ECUAŢII FUNCŢIONALE ÎN LEGĂTURĂ CU NOMOGRAFIA

DE

FRANCISC RADÓ

Comunicare prezentată la şedinţa de comunicări a Institutului de calcul al Academiei R.P.R., Filiala Cluj, din 10 martie 1958

INTRODUCERE

Începînd cu primele abace, concepute de Maurice d'Ocagne la sfîrşitul secolului trecut, nomogramele s-au răspîndit din ce în ce mai mult. O dată cu dezvoltarea tehnicii volumul de calcule necesare în problemele ştiinţifice şi de proiectare a crescut în continuu, ajungînd azi la proporţii uriaşe. Tehnica calculului trebuia să se dezvolte şi ea pentru a putea face faţă noilor cerinţe. În această dezvoltare nomografia are un rol important. Împreună cu rigla de calcul (care de fapt este de asemenea o nomogramă) a servit ca punct de plecare pentru maşinile analoage de calcul. La nomogramă se utilizează relaţia dintre mărimile geometrice ale unei figuri pentru a rezolva acea categorie de ecuaţii, care revin tocmai la această relaţie; maşinile analoage de calcul se bazează pe acelaşi principiu, cu deosebirea că în locul relaţiei geometrice avem o relaţie între mărimi fizice măsurabile cu aparate (tensiuni, frecvenţe etc.). Deşi astăzi nomograma este depăşită din anumite puncte de vedere de maşinile analoage şi în special de maşinile digitale de calcul, totuşi a păstrat importanţa sa practică şi o va păstra încă mult timp, deoarece domeniul de aplicaţie al nomogramelor nu se suprapune cu cel al maşinilor moderne de calcul.

Construirea nomogramelor ridică o serie de probleme teoretice, care în mică măsură sînt azi rezolvate. Aceste probleme se încadrează în categoria problemelor legate în general de aparatele de calcul, formînd o ramură a analizei numerice. Iată unele probleme teoretice de nomografie: 1) stabilirea condiţiilor în care o ecuaţie poate fi reprezentată cu un anumit tip de nomogramă; 2) precizia calculului nomografic; 3) determinarea transformărilor nomogramei care conduc la precizia maximă; 4) construirea nomogramelor aproximative.

În această lucrare ne vom ocupa numai cu prima problemă din cele înșirate și anume în cazuri simple. Condiții de reprezentare nomografică sînt cunoscute în multe cazuri, dacă se presupune că funcțiile care intervin sînt derivabile. Am considerat însă că restricția de derivabilitate nu este o condiție firească impusă de natura nomogramelor și de aceea vom presupune numai continuitatea și monotonia funcțiilor. Aceste condiții apar în urma definiției date nomogramei în această lucrare. În aceste ipoteze J. A c z é l a dat condiția de reprezentare nomografică într-un caz particular sub forma unei ecuații funcționale. Acest rezultat va fi extins în lucrare în diferite direcții.

Vom pune în evidență, pentru cazurile studiate, legătura dintre nomografie și teoria ecuațiilor funcționale. Condițiile de reprezentare nomografică vor fi exprimate prin ecuații fucționale, iar ecuațiile scărilor nomogramelor vor fi determinate de asemenea prin rezolvări de ecuații funcționale.

Pe de altă parte, am reușit să folosim o ecuație funcțională, provenită din caracterizarea unui tip de nomograme, la elaborarea unei metode noi de a rezolva ecuații funcționale cu funcții necunoscute de două variabile independente. Este vorba de ecuația funcțională (sau condiția funcțională echivalentă), care caracterizează funcțiile de forma $f(x,y) = H^{-1}[F(x) + G(y)]$, numite în lucrare pseudosume și care sînt reprezentabile prin nomograme cu trei scări rectilinii. Prin metoda bazată pe ea am rezolvat ecuația asociativității, a bisimetriei, a tranzitivității, diferite modificări și generalizări ale lor, toate în condiții de continuitate și monotonie. Unele din aceste ecuații au fost rezolvate de alți autori (pe alte căi și fără a arăta legătura lor), altele sînt pentru prima dată rezolvate fără ipoteze de derivabilitate.

Aceeași metodă conduce la rezolvarea mai multor probleme în legătură cu nomogramele compuse. S-a pus în evidență legătura dintre condițiile de existență ale reprezentării nomografice cu trei scări rectilinii, pe de o parte, și ale nomogramelor compuse, pe de altă parte.

Ecuațiile funcționale studiate, pe lîngă interpretările lor nomografice, au și alte interpretări geometrice, de exemplu se pot da în baza lor diferite proprietăți caracteristice pentru cubice.

Soluția ecuației funcționale de bază în metoda noastră exprimă o proprietate cunoscută în geometria țesuturilor, dar nu a fost recunoscută utilitatea ei în legătură cu ecuațiile funcționale.

Sper că am reușit să arăt pe cazurile simple considerate că legarea nomografiei de teoria ecuațiilor funcționale este rodnică pentru fiecare din aceste ramuri ale matematicii și sper că primele încercări în acest sens vor putea fi continuate.

