dy dz. \end{aligned}$$

18. Ne vom opri acum asupra unor cazuri particulare importante ale acestei formule.

Pentru $p_1=p_2=p_3=0$ se obține o formulă de cubatură care folosește un singur nod și are gradul parțial de exactitate (1,1,1)

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = 8 m_1 m_2 m_3 h_1 h_2 h_3 f(x_0, y_0, z_0) + \rho, \quad (59)$$

unde D este paralelipipedul

$$x_0 - m_1 h_1 \leq x \leq x_0 + m_1 h_1, \quad y_0 - m_2 h_2 \leq y \leq y_0 + m_2 h_2, \quad z_0 - m_3 h_3 \leq z \leq z_0 + m_3 h_3 \quad (60)$$

iar restul are expresia

$$\rho = \frac{m_1 m_2 m_3 h_1 h_2 h_3}{3} [4m_1^2 h_1^2 D_\xi^2 + 4m_2^2 h_2^2 D_\eta^2 + 4m_3^2 h_3^2 D_\zeta^2 - \frac{2}{3} m_1^2 m_2^2 h_1^2 h_2^2 D_\xi^2 D_\eta^2 - \frac{2}{3} m_1^2 m_3^2 h_1^2 h_3^2 D_\xi^2 D_\zeta^2 - \frac{2}{3} m_2^2 m_3^2 h_2^2 h_3^2 D_\eta^2 D_\zeta^2 + \frac{1}{9} m_1^2 m_2^2 m_3^2 h_1^2 h_2^2 h_3^2 D_\xi^2 D_\eta^2 D_\zeta^2].$$

Se observă că unicul nod pe care e definită această formulă se găsește în centrul de greutate al domeniului D , presupus omogen. Această formulă e de tip Gauss, întrucît folosește minimul de noduri posibil.

19. Făcînd în formula (57) $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, se obține formula de cubatură

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \frac{m_1 m_2 m_3 h_1 h_2 h_3}{27} [-8(m_1^2 - 3)(m_2^2 - 3)(m_3^2 - 3)f(x_0, y_0, z_0) + 4m_1^2(m_2^2 - 3)(m_3^2 - 3) \cdot S_1^{0,1} f(x_0, y_0, z_0) + 4(m_1^2 - 3)m_2^2(m_3^2 - 3)S_1^{0,2} f(x_0, y_0, z_0) + 4(m_1^2 - 3)(m_2^2 - 3)m_3^2 \cdot S_1^{0,3} f(x_0, y_0, z_0) - 2m_1^2 m_2^2 (m_3^2 - 3)S_1^{0,1} S_1^{0,2} f(x_0, y_0, z_0) - 2m_1^2 (m_2^2 - 3)m_3^2 \cdot S_1^{0,1} S_1^{0,3} f(x_0, y_0, z_0) - 2(m_1^2 - 3)m_2^2 m_3^2 S_1^{0,2} S_1^{0,3} f(x_0, y_0, z_0) + m_1^2 m_2^2 m_3^2 \cdot S_1^{0,1} S_1^{0,2} S_1^{0,3} f(x_0, y_0, z_0)] + \rho$$

unde

$$\rho = \frac{m_1^3(3m_1^2 - 5)m_2 m_3 h_1^5 h_2 h_3}{45} D_\xi^4 + \frac{m_1 m_2^3(3m_2^2 - 5)m_3 h_1 h_2^5 h_3}{45} D_\eta^4 + \frac{m_1 m_2 m_3^3(3m_3^2 - 5)h_1 h_2 h_3^5}{45} D_\zeta^4 - \frac{m_1^3(3m_1^2 - 5)m_2^3(3m_2^2 - 5)m_3}{16200} h_1^5 h_2^5 h_3 D_\xi^4 D_\eta^4 - \frac{m_1^3(3m_1^2 - 5)m_2 m_3^3(3m_3^2 - 5)}{16200} h_1^5 h_2 h_3^5 D_\xi^4 D_\zeta^4 - \frac{m_1 m_2^3(3m_2^2 - 5)m_3^3(3m_3^2 - 5)}{16200} h_1 h_2^5 h_3^5 D_\eta^4 D_\zeta^4 + \frac{m_1^3(3m_1^2 - 5)m_2^2(3m_2^2 - 5)m_3^3(3m_3^2 - 5)}{5832000} h_1^5 h_2^5 h_3^5 D_\xi^4 D_\eta^4 D_\zeta^4.$$

Din aceasta vom obține imediat următoarea formulă de cubatură care reprezintă extinderea formulei lui Cavalieri-Simpson la trei variabile

