ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A TEOREMEI DE CONTRACŢIE ÎN CLASA FUNCŢIILOR UNIVALENTE

DE

PETRU T. MOCANU

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R., din 17 aprilie 1957

1. Această lucrare este continuarea a două lucrări anterioare [1] şi [2]. În lucrarea [1] am dat o generalizare a teoremei contracţiei a lui Koebe relativă la delimitarea modulului unei funcţii $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ din clasa S (adică olomorfă şi univalentă în cercul unitate şi normată cu condiţia $f'(0) = 1$), atunci cînd $|z| = r < 1$. Generalizarea constă în înlocuirea cercului $|z| = r$ printr-o curbă închisă Jordan de ecuaţie polară $\rho = \rho(\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, situată în cercul unitate şi conţinînd originea în interior (sau pe curbă [2]). Rezultatul, pe scurt, este următorul:

Să considerăm în planul w curba Γ_1 a cărei rază vectoare R_1 şi unghi polar γ sînt date parametric sub forma

$$R_1 = \frac{\rho}{1-\rho^2}\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{\frac{\rho[1+\rho^2+2N]}{2\rho^2+(1+\rho^2)N}}, \tag{1}$$

$$\gamma = 0 - \frac{\rho'(1-\rho^2)}{2\rho^2+(1+\rho^2)N}\log\frac{1-\rho}{1+\rho}. \tag{2}$$

În mod analog considerăm curba Γ_2 de ecuaţii

$$R_2 = \frac{\rho}{1-\rho^2}\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{\frac{\rho[1+\rho^2-2N]}{2\rho^2-(1+\rho^2)N}}, \tag{3}$$

$$\gamma = \theta - \frac{\rho'(1-\rho^2)}{2\rho^2-(1+\rho^2)N}\log\frac{1-\rho}{1+\rho}, \tag{4}$$

unde

$$\rho = \rho(\theta),\ \rho' = \frac{d\rho}{d\theta},\ N = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}.$$

Fie Δ_1, respectiv Δ_2, componenta în planul w (care conține originea) a complementului curbei Γ_1, respectiv Γ_2. Să notăm cu Δ_1^* (0) cel mai mare domeniu stelar în raport cu originea conținut în Δ_1 și cu $\Delta_2^*(0)$ cel mai mic domeniu stelar în raport cu originea, care conține pe Δ_2.

Atunci putem afirma că Δ_1^* (0) *este cel mai mare domeniu ce este acoperit de orice imagine D a domeniului d mărginit de curba* $\rho=\rho(\theta)$ *prin funcții din clasa S, iar* $\Delta_2^*(0)$ *este cel mai mic domeniu ce acoperă orice imagine D.*

În lucrarea [2] am dat o aplicație a acestei teoreme în cazul cînd

$$\rho = \cos\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Ne propunem acum să studiem cîteva proprietăți generale ale curbelor Γ_1 și Γ_2. Vom arăta mai întîi că între R (care poate fi sau R_1 sau R_2), γ, ρ și θ există o relație foarte simplă. Pentru aceasta să eliminăm pe ρ' între ecuațiile (1) și (2), pe care le mai putem scrie sub forma

$$\frac{\rho[1+\rho^2+2N]}{2\rho^2+(1+\rho^2)N}\log\frac{1-\rho}{1+\rho} = \log\frac{R_1(1-\rho^2)}{\rho},$$

$$\frac{\rho'(1-\rho^2)}{2\rho^2+(1+\rho^2)N}\log\frac{1-\rho}{1+\rho} = \theta-\gamma.$$