J. A c z é l a sistematizat o categorie de metode în teoria ecuațiilor funcționale privind funcțiile de o variabilă. În lucrarea de față am încercat să introduc o oarecare sistematizare în metodele de rezolvare ale unor ecuații funcționale cu funcții necunoscute de două variabile.

Exprim mulțumirile mele tovarășului prof. T i b e r i u P o p o v i c i u, membru corespondent al Academiei R.P.R., pentru îndrumările date și pentru sfaturile sale atît de prețioase, cu care a ajutat elaborarea acestei lucrări.

CAPITOLUL I

NOȚIUNI INTRODUCTIVE

1. Familii de curbe, rețele și țesuturi [1]). În această lucrare un sistem de curbe va fi numit *familie de curbe* într-un domeniu simplu conex D, dacă ele formează imaginea topologică a unui fascicul de drepte paralele, trasate într-un domeniu D' al planului euclidian, convex în raport cu aceste drepte (adică D' conține cîte o porțiune conexă din aceste drepte) (fig. 1).

Din această definiție rezultă:

1) prin fiecare punct al domeniului D trece o curbă a familiei;

2) două curbe diferite alefamiliei nu au nici un punct comun în D.

Fie (x, y) coordonatele carteziene ale unui punct din D' și (u, v) coordonatele punctului care îi corespunde în D prin transformarea topologică considerată. Transformarea topologică se scrie astfel

$$\left.\begin{aligned} u &= f\,(x,\ y) \\ v &= g\,(x,\ y), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

unde funcțiile f și g sînt continue în D' și ecuațiile (1) pot fi rezolvate în raport cu x și y

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi\,(u,\ v) \\ y &= \psi\,(u,\ v), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

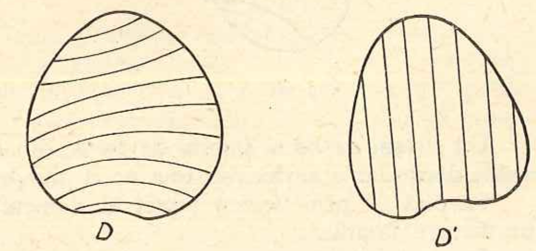

Fig. 1

funcțiile φ și ψ fiind continue în D. Presupunînd că axa Oy are aceeași direcție cu fascicului de drepte paralele, ecuația acestui fascicul este x = const., iar ecuația familiei de curbe corespunzătoare

$$\varphi\,(u,\ v) = \text{const.} \qquad (3)$$

Liniile de nivel ale funcției φ sînt tocmai curbele familiei noastre, cînd constanta din membrul al doilea ia toate valorile dintr-un anumit interval deschis $(\alpha,\ \beta)$. Dacă această constantă variază monoton în $(\alpha,\ \beta)$, atunci curba corespunzătoare se deplasează mereu în același sens.

Există o infinitate de transformări topologice prin care curbele familiei devin drepte paralele, deci funcția $\varphi\,(u, v)$ nu este univoc determinată. Fie $\bar{\varphi}\,(u, v)$ = const. o altă formă a ecuației familiei de curbe. Deoarece $\bar{\varphi}$ depinde numai de curba pe care ne aflăm, avem evident $\bar{\varphi} = F\,(\varphi)$, unde F este o funcție continuă și deoarece φ și $\bar{\varphi}$ au același rol, ecuația $\bar{\varphi} = F\,(\varphi)$ se poate rezolva în raport cu φ, deci F este o funcție strict monotonă. Invers, dacă F este o funcție continuă și strict monotonă, atunci împreună cu (3)

$$F\,[\varphi\,(u,\ v)] = \text{const.}$$

este de asemenea ecuația familiei de curbe considerată.

---

[1]) Definițiile date pentru familiile de curbe, rețele și țesuturi sînt cele formulate de B l a s c h k e și B o l [11].

Să luăm ecuația (3) a familiei de curbe cu φ fixat. Fiecărei curbe din familie îi atașăm valoarea constantei din membrul al doilea și scriem lîngă unele curbe această valoare (*cota*). În acest fel se obține *o familie de curbe cotate* (fig. 2).

O familie de curbe poate fi cotată într-o infinitate de moduri; în baza celor arătate mai sus, toate aceste familii de curbe cotate pot fi obținute dintr-una prin aplicarea unei funcții continue și strict monotone asupra cotelor acesteia.

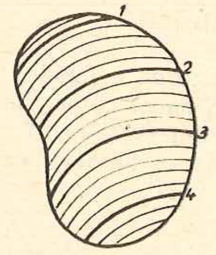

Fig. 2

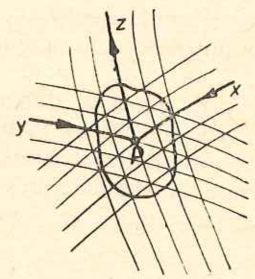

Fig. 3

Un sistem de două familii de curbe din domeniul D se numește o *rețea de curbă*, dacă cîte o curbă din cele două familii se taie cel mult într-un punct.

