DESPRE GRUPURI CARE COINCID CU GRUPUL LOR COMUTATOR

DE

Z. PÁTER

Să notăm grupul comutator al grupului A cu $K(A)$. Grupul A se numește un grup *perfect*, dacă $K(A) = A$.

Vom demonstra proprietatea următoare: *un grup este atunci și numai atunci perfect, dacă nu conține nici un subgrup normal de indice prim.*

Într-adevăr, dacă $A \neq K(A)$, atunci A conține un subgrup normal maximal B cu proprietatea $B \supseteq K(A)$. În acest caz grupul factorial A/B e simplu (B fiind maximal) și abelian (fiindcă $B \supseteq K(A)$). Deci indicele grupului B, adică ordinul grupului A/B este un număr prim, adică A conține un subgrup normal de indice prim.

Invers, dacă A conține subgrupul normal B de indice prim, atunci A/B este un grup ciclic, adică abelian. A/B fiind un grup abelian, B conține grupul comutator $K(A)$, pentru că $A \neq K(A)$. În cazul cînd B este elementul unitate, indicele lui B este în același timp și ordinul lui A, deci A este ciclic, pentru că grupul lui comutator este elementul unitate, adică $A \neq K(A)$, ceea ce era de demonstrat.

Se vede imediat, că orice grup simplu necomutativ este un grup perfect. Cu ajutorul relației

$$K(\prod_{\alpha} A_{\alpha}) = \prod_{\alpha} K(A_{\alpha})$$

se demonstrează că produsul direct al grupurilor perfecte este un grup perfect.

Dacă grupul A finit conține un subgrup perfect diferit de elementul unitate, atunci el conține și un șir de subgrupuri

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \tag{1}$$

cu proprietatea că fiecare termen al șirului este subgrup normal al termenului precedent și ultimul termen este un grup perfect.

Fie B un subgrup perfect al grupului A. Dacă A este un grup perfect sau B este subgrup normal al lui A, atunci afirmația noastră este demonstrată. Dacă B nu este subgrup normal al lui A, atunci alegem un subgrup normal A_1 al lui A

care conține B. Un astfel de grup există totdeauna, căci firește $A \supset K(A) \supset B$. Mai departe fie A_2 un subgrup normal al lui A_1, care și el conține pe B și așa mai departe pînă cînd ajungem la un șir de subgrupuri normali

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k, \tag{2}$$

unde A_k nu conține nici un subgrup normal în care este conținut B. Dacă B este un subgrup normal al lui A_k, atunci completînd șirul (2) cu B, teorema este demonstrată. Iar dacă B nu este subgrup normal al lui A_k, atunci se poate demonstra, că A_k este un grup perfect.

Într-adevăr, dacă A_k este un grup simplu, atunci el este perfect, deci teorema este demonstrată. Dacă A_k este compus, atunci el are un subgrup normal C. Să notăm intersecția lui B și C cu D. În acest caz D este diferit de B și este un subgrup normal al lui B. Grupului B/D îi corespunde subgrupul $H/C = B \cup C/C$ din A_k/C. Dacă H/C este diferit de A_k/C, atunci ordinul lui A_k/C, adică indicele lui C în A_k este un număr compus. Dacă $H/C = A_k/C$, atunci indicele subgrupului normal C în A_k este egal cu indicele subgrupului normal D în B, deci este un număr compus, B fiind un grup perfect.

Deci subgrupul normal arbitrar C al lui A_k nu are indice prim. Nici elementul unitate nu poate să aibă indice prim, fiindcă grupul A_k avînd subgrupul B, are ca ordin un număr compus. Grupul A_k este deci un grup perfect.

Vom demonstra acum teorema următoare:

T e o r e m ă. *Un grup finit este atunci și numai atunci rezolubil, dacă nu conține nici un subgrup perfect* [1]).

Demonstrație. Să presupunem că grupul finit A nu este perfect și nici nu conține un subgrup perfect. În acest caz A conține un subgrup normal A_1 de indice p_1 prim. Primii membrii ai șirului de compoziție vor fi atunci A și A_1. Dar nici A_1 nu este perfect, deci conține un subgrup normal A_2 de indice p_2 prim. Termenul al treilea al șirului de compoziție va fi A_2. Acest proces îl putem continua pînă cînd ajungem la elementul unitate și putem constata că șirul factorilor de compoziție nu conține decît numere prime, deci grupul A este rezolubil.

Invers, dacă A conține subgrupul perfect B, atunci A nu poate fi rezolubil căci orice subgrup al unui grup rezolubil este rezolubil, deci nu poate fi perfect.

Corolar. Dacă grupul A conține un subgrup simplu necomutativ, atunci A nu este rezolubil.

De exemplu, grupul simetric de substituții cu mai mult decît patru elemente nu este rezolubil fiindcă grupul altern este simplu și necomutativ.

Vom arăta acum, că teorema cunoscută — *un grup este atunci și numai atunci rezolubil, dacă șirul grupurilor comutatori se sfîrșește cu elementul unitate* — este o consecință a teoremei demonstrată mai sus.

Într-adevăr dacă, ultimul membru al șirului grupurilor comutatori nu este elementul unitate, atunci el trebuie să fie un grup perfect.

Invers, dacă grupul A are un subgrup perfect B, atunci B este conținut în fiecare membru al șirului comutatorilor, deci șirul nu poate să se termine cu elementul unitate.

Școala medie Baraolt

[1]) Neglijăm firește subgrupul banal format din elementul unitate.

О ГРУППАХ, СОВПАДАЮЩИХ СО СВОИМ КОММУТАНТОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Т е о р е м а. *Группа является совершенной тогда и только тогда, когда она не содержит нормальных делителей простого индекса.*

С л е д с т в и е. *Если конечная группа А содержит отличную от единичного элемента совершенную подгруппу, то она содержит и последовательность подгрупп*

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k$$

со свойством, что каждый член последовательности является нормальным делителем предыдущего, а последний член — совершенной группой.

Конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда она не содержит совершенных подгрупп, за исключением тривиальной подгруппы, состоящей из единичного элемента.

DES GROUPES QUI COÏNCIDENT AVEC LEUR GROUPE COMMUTATEUR

RÉSUMÉ

Dans cette Note, on démontre le théorème: *un groupe est parfait dans le cas et seulement dans le cas où il ne contient aucun sous-groupe normal à indice prime.*

Les conséquences suivantes en résultent:

Si le groupe A, fini, contient un sous-groupe parfait, différent de l'élément unité, il contiendra aussi une suite de sous-groupes

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k$$

jouissant de la propriété que chaque terme de la suite est un sous-groupe normal du terme précédent et que le dernier terme est un groupe parfait.

Un groupe fini est résoluble dans le cas et seulement dans le cas où il ne contient aucun sous-groupe parfait, abstraction faite du sous-groupe banal formé par l'élément unité.