Împărțind aceste două ecuații membru cu membru, obținem relația

$$\frac{\rho'(1-\rho^2)}{\rho[1+\rho^2+2N]} = \frac{1}{\alpha},$$

unde

$$\alpha = \frac{1}{\theta-\gamma}\log\frac{R_1(1-\rho^2)}{\rho}.$$

De aici deducem

$$N = \frac{\alpha(1-\rho^2)\rho' - \rho(1+\rho^2)}{2\rho}. \tag{5}$$

Ridicînd ambii membrii la pătrat, obținem ecuația de gradul doi în ρ'

$$[\alpha^2(1-\rho^2)^2 - 4\rho^2]\rho'^2 - 2\alpha\rho(1-\rho^4)\rho' + \rho^2(1-\rho^2)^2 = 0. \tag{6}$$

Pe de altă parte, din (2), ținînd seamă de (5), obținem relația

$$\frac{2\rho\rho'}{\alpha(1+\rho^2)\rho' - \rho(1-\rho^2)} = \frac{1}{\beta},$$

unde

$$\beta = \frac{1}{\theta-\gamma}\log\frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

De aici obținem

$$\rho' = \frac{\rho(1-\rho^2)}{\alpha(1+\rho^2)-2\beta\rho}. \tag{7}$$

Înlocuind pe ρ' dat de (7) în (6), obținem relația

$$\alpha^2(1-\rho^2)^2 - 4\rho^2 - 2\alpha(1+\rho^2)[\alpha(1+\rho^2)-2\beta\rho] + [\alpha(1+\rho^2)-2\beta\rho]^2 = 0,$$

de unde, făcînd calculele, obținem

$$\beta^2-\alpha^2 = 1.$$

Deoarece

$$\beta-\alpha = \frac{1}{\theta-\gamma}\log\frac{\rho}{R_1(1+\rho)^2},$$

$$\beta+\alpha = \frac{1}{\theta-\gamma}\log\frac{R_1(1-\rho)^2}{\rho},$$

rezultă că relația căutată este

$$\log\frac{\rho}{R_1(1+\rho)^2}\log\frac{R_1(1-\rho)^2}{\rho} = (\theta-\gamma)^2.$$

Eliminînd pe ρ' între (3) și (4), obținem și în acest caz exact aceeași relație, așa că în definitiv putem scrie că între R, γ, ρ și θ există întotdeauna relația

$$\log\frac{\rho}{R(1+\rho)^2}\cdot\log\frac{R(1-\rho)^2}{\rho} = (\theta-\gamma)^2. \tag{8}$$

3. Să notăm

$$\xi = \log R.$$

Putem privi atunci relația (8) ca o ecuație de gradul doi în ξ, care se scrie

$$\xi^2 - 2\log\frac{\rho}{1-\rho^2}\xi + \log\frac{\rho}{(1+\rho)^2}\log\frac{\rho}{(1-\rho)^2} + (\theta-\gamma)^2 = 0.$$

Celor două soluții ξ_1 și ξ_2 ale acestei ecuații le vor corespunde cele două valori ale lui R. Aceste soluții sînt

$$\xi_{1,2} = \log\frac{\rho}{1-\rho^2} \pm \sqrt{\left(\log\frac{\rho}{1-\rho^2}\right)^2 - \log\frac{\rho}{(1+\rho)^2}\cdot\log\frac{\rho}{(1-\rho)^2} - (\theta-\gamma)^2}.$$

Dacă notăm

$$\delta = \log\frac{1+\rho}{1-\rho},$$

se verifică imediat că

$$\xi_1 = \log \frac{\rho}{1-\rho^2} - \sqrt{\delta^2 - (\theta - \gamma)^2},$$

$$\xi_2 = \log \frac{\rho}{1-\rho^2} + \sqrt{\delta^2 - (\theta - \gamma)^2},$$

de unde, deoarece $\xi_1 < \xi_2$, obținem

$$R_1 = \frac{\rho}{1-\rho^2} e^{-\sqrt{\delta^2 - (\theta-\gamma)^2}}, \tag{9}$$

$$R_2 = \frac{\rho}{1-\rho^2} e^{\sqrt{\delta^2 - (\theta-\gamma)^2}}. \tag{10}$$

4. În vederea studierii graficului curbelor Γ_1 și Γ_2, vom calcula derivatele $\frac{dR_1}{d\gamma}$ și $\frac{dR_2}{d\gamma}$.