Rezultă că prin fiecare punct al domeniului D trece cîte o singură curbă din fiecare familie.

Domeniul D și rețeaua de curbe trasată în el pot fi transformate topologic într-un domeniu D' respectiv în două fascicule de drepte paralele cu axele de coordonate, domeniul D' fiind convex în raport cu dreptele paralele cu axele de coordonate. Într-adevăr, fie $\varphi(u, v) = \text{const.}$ și $\psi(u, v) = \text{const.}$ ecuațiile celor două familii de curbe. Transformarea definită prin ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}\right\}$$

este univocă și continuă și din definiția rețelei rezultă că unei perechi de valori (x, y) îi corespunde cel mult un punct (u, v), deci transformarea este biunivocă și continuă, adică topologică. Din definiția familiei de curbe urmează că punctele corespunzătoare unei valori date ale funcției $\varphi(u, v)$ formează un arc conex, deci domeniul D' este convex în raport cu paralele la axa Oy și tot așa în raport cu paralele la axa Ox.

Invers, orice imagine topologică a unui domeniu și a dreptelor paralele cu axele de coordonate trasate în el formează o rețea de curbe, dacă domeniul e convex în raport cu paralele la axe.

O rețea de curbe formată din două familii de curbe cotate poartă numele de *rețea cotată*.

Trei familii de curbe formează un *țesut* într-un domeniu D, dacă familiile luate două cîte două formează rețele de curbe.

Un țesut format din trei familii de curbe cotate se numește *nomogramă cu linii cotate* (fig. 3).

2. Nomograme cu linii cotate. Să notăm cotele curbelor celor trei familii ale unei nomograme cu linii cotate în domeniul D cu x, y respectiv z. Fiind dată

cîte o valoare pentru x și y, acestora le corespund cîte o curbă din familiile respective, care se taie cel mult într-un punct din D. Să admitem că avem un punct de intersecție P; prin P trece o curbă din familia a treia, care are o cotă determinată z. Deci perechilor de valori (x, y) dintr-un anumit domeniu al planului xy le corespund cîte o valoare z

$$z = f(x, y). \tag{4}$$

Din definițiile de la punctul **1** rezultă imediat că funcția f este *continuă*. Ea este în același timp *strict monotonă*[1]). Într-adevăr, să transformăm topologic rețeaua cotată x, z în paralele la două axe rectangulare; atunci transformata familiei de curbe y, formînd cu cele două familii de drepte paralele cîte o rețea de curbe, este intersectată de dreptele acestor familii în cîte un punct cel mult, deci pentru $y = \textit{const.}$, z este o funcție strict monotonă de x. La fel z este o funcție strict monotonă de y, cînd $x = \textit{const.}$

Cu ajutorul nomogramei din figura 3 putem rezolva grafic ecuația (4) și anume: fiind date valori pentru x și y, căutăm curba din familia z, care trece prin punctul de intersecție al curbelor de cote date și citim cota curbei găsite.

Zicem că ecuația (4) este *ecuația nomogramei* din figura 3 și că această nomogramă este o *reprezentare* a ecuației (4) (sau reprezintă ecuația (4)).

Orice ecuație (4) poate fi reprezentată cu o nomogramă cu linii cotate, dacă funcția f este continuă și monotonă.

Pentru demonstrație alegem în mod arbitrar rețeaua cotată x, y, de exemplu paralel cu două axe rectangulare. Reprezentînd grafic $f(x, y) = \textit{const.}$ se obține o familie de curbe, pentru că prin transformarea topologică $x' = f(x, y)$, $y' = y$ se ajunge la o familie de drepte paralele. Luînd această familie pentru curbele z, obținem o nomogramă cu rețele, pentru că transformarea topologică de mai înainte transformă rețeaua y, z în paralele la axe, iar transformarea topologică $x' = x$, $y' = f(x, y)$ rețeaua x, z în paralele la axe. Ecuația nomogramei astfel construită este evident ecuația (4) de la care am plecat.

Putem deci enunța

Teorema I, 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația* (4) *să fie reprezentabilă cu o nomogramă cu linii cotate este ca funcția f să fie continuă și strict monotonă.*

Variabila z nu joacă un rol special. Fiind date valori pentru oricare două variabile, valoarea corespunzătoare pentru cea de a treia variabilă se poate afla la fel de pe nomograma din figura 3. Pentru a pune în evidență rolul simetric al variabilelor x, y, z, scriem ecuația (4) sub forma

$$F(x, y, z) = 0, \tag{5}$$

unde F este o funcție continuă și ecuația (5) este rezolvabilă în raport cu fiecare variabilă. Rezultă că, dacă rezolvăm ecuația (5) în raport cu o variabilă, aceasta devine o funcție continuă și strict monotonă de celelalte două variabile.

[1]) O funcție de mai multe variabile se zice monotonă (respectiv strict monotonă), dacă ea este monotonă (respectiv strict monotonă) în raport cu fiecare variabilă, pentru valori fixate oarecare ale celorlalte variabile.