$$\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_1} dx \int_{y_0-h_2}^{y_0+h_2} dy \int_{z_0-h_3}^{z_0+h_3} f(x, y, z) dz = \frac{h_1 h_2 h_3}{27} \{ f(x_0+h_1, y_0+h_2, z_0+h_3) + f(x_0+h_1, y_0+h_2, z_0-h_3) + f(x_0-h_1, y_0+h_2, z_0+h_3) + f(x_0-h_1, y_0+h_2, z_0-h_3) + f(x_0-h_1, y_0+h_2, z_0-h_3) + f(x_0+h_1, y_0-h_2, z_0+h_3) + f(x_0+h_1, y_0-h_2, z_0-h_3) + f(x_0-h_1, y_0-h_2, z_0+h_3) + f(x_0-h_1, y_0-h_2, z_0-h_3) + 4[f(x_0, y_0+h_2, z_0+h_3) + f(x_0, y_0+h_2, z_0-h_3) + f(x_0, y_0-h_2, z_0+h_3) + f(x_0, y_0-h_2, z_0-h_3) + f(x_0+h_1, y_0, z_0+h_3) + f(x_0+h_1, y_0, z_0-h_3) + f(x_0-h_1, y_0, z_0+h_3) + f(x_0-h_1, y_0, z_0-h_3) + f(x_0+h_1, y_0-h_2, z_0) + f(x_0-h_1, y_0-h_2, z_0) + f(x_0+h_1, y_0+h_2, z_0) + f(x_0-h_1, y_0+h_2, z_0)] + 16[f(x_0, y_0, z_0+h_3) + f(x_0, y_0, z_0-h_3)] + \Omega f(x_0, y_0+h_2, z_0) + f(x_0, y_0-h_2, z_0) + f(x_0+h_1, y_0, z_0) + f(x_0-h_1, y_0, z_0) \} + \rho.$$

unde

$$\rho = -\frac{h_1 h_2 h_3}{45} \left[2h_1^4 D_\xi^4 + 2h_2^4 D_\eta^4 + 2h_3^4 D_\zeta^4 + \frac{1}{90} h_1^4 h_2^4 D_\xi^4 D_\eta^4 + \frac{1}{90} h_1^4 h_3^4 D_\xi^4 D_\zeta^4 + \frac{1}{90} h_2^4 h_3^4 D_\eta^4 D_\zeta^4 + \frac{1}{16200} h_1^4 h_2^4 h_3^4 D_\xi^4 D_\eta^4 D_\zeta^4 \right]$$

Dacă în formula (60) facem $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ se obține următoarea formulă de cubatură de tip deschis, care utilizează același număr de noduri ca și formula (61) și are la fel gradul de exactitate (3,3,3)

$$\int_{-2h_1}^{2h_1} \int_{-2h_2}^{2h_2} \int_{-2h_3}^{2h_3} f(x, y, z) dx dy dz = \frac{64h_1 h_2 h_3}{27} \{ -f(0,0,0) + 2[f(0,0,h_3) + f(0,0,-h_3) + f(0,h_2,0) + f(0,-h_2,0) + f(h_1,0,0) + f(-h_1,0,0)] - 4[f(0,h_2,h_3) + f(0,h_2,-h_3) + f(0,-h_2,h_3) + f(0,-h_2,-h_3) + f(h_1,0,h_3) + f(h_1,0,-h_3) + f(-h_1,0,h_3) + f(-h_1,0,-h_3) + f(h_1,h_2,0) + f(-h_1,h_2,0) + f(h_1,-h_2,0) + f(-h_1,-h_2,0)] + 8[f(h_1,h_2,h_3) + f(h_1,h_2,-h_3) + f(-h_1,h_2,h_3) + f(-h_1,h_2,-h_3) + f(h_1,-h_2,h_3) + f(h_1,-h_2,-h_3) + f(-h_1,-h_2,h_3) + f(-h_1,-h_2,-h_3)] \} + \rho,$$

unde

$$\rho = \frac{1792}{45} h_1 h_2 h_3 [4(h_1^4 D_\xi^4 + h_2^4 D_\eta^4 + h_3^4 D_\zeta^4) - \frac{98}{45} (h_1^4 h_2^4 D_\xi^4 D_\eta^4 + h_1^4 h_3^4 D_\xi^4 D_\zeta^4 + h_2^4 h_3^4 D_\eta^4 D_\zeta^4) + \frac{7}{2025} h_1^4 h_2^4 h_3^4 D_\xi^4 D_\eta^4 D_\zeta^4].$$

Alte formule de integrare numerică au fost date în lucrarea [4].

§. 4. Formula de integrare numerică a lui Cavalieri-Simpson în E_s

20. În încheiere vom da, sub formă explicită, două din formulele de cubatură mai importante deduse deja în cazurile $s=1, 2$ și 3 .

Astfel avem formula de cubatură de grad de exactitate $(1,1,\dots,1)$

$$\iiint \dots \int_D f(M) dM = 2^s m_1 \dots m_s h_1 \dots h_s f(M_0) + \rho,$$

unde D este hiperparalelipipedul

$$t_0^i - m_i h_i \leq t^i \leq t_0^i + m_i h_i \quad (i = \overline{1, s})$$

iar restul are expresia

$$\rho = \frac{m_1 m_2 \dots m_s h_1 \dots h_s}{3} [2^{s-1} m_1^2 h_1^2 D_{\xi_1}^2 + \dots + 2^{s-1} m_s^2 h_s^2 D_{\xi_s}^2 - 2^{s-2} \frac{m_1^2 m_2^2 h_1^2 h_2^2}{3} D_{\xi_1}^2 D_{\xi_2}^2 - \dots - 2^{s-2} \frac{m_s^2 h_s^2}{3} D_{\xi_{s-1}}^2 D_{\xi_s}^2 + \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{3^{s-1}} m_1^2 \dots m_s^2 h_1^2 \dots h_s^2 D_{\xi_1}^2 \dots D_{\xi_s}^2].$$