Din formula (1) obținem printr-o derivare logaritmică în raport cu θ,

$$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{dR_1}{d\theta} = \frac{\rho'}{\rho} + \frac{2\rho\rho'}{1-\rho^2} - \frac{2\rho'}{1-\rho^2} \cdot \frac{\rho[1+\rho^2+2N]}{2\rho^2 + (1+\rho^2)N} +$$

$$+ \frac{\rho'(1-\rho^2)}{N} \cdot \frac{(1-\rho^2)(\rho'^2 - \rho\rho'') + 2\rho'^2 N}{[2\rho^2 + (1+\rho^2)N]^2} \log \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{\rho'(1-\rho^2)N}{\rho[2\rho^2 + (1+\rho^2)N]} +$$

$$+ \frac{\rho'(1-\rho^2)}{N} \cdot \frac{(1-\rho^2)(\rho'^2 - \rho\rho'') + 2\rho'^2 N}{[2\rho^2 + (1+\rho^2)N]^2} \log \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Deci

$$\frac{dR_1}{d\theta} = \frac{\rho'(1-\rho^2)N}{\rho[2\rho^2 + (1+\rho^2)N]} U R_1, \tag{11}$$

unde

$$U = 1 + \frac{\rho[(1-\rho^2)(\rho'^2 - \rho\rho'') + 2\rho'^2 N]}{(\rho^2 + \rho'^2)[2\rho^2 + (1+\rho^2)N]^2} \log \frac{1-\rho}{1+\rho}. \tag{12}$$

Din formula (2), derivînd în raport cu θ, obținem

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = 1 + \frac{2\rho'^2}{2\rho^2 + (1+\rho^2)N} -$$

$$- \frac{[\rho''(1-\rho^2) - 2\rho\rho'^2][2\rho^2 + (1+\rho^2)N] - \rho'(1-\rho^2)\left[4\rho\rho' + 2\rho\rho' N + \frac{\rho'(\rho+\rho'')(1+\rho^2)}{N}\right]}{[2\rho^2 + (1+\rho^2)N]^2} \times$$

$$\times \log \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{N[1+\rho^2+2N]}{2\rho^2 + (1+\rho^2)N} + \frac{\rho[1+\rho^2+2N][(1-\rho^2)(\rho'^2 - \rho\rho'') + 2\rho'^2 N]}{N[2\rho^2 + (1+\rho^2)N]^2} \log \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Deci

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{[1+\rho^2+2N]N}{2\rho^2 + (1+\rho^2)N} U. \tag{13}$$

Împărțind relațiile (11) și (13) membru cu membru, obținem în definitiv

$$\frac{dR_1}{d\gamma} = \frac{\rho'(1-\rho^2)}{\rho[1+\rho^2+2N]} R_1 = \frac{\rho'}{1+\rho^2+2N} \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{\frac{\rho[1+\rho^2+2N]}{2\rho^2 + (1+\rho^2)N}}. \tag{14}$$

Se vede imediat că $\frac{dR_1}{d\gamma}$ are același semn cu ρ' și se anulează o dată cu ρ'. Rezultă deci următoarea

T e o r e m ă. *R_1 are valori extreme pentru acele valori ale lui θ pentru care $\rho(\theta)$ este extrem.*

În mod analog obținem relațiile

$$\frac{dR_2}{d\theta} = -\frac{\rho'(1-\rho^2)N}{\rho[2\rho^2 - (1+\rho^2)N]} V R_2,$$

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = -\frac{[1+\rho^2-2N]N}{2\rho^2 - (1+\rho^2)N} V,$$

unde

$$V = 1 + \frac{\rho[(1-\rho^2)(\rho'^2 - \rho\rho'') - 2\rho'^2 N]}{(\rho^2 + \rho'^2)[2\rho^2 - (1+\rho^2)N]} \log \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Deci

$$\frac{dR_2}{d\gamma} = \frac{\rho'(1-\rho^2)}{\rho(1+\rho^2-2N)} R_2 = \frac{\rho'}{1+\rho^2-2N} \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^{\frac{\rho[1+\rho^2-2N]}{2\rho^2 - (1+\rho^2)N}}. \tag{15}$$

Teorema enunțată mai sus pentru R_1 este valabilă și pentru R_2, numai dacă expresia $1+\rho^2-2N$ păstrează un semn constant pentru orice θ.