Exemplu. Pentru ecuația

$$k^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)+p\left(k\operatorname{tg}\varphi-\frac{1}{3}\right)=0,$$

întîlnită în rezistența materialelor, avem nomograma arătată în figura 4, dacă φ și p variază în intervalele (20°; 45°) respectiv (0,4; 1). Pentru aceste valori ecuația dată satisface condițiile impuse ecuației (5). Ecuația familiilor de curbe sînt

$$y=\operatorname{tg}\varphi\cdot x,\quad ky=\frac{x}{3}-k^2,\; x^2+y^2-px=0.$$

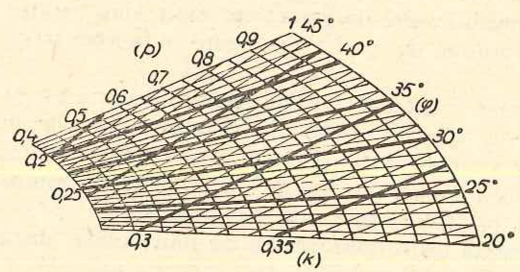

Fig. 4

Eliminînd din aceste trei ecuații pe x și y, regăsim ecuația dată.

Observație. Nomogramele cu linii cotate nu sînt precizate în literatură în sensul definiției date la punctul **1** [27], [28], [26], [23]. Se consideră în general trei mulțimi de curbe cotate în planul u, v

$$f(u,v,x)=0,$$
$$g(u,v,y)=0,$$
$$h(u,v,z)=0,$$

unde funcțiile f, g, h sînt presupuse continue (de fapt în tratatele de nomografie se lucrează numai cu funcții derivabile). Din aceste curbe cotate se formează o nomogramă căreia i se atașează ecuația $F(x,y,z)=0$, obținută prin eliminarea lui u și v din ecuațiile de mai sus. În acest fel se ajunge la afirmația că, dacă $F(x,y,z)$ este o funcție continuă, atunci ecuația $F(x,y,z)=0$ este totdeauna rezolvabilă cu o nomogramă cu linii cotate. Dar în acest caz curba x intersectează curba y într-o mulțime de puncte, care poate fi densă chiar într-un domeniu plan și nomograma devine iluzorie. Condiția de derivabilitate nu modifică acest fapt.

Prin restricția impusă de definițiile adaptate la punctul **1**, la nomogramele cu linii cotate corespund tocmai ecuațiile $z-f(x,y)=0$, în care f este o funcție monotonă și continuă. Aici nu intervine derivabilitatea.

O nomogramă cu linii cotate poate fi supusă la o transformare topologică oarecare, fără a modifica ecuația ei. Printr-o transformare topologică convenabilă rețeaua cotată x, y a nomogramei poate fi transformată într-o rețea cotată oarecare. Ecuația nomogramei fiind dată și rețeaua x, y aleasă, nomograma este evident univoc determinată.

Prin alegerea adecvată a rețelei x, y se caută a avea o nomogramă formată din anumite linii simple (de exemplu drepte sau cercuri sau drepte și cercuri sau conice etc). În această categorie de probleme cea mai importantă este realizarea nomogramei cu trei familii de drepte *(problema anamorfozei)*.

Să vedem întîi în ce condiții formează trei mulțimi de drepte cotate o nomogramă cu linii cotate? Are loc

T e o r e m a I, 2. *Să presupunem că fiecare din mulțimile de drepte cotate*

$$\begin{aligned} a_1(x)\,u+b_1(x)\,v+c_1(x)&=0,\\ a_2(y)\,u+b_2(y)\,v+c_2(y)&=0,\\ a_3(z)\,u+b_3(z)\,v+c_3(z)&=0, \end{aligned}\tag{6}$$

în care a_i, b_i, c_i *sînt funcții continue respectiv în intervalele* (α_i, β_i) $(i=1,2,3)$ *acoperă domeniul simplu conex* D *al planului* (u, v), *convex în raport cu dreptele* (6). *Atunci următoarele condiții sînt necesare și suficiente pentru ca dreptele cotate* (6) *să formeze o nomogramă cu linii cotate în* D:

1) *două drepte oarecare din aceeași mulțime să nu se intersecteze în* D;

2) *două mulțimi diferite de drepte cotate să nu aibă nici o dreaptă comună.*

Aceste condiții sînt evident necesare. Pentru a arăta că sînt și suficiente să observăm că condiția 1) atrage după sine faptul că fiecare ecuație (6) poate fi rezolvată univoc în raport cu x respectiv y respectiv z. De exemplu, fie $x=\varphi(u,v)$ soluția primei ecuații. Transformarea

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(u,v)\\ y&=v \end{aligned}\right\}\tag{7}$$

este univocă și continuă. Ecuațiile (7) pot fi rezolvate univoc în raport cu u și v

$$\left.\begin{aligned} u&=-\frac{b_1(x)\,y+c_1(x)}{a_1(x)},\\ v&=y, \end{aligned}\right\}\tag{7'}$$

deci transformarea (7) este topologică. Ea transformă prima mulțime de drepte (6) în paralele la axa Oy, deci această mulțime de drepte formează o familie de drepte și la fel celelalte două mulțimi de drepte (6). Avînd în vedere că două drepte diferite se taie într-un punct cel mult, condiția 2) asigură că cele trei familii de drepte (6), luate două cîte două, formează rețele și prin urmare cele trei familii formează o nomogramă cu linii cotate.