Să observăm acum că dacă funcția ρ verifică inegalitatea diferențială $U>0$, atunci curba Γ_1 este stelară în raport cu originea. Într-adevăr, în acest caz din (13) rezultă că unghiul polar γ variază monoton cu θ. Atunci R_1 va crește sau descrește o dată cu $\rho(\theta)$.

Dacă $U < 0$ curba Γ_1 de asemenea este stelară, însă R_1 crește cînd ρ descrește și invers.

Putem deci enunța următoarea

T e o r e m ă. *Dacă funcția $\rho(\theta)$ este astfel ca expresia U dată de (12) să păstreze un semn constant, atunci curba Γ_1 este stelară în raport cu originea $w=0$.*

Pe de altă parte, se verifică ușor că avem întotdeauna

$$2\rho^2 - (1+\rho^2)N < 0.$$

Deoarece atît $1+\rho^2-2N$ cît și V pot schimba de semn, rolul lui U de mai înainte îl va juca produsul $[1+\rho^2-2N]V$. Deci dacă acest produs va păstra un semn constant, curba Γ_2 va fi stelară în raport cu originea $w=0$.

5. Formulele (1), (2) și (3), (4) sînt valabile și dacă curba $\rho=\rho(\theta)$ trece prin origine. În acest caz stelaritatea se va considera tot în raport cu originea $w=0$, care acum este pe curba Γ (Γ_1 sau Γ_2). Din cauza condiției de normare a clasei S, orice direcție interioară domeniului d va fi interioară și domeniilor $\Delta_1^*(0)$ sau $\Delta_2^*(0)$.

Să mai precizăm încă următorul lucru. Funcția $\rho(\theta)$ a fost presupusă uniformă și netedă (adică continuă împreună cu prima sa derivată). Această ipoteză este necesară pentru ca funcțiile care dau pe R și γ să fie continue. Însă din punct de vedere geometric, problema extremală pe care ne-am pus-o inițial [1], are sens și în cazul cînd curba $\rho=\rho(\theta)$ prezintă puncte singulare (unghiulare). În acest caz derivata ρ' va avea puncte de discontinuitate de prima speță. Fie $\theta=\theta_0$ un astfel de punct și fie ρ_1' și ρ_2' limitele de la dreapta, respectiv de la stînga, ale acestei derivate. În vecinătatea lui θ_0 putem aproxima pe $\rho(\theta)$ cu un arc de curbă care se racordează cu curba $\rho(\theta)$. Fie $\{r_n(\theta)\}$ o familie de astfel de arce care pentru $n\to\infty$ să tindă către punctul unghiular considerat al curbei. Înseamnă că și anumite porțiuni ale curbei Γ (adică sau Γ_1 sau Γ_2) vor fi aproximate de curbe ce corespund arcelor r_n. Dar pentru un n destul de mare $r_n(\theta)$ variază foarte puțin pe cînd $r_n'(\theta)$ variază foarte mult. De aici, printr-un proces de trecere la limită, rezultă că porțiunea de curbă Γ corespunzătoare lui $\theta=\theta_0$ se obține dacă vom considera în formulele (1), (2) sau (3), (4) pe θ și ρ ficși (θ_0 respectiv $\rho_2=\rho(\theta_0)$) și vom varia pe ρ'. În definitiv ecuația acestei porțiuni va fi dată de (9), respectiv de (10), unde $\theta=\theta_0$ iar γ variază între γ_1 și γ_2, care sînt limitele de la stînga și respectiv de la dreapta ale funcției $\gamma=\gamma(\theta)$ (din (2) sau (4)) cînd $\theta\to\theta_0$.

6. Vom da acum o aplicație simplă a rezultatelor anterioare în cazul cînd curba $\rho=\rho(\theta)$ trece prin origine și are un punct unghiular.

Pentru aceasta să considerăm ecuația diferențială

$$1+\rho^2-2N=0$$

care, trecînd pe $2N$ în membrul drept și ridicînd la pătrat, devine

$$(1+\rho^2)^2=4(\rho^2+\rho'^2)$$

de unde obținem imediat ecuațiile diferențiale

$$2\rho'-(1-\rho^2)=0 \tag{16}$$

și

$$2\rho'+(1-\rho^2)=0. \tag{17}$$

Integrala ecuației (16) care satisface la condiția $\rho(0)=0$ este

$$\rho=\rho_1=\operatorname{th}\frac{\theta}{2}=\frac{e^\theta-1}{e^\theta+1}$$

iar integrala ecuației (17) care satisface la condiția $\rho(\pi)=0$ este

$$\rho=\rho_2=\operatorname{th}\frac{\pi-\theta}{2}.$$

Aceste două integrale reprezintă două spirale situate în cercul unitate; ele pornesc din origine, sînt simetrice în raport cu axa Oy și tind asimptotic către cercul $|z|=1$.

Să considerăm atunci în cercul unitate curba reprezentată sub formă polară de ecuațiile

$$\left.\begin{array}{ll}\rho=\rho_1 & \text{pentru } 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \rho=\rho_2 & \text{pentru } \dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi.\end{array}\right\}$$

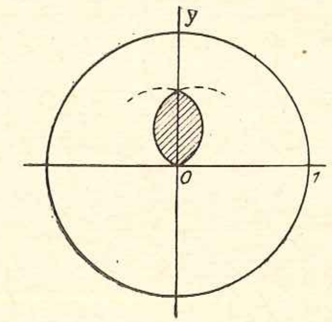

Fig. 1

Această curbă prezintă un punct unghiular pentru $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, unde $\rho=\operatorname{th}\dfrac{\pi}{4}=0{,}65\ldots$ (fig. 1).

Într-adevăr, pentru $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\rho_1'=\dfrac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)^2}$

iar $\rho_2'=-\dfrac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)^2}$. Cînd $0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}$, porțiunea corespunzătoare a curbelor Γ_1, respectiv Γ_2, se obține făcînd în formulele (1), (2) respectiv (3), (4) pe $\rho=\rho_1$. În mod analog cînd $\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$, vom pune în aceste formule $\rho=\rho_2$.

În cazul cînd $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, vom obține porțiunile corespunzătoare ale curbelor Γ_1 și Γ_2 considerînd în formulele amintite pe ρ' ca variabilă (între ρ_1' și ρ_2') și făcînd pe $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ și $\rho=\operatorname{th}\dfrac{\pi}{4}$. Dacă punem $N_1=\sqrt{\rho_1^2+\rho_1'^2}$ se verifică imediat că avem

$$2\rho_2'+(1+\rho_1^2)N_1=\frac{4[e^{4\theta}+1]}{(e^\theta+1)^4},$$

$$\rho_1[1+\rho_1^2+2N_1]=\operatorname{th}\frac{\theta}{2}\cdot\frac{4(e^{2\theta}+1)}{(e^\theta+1)^2},$$

de unde

$$\frac{\rho_1'[1+\rho_1^2+2N_1]}{2\rho_1^2+(1+\rho_1^2)N_1}=\operatorname{th}2\theta.$$

De asemenea,

$$\frac{\rho_1'(1-\rho_1^2)}{2\rho_1^2+(1+\rho_1^2)N_1}=\frac{1}{\operatorname{ch}2\theta}$$