Ecuația nomogramei formată din dreptele (6), condițiile teoremei I, 2 fiind satisfăcute, se scrie astfel

$$\begin{vmatrix} a_1(x) & b_1(x) & c_1(x)\\ a_2(y) & b_2(y) & c_2(y)\\ a_3(z) & b_3(z) & c_3(z) \end{vmatrix}=0\tag{8}$$

sau schimbînd notația funcțiilor $\dfrac{a_i}{c_i}=f_i$, $\dfrac{b_i}{c_i}=g_i$, $(i=1,2,3)$,

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1\\ f_2(y) & g_2(y) & 1\\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix}=0.\tag{9}$$

Ecuația (9) poartă numele de *ecuația lui Soreau. Condiția necesară și suficientă pentru ca o ecuație* (4) *(f (x, y) fiind o funcție continuă și strict monotonă) să fie reprezentabilă cu o nomogramă cu drepte cotate este ca ea să se poată scrie sub forma* (9).

Condiția necesară și suficientă pe care o ecuație trebuie să îndeplinească pentru ca să se poată scrie sub forma ecuației lui Soreau a făcut obiectul multor studii și poartă numele de *condiția de anamorfoză*. Ea a fost stabilită de G r o n w a l l [15] și are o formă foarte anevoioasă; se exprimă prin existența unei integrale comune la un sistem de două ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea (pe care nu le scriem deoarece nu se leagă de cele ce urmează). Amintim doar că S. V. S m i r n o v a arătat că această condiție poate fi verificată prin operații de derivare și eliminare [36]. Dizertația aceluiași autor adîncește problema posibilității de anamorfoză iarăși în condiții de derivabilitate [37]. Pentru o serie de cazuri particulare sînt cunoscute condiții mai simple (cu ipoteze de derivabilitate).

3. Nomograme cu puncte aliniate. Fie

$$u = f(x) \tag{10}$$

o funcție continuă și strict monotonă, definită în intervalul (α, β) și (a,b) intervalul valorilor lui u. Dacă atașăm fiecărui punct al intervalului (a,b) de pe axa Ou valoarea x corespunzătoare (și marcăm pe (a,b) valori ale lui x în progresie aritmetică), atunci obținem o *scară rectilinie*. Ecuația (10) se numește *ecuația scării*. Intervalul (a,b) este *suportul scării*. Din monotonia funcției $f(x)$ rezultă că valorilor diferite ale lui x le corespund puncte diferite pe scară.

În mod analog ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x) \\ v &= g(x) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

definesc o *scară curbilinie* în planul (u,v). Presupunem că funcțiile f și g sînt continue pentru $\alpha < x < \beta$ și că la valori diferite x corespund puncte diferite pe scară. Arcul de curbă definit de ecuațiile (11), *numit suportul scării*, este atunci un arc simplu sau jordanian (imaginea topologică a unui segment de dreaptă). Scara curbilinie este imaginea topologică a unei scări rectilinii.

O *nomogramă cu puncte aliniate* este figura duală a unei nomograme cu drepte cotate.

Să considerăm o nomogramă cu drepte cotate și fie (6) ecuațiile dreptelor cotate; această nomogramă rezolvă ecuația (8) sau (9), pe care o scriem $z = f(x,y)$. Să aplicăm planului ei π o corelație (fig. 5). Prin alegerea convenabilă a sistemului de coordonate proiective în planul transformat π', o dreaptă p din π se transformă într-un punct P din π' avînd coordonate punctuale egale cu coordonatele plückeriene ale dreptei p. Familia de drepte cotate x are coordonatele plückeriene neomogene

$$f_1(x) = \frac{a_1(x)}{c_1(x)}, \quad g_1(x) = \frac{b_1(x)}{c_1(x)},$$

deci ea se transformă în locul geometric al punctelor cotate $[f_1(x), g_1(x)]$, adică într-o scară x (deoarece funcțiile $f_1(x)$ și $g_1(x)$ sînt continue și la două valori diferite ale lui x corespund drepte cotate diferite deci și puncte diferite). Familiile de drepte cotate y și z se transformă de asemenea în cîte o scară. Un sistem de valori x, y, z atunci și numai atunci verifică ecuația $z = f(x,y)$, dacă dreptele cotate corespunzătoare p,q,r, sînt concurente, deci atunci și numai atunci cînd punctele P,Q,R de pe cele trei scări cu cotele x,y respectiv z sînt coliniare.

Prin urmare o nomogramă cu puncte aliniate se utilizează în felul următor: dacă se dau valori pentru x și y, unim printr-o dreaptă (rezolvantă) punctele scărilor x și y de cote date și citim cota punctului de intersecție al scării z cu această dreaptă Nomograma se utilizează în mod analog, cînd se dau valori pentru alte două variabile,

Condițiile 1) și 2) ale teoremei I, 2 se traduc în condițiile necesare și suficiente pe care trei scări oarecare trebuie să satisfacă pentru ca ele să formeze o nomo-

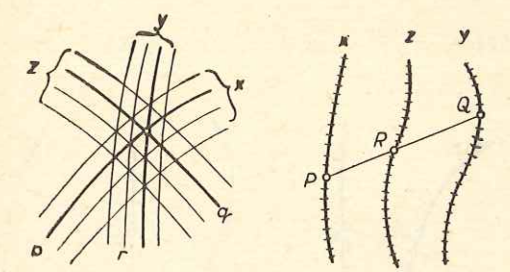

Fig. 5

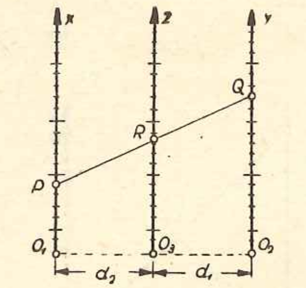

Fig. 6

gramă cu puncte aliniate. Observînd că punctelor domeniului D le corespund în figura duală mulțimea de drepte rezolvante, condițiile 1) și 2) devin:

1′) O dreaptă care intersectează o scară în două puncte să nu aibă nici un punct comun cu o altă scară;

2′) Scările să nu aibe puncte comune.

Condiția 2′) rezultă din 1′). Dacă suportele scărilor au tangentă în orice punct atunci condiția 1′) se poate înlocui cu

1″) Tangentele scărilor să nu taie celelalte scări.

Din punct de vedere practic nomograma cu puncte aliniate este mai avantajoasă decît cea cu linii cotate, pentru că atît construcția, cît și utilizarea ei este mai simplă. Însă nu orice ecuație reprezentabilă cu nomograme cu linii cotate este rezolvabilă și prin nomograme cu puncte aliniate. Nomogramele cu puncte aliniate rezolvă exact aceleași ecuații ca și figura duală, nomograma cu drepte cotate, deci ecuațiile anamorfozabile (cele ce pot fi scrise sub forma (9)).

Fără a ne mai referi la figura duală, ecuația nomogramei cu puncte aliniate poate fi scrisă și nemijlocit: fie

$$\left.\begin{aligned} u &= f_1(x) \\ v &= g_1(x) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} u &= f_2(y) \\ v &= g_2(y) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} u &= f_3(z) \\ v &= g_3(z) \end{aligned}\right\}$$

ecuațiile celor trei scări. Relația între cotele x,y,z ale punctelor P,Q,R situate pe aceeași dreaptă rezolvantă este ecuația (9).

O nomogramă cu puncte aliniate poate fi supusă unei transformări proiective oarecare.

Unele scări ale nomogramei cu puncte aliniate, sau chiar toate, pot să fie rectilinii. Înțelegem prin *genul* nomogramei, numărul scărilor curbilinii.

Nomograma de genul 0 revine totdeauna printr-o transformare proiectivă convenabilă la tipurile reprezentate în figurile 6 și 7.

În figura 6 avem o nomogramă cu trei scări paralele.

Fie

$$\overline{O_1 P} = f_1(x),\ \overline{O_2 Q} = f_2(y),\ \overline{O_3 R} = f_3(z)$$

ecuațiile scărilor. Se vede imediat că între cotele x,y,z ale punctelor P,Q,R situate pe aceeași dreaptă rezolvantă avem relația

$$H(z) = F(x) + G(y), \tag{12}$$

unde

$$F(x) = \frac{d_1}{d_1+d_2} f_1(x),\ G(y) = \frac{d_2}{d_1+d_2} f_2(y),\ H(z) = f_3(z).$$

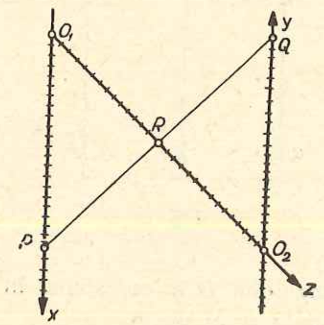

Fig. 7

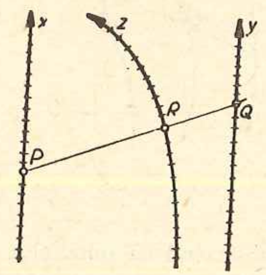

Fig. 8

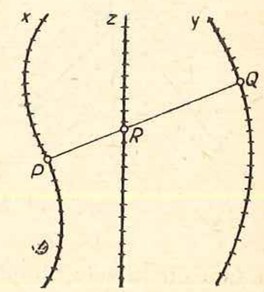

Fig. 9

Funcțiile F,G,H sînt continue și strict monotone ca și f_1, f_2, f_3; funcțiile lor inverse se notează cu F^{-1}, G^{-1}, H^{-1}.