și

$$\frac{\rho_1'(1+\rho_1^2)}{2\rho_1^2-(1+\rho_1^2)N_1}=-1.$$

Ținînd seama de aceste relații, formulele (1) și (2) devin

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\theta\cdot e^{-\theta\,\mathrm{th}\,2\theta} \\ \gamma &= 2\,\theta\,\frac{\mathrm{ch}^2\,\theta}{\mathrm{ch}\,2\,\theta} \end{aligned}\quad \left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)\cdot\right\} \tag{18}$$

De asemenea formulele (3) și (4) devin

$$\left.\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\theta \\ \gamma &= 0 \end{aligned}\quad \left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right).\right\} \tag{19}$$

Pentru cazul cînd $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$, în mod cu totul analog (înlocuind în formulele respective pe ρ cu ρ_2), obținem

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,(\pi-\theta)\,e^{-(\pi-\theta)\,\mathrm{th}_2(\pi-\theta)}, \\ \gamma &= \frac{2\,\theta\,\mathrm{ch}^2(\pi-\theta)-\pi}{\mathrm{ch}\,2\,(\pi-\theta)}, \end{aligned}\quad \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right)\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,(\pi-\theta), \\ \gamma &= \pi, \end{aligned}\quad \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right).\right\} \tag{21}$$

Cînd $\theta=\frac{\pi}{2}$, după cum am specificat mai înainte, porțiunile din curbele Γ_1, respectiv Γ_2, se obțin făcînd în formulele (9), respectiv (10), pe $\theta=\frac{\pi}{2}$ și $\rho=\mathrm{th}\,\frac{\pi}{4}$. În acest caz

$$\delta=\log\frac{1+\rho}{1-\rho}=\frac{\pi}{2}.$$

Deci

$$R_1=\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\,e^{-\sqrt{\gamma(\pi-\gamma)}}\qquad\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right) \tag{22}$$

și

$$R_2=\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\,e^{\sqrt{\gamma(\pi-\gamma)}}\qquad\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right). \tag{23}$$

Ecuațiile (18), (20) și (22), respectiv (19), (21) și (23), vor defini în întregime curba Γ_1, respectiv Γ_2.

Să construim acum aceste curbe. Se verifică imediat că, din formula (18) avem $\frac{d\gamma}{d\theta}>0$, deoarece $U>0$. Pe de altă parte avem

$$\frac{dR_1}{d\gamma}=\frac{\mathrm{ch}^2\frac{\theta}{2}}{\mathrm{ch}\,2\,\theta}\,e^{-\theta\,\mathrm{th}\,2\,\theta}>0.$$

Deci cînd θ crește de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, γ crește de la 0 la valoarea

$$\gamma_1=\pi\,\frac{\mathrm{ch}^2\frac{\pi}{2}}{\mathrm{ch}\,\pi}=1{,}7\ldots>\frac{\pi}{2},$$

iar R_1 crește de la 0 la valoarea

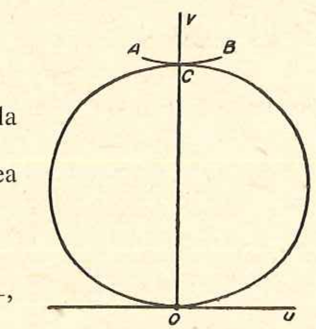

Fig. 2

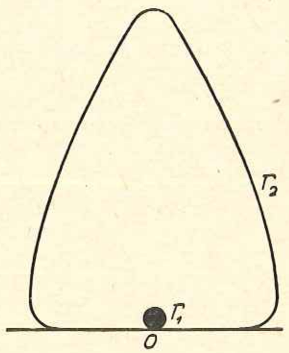

Fig. 3

$$R_1^0=\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}\,e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{th}\,\pi}=0{,}24\ldots$$

Curba Γ_1 pornește din origine și ajunge în punctul A (fig. 2).

Cînd $\theta=\frac{\pi}{2}$, se verifică imediat că punctul curent de pe curbă se va întoarce din punctul A pînă în C, unde γ are valoarea $\frac{\pi}{2}$, iar R_1 valoarea $R_1=\frac{1}{2}\,\mathrm{th}\frac{\pi}{2}\,e^{-\frac{\pi}{2}}=0{,}23\ldots$, apoi merge din C în B pe un arc simetric cu AC în raport cu axa Ov. Cînd θ variază de la $\frac{\pi}{2}$ la π, punctul de pe curbă Γ_1 pornește din B și descrie arcul BCO simetric cu ACO. Este evident că domeniul interior curbei astfel construită va fi domeniul $\Delta_1{}^*(0)$.

Să studiem acum alura curbei Γ_2. Formulele (19), (21) arată că atunci cînd $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$, respectiv $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$, porțiunea corespunzătoare a curbei Γ_2 este segmentul (O, D), unde D are abscisa $R_2^0=\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}$ și respectiv segmentul (E,O), unde E are abscisa $-R_2^0$ (fig. 3).

Să studiem curba Γ_2 cînd $\theta = \frac{\pi}{2}$. În acest caz din ecuația (10) deducem

$$\frac{dR_2}{d\gamma} = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{\sqrt{\gamma(\pi-\gamma)}} e^{\sqrt{\gamma(\pi-\gamma)}}.$$

Se vede imediat că atunci cînd γ variază de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, R_2 crește de la R_2^0 la $R_2^1 = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{2}} = 5{,}53\ldots$ care este o valoare maximă, și apoi cînd γ crește de la $\frac{\pi}{2}$ la π, R_2 descrește (simetric) de la R_2^1 la R_2^0. Această porțiune se racordează cu segmentul $(E,\ D)$ deoarece pentru $\gamma = 0$ și $\gamma = \pi$, $\frac{dR_2}{d\gamma}$ tinde la $+\infty$, respectiv $-\infty$.

În figura 2 graficul este dat la o scară de 20 ori mai mare decît cel din figura 3.

Institutul de calcul al Academiei R.P.R.,
Filiala Cluj

ОБ ОБОБЩЕНИИ КОНТРАКЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Настоящая работа является продолжением предыдущих работ [1] и [2]. В работе [1] автор дал обобщение контракционной теоремы Кебе в класс S однолистных функций (в случае, когда круг $|z| = r < 1$ заменен замкнутой кривой с полярным уравнением $\rho = \rho(\theta)$). В настоящей работе изучаются свойства кривых Γ_1 и Γ_2, полярно параметрически определенные уравнениями (1), (2) соответственно (3), (4). Далее рассматривается случай, когда кривая $\rho = \rho(\theta)$ обладает угловыми точками, и дается простое приложение полученных результатов.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE CONTRACTION DANS LA CLASSE DES FONCTIONS UNIVALENTES

RÉSUMÉ

Le présent travail est la suite de deux travaux antérieurs [1] et [2]. Dans le travail [1], l'auteur avait donné une généralisation du théorème de contraction de Koebe dans la classe S de fonctions univalentes (au cas où le cercle $|z| = r < 1$

est remplacé par une courbe fermée dont l'équation polaire est $\rho = \rho(\theta)$). Dans le présent travail, il étudie les propriétés des courbes Γ_1 et Γ_2 définies en coordonnées polaires et paramétriques par les équations (1), (2), respectivement (3), (4). Il étudie ensuite le cas où la courbe $\rho = \rho(\theta)$ présente des points singuliers et donne une application simple des résultats obtenus.

BIBLIOGRAFIE

1. P. T. MOCANU, *O generalizare a teoremei contracției în clasa S de funcții univalente*. Studii și cercetări de matematică, Acad. R.P.R., Fil. Cluj, nr. 3–4, 8 (1957).
2. — *Despre o teoremă de acoperire în clasa funcțiilor univalente*. Gazeta matematică și fizică, seria A, nr. 8, 473–477 (1958).