Prin alegerea convenabilă a scărilor putem rezolva orice ecuație de forma (12) cu ajutorul nomogramei din figura 6. Ecuația (12) va juca un rol fundamental în cele ce urmează; ea se mai scrie

$$z = H^{-1}[F(x) + G(y)]. \tag{13}$$

Funcțiile de două variabile definite de ecuația (13) vor fi numite *pseudosume*.

În figura 7 am reprezentat nomograma Z, formată din două scări paralele și una secantă. Fie $O_1O_2 = a$ și $\overline{O_1 P} = f_1(x), \overline{O_2 Q} = f_2(y), \overline{O_1 R} = f_3(z)$ ecuațiile scărilor. Între cotele x,y,z ale punctelor P,Q,R situate pe aceeași dreaptă avem relația

$$\frac{f_3(z)}{a - f_3(z)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(y)}.$$

Funcțiile

$$F(x) = \ln f_1(x),\ G(y) = \ln \frac{1}{f_2(y)},\ H(z) = \ln \frac{f_3(z)}{a - f_3(z)}$$

sînt continue și monotone. Cu utilizarea lor relația noastră devine

$$H(z) = F(x) + G(y)$$

adică tot de forma (12).

Prin urmare nomogramele de genul 0 reprezintă totdeauna pseudosume și orice pseudosumă poate fi reprezentată prin astfel de nomograme.

Nomogramele de genul 1 pot fi aduse la tipul arătat în figura 8 printr-o transformare proiectivă. Ecuațiile scărilor fiind date,

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \\ v = f_1(x) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} u = a \\ v = f_2(y) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} u = f_3(z) \\ v = g_3(z) \end{array}\right\}$$

ecuația nomogramei este

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & 1 \\ a & f_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$f_2(y) = \frac{f_3(z) - a}{f_3(z)} \cdot f_1(x) + a\frac{g_3(z)}{f_3(z)}.$$

Introducînd noi notații pentru funcții, ecuația nomogramei devine

$$G(y) = H(z)\, F(x) + K(z), \tag{14}$$

numită *ecuația lui Cauchy*. Dacă se dă o ecuație de forma (14), putem calcula funcțiile $f_1(x), f_2(y), f_3(z), g_3(z)$, care determină scările și putem construi nomograma ecuației date. Deci o nomogramă de genul 1 reprezintă totdeauna o ecuație Cauchy și orice asemenea ecuație poate fi reprezentată cu o nomogramă de genul 1.

Fie

$$\left.\begin{array}{l} u = f_1(x) \\ v = g_1(x) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} u = f_2(y) \\ v = g_2(y) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} u = 0 \\ v = f_3(z) \end{array}\right\}$$

Ecuațiile scărilor nomogramei cu puncte aliniate de genul 2 (fig. 9). Ecuația ei este

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & 1 \\ 0 & f_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$f_3(z) = \frac{f_1(x)\, g_2(y) - f_2(y)\, g_1(x)}{f_1(x) - f_2(y)}. \tag{15}$$

Ecuațiile reprezentabile cu nomograme de genul 2 sînt cele ce pot fi scrise sub forma (15).

Ecuațiile reprezentabile cu nomogramele de genul 3 sînt ecuațiile anamorfozabile, adică acelea care pot fi aduse la forma ecuației lui Soreau (9).

Se cunosc condiții exprimate cu ajutorul derivatelor parțiale, care sînt necesare și suficiente pentru ca ecuația $z = f(x,y)$ să fie echivalentă cu (13), (14), (15) respectiv (9). Am amintit deja că aceste condiții sînt cu totul incomode în cazul ecuației (9) a lui Soreau, ele sînt de asemenea destul de complicate pentru ecuația (15). Dăm aici condițiile numai pentru ecuațiile (13) și (14).

Condiția lui Saint-Robert [32]. Condiția necesară și suficientă pentru ca funcția $f(x,y)$, admițînd derivate parțiale pînă la ordinul al treilea, să fie de forma (13) este

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \ln \frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = 0. \tag{16}$$

Se verifică imediat că această condiție este necesară. Pentru a arăta că este și suficientă din (16) deducem

$$\ln \frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = \varphi(x) + \psi(y)$$

sau

$$\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = e^{\varphi(x)} \cdot e^{\psi(y)} = \varphi_1(x) \cdot \frac{1}{\psi_1(y)}. \tag{17}$$

Notînd

$$\int_{x_0}^{x} \varphi_1(t)\, dt = F(x), \quad \int_{y_0}^{y} \psi_1(t)\, dt = G(y), \quad \Phi(x,y) = F(x) + G(y),$$

(17) se scrie

$$\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = \frac{\Phi'_x(x,y)}{\Phi'_y(x,y)}$$

sau

$$\frac{\partial(f, \Phi)}{\partial(x,y)} = 0,$$

de unde rezultă că $f(x,y) = H^{-1}[\Phi(x,y)] = H^{-1}[F(x) + G(y)]$.

Dacă admitem numai existența derivatelor parțiale de ordinul întîi f'_x și f'_y, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca funcția $f(x,y)$ să fie de forma (13) se poate exprima astfel

$$\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = A(x)\, B(y).$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația $z = f(x,y)$ să fie echivalentă cu o ecuație (14) (dacă f'_x și f'_y există) este următoarea:

$$\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = A(x) \cdot B(y) \cdot C[f(x,y)]. \tag{18}$$

Condiția (18) este necesară: derivăm ecuația (15) în raport cu x și y

$$H(z)\, F'(x) + [H'(z) F(x) + K'(z)] f'_x(x,y) = 0$$
$$- G'(y) + [H'(z)\, F(x) + K'(z)] f'_y(x,y) = 0$$

și prin împărțire obținem

$$\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = F'(x) \cdot \frac{-1}{G'(y)} \cdot H(z) = A(x) \cdot B(y) \cdot C[f(x,y)].$$

Condiția (18) este suficientă: prin schimbarea de variabilă

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_{x_0}^{x} A(t)\, dt = F(x) \\ v &= -\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{B(t)} = G(y) \end{aligned} \right\}$$

ecuația $z = f(x,y)$ devine $z = \varphi(u,v)$. Fixînd pe z, aceste ecuații definesc pe y ca funcție de x, respectiv pe v ca funcție u. Atunci avem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -A(x) \cdot B(y) \cdot \text{const.}$$

și

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dfrac{dv}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{du}{dx}} = \frac{-\dfrac{1}{B(y)}}{A(x)} [-A(x)\, B(y) \cdot \text{const.}] = \text{const.},$$

deci pentru o valoare x fixată, v este o funcție liniară de u

$$v = H(z) \cdot u + K(z).$$

Rezultă

$$G(y) = H(z)\, F(x) + K(z).$$

Problema caracterizării claselor de funcții (13), (14), (15) și (9) în condiții numai de continuitate și monotonie (fără a presupune derivabilitate) este foarte puțin studiată.

În capitolul II vom da asemenea condiții pentru clasa (13) a pseudosumelor. O subclasă a lor a fost caracterizată de J. A c z é l prin ecuația funcțională a bisimetriei.

4. Ecuația funcțională a bisimetriei. Fie $z = f(x,y)$ o funcție definită pentru x și $y \in [\alpha,\beta]$ și avînd valori tot în $[\alpha,\beta]$ (se zice că funcția $f(x,y)$ este *o operație)*.

Condițiile

a) f este continuă în dreptunghiul $\alpha \leqslant x,\, y \leqslant \beta$;
b) f este strict monotonă;
c) f satisface ecuația funcțională a bisimetriei:

$$f[f(u,x),\, f(y,v)] = f[f(u,y),\, f(x,v)], \quad x,y,u,v \in [\alpha,\beta] \tag{19}$$

sînt necesare şi suficiente pentru ca să avem

$$f(x,y) = H^{-1}[a\, H(x) + b\, H(y) + c], \tag{20}$$

unde $H(x)$ este o funcţie continuă şi strict monotonă [3], [7]. Funcţiile (20) au fost numite *cvasiliniare*.

Acest rezultat al lui J. A c z é l se enunţă mai scurt astfel: soluţiile continue şi strict monotone ale ecuaţiei (19) sînt date de formula (20).

Funcţiile (20) formează o subclasă în clasa de funcţii (13). Ele sînt reprezentabile prin nomograme cu puncte aliniate avînd trei scări rectilinii omotetice.

Nu vom reproduce demonstraţia lui Aczél, deoarece în capitolul III vom regăsi rezultatul lui cu ajutorul unei metode mai generale. În schimb arătăm aici care sînt problemele, care l-au condus la acest rezultat.

A. N. K o l m o g o r o v şi-a pus în anul 1930 problema izvorîtă din statistica matematică de a caracteriza axiomatic funcţiile

$$M_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F^{-1}\left[\frac{F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_n)}{n}\right] \tag{21}$$

(unde $F(x)$ este o funcţie continuă şi strict monotonă), numite medii *cvasiaritmetice* şi a dat următoarea soluţie [21]: condiţiile necesare şi suficiente pentru ca funcţiile $M_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ să fie cvasiaritmetice sînt:

a) M_n să fie continuu şi strict monoton;
b) M_n să fie reflexiv: $M_n(x, x, \ldots, x) = x$
c) M_n simetric
d) M_n asociativ în următorul sens:

$$M_n(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = M_n[M_k(x_1, \ldots, x_k), M_k(x_1, \ldots, x_k), \ldots, M_k(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

M. N a g u m o a ajuns la acelaşi rezultat independent de K o l m o g o r o v pe cale mai complicată [24]. În urma lucrărilor lui K o l m o g o r o v şi N a g u m o au apărut foarte multe cercetări de teoria mediilor, care continuă să apară şi astăzi. O expunere de ansamblu şi bibliografie se găseşte în lucrarea [6].

Condiţia d) a lui K o l m o g o r o v presupune că funcţiile M_n sînt definite pentru $n = 2, 3, \ldots$. Dorind să caracterizeze funcţiile M_n definite numai pentru un anumit n, de exemplu $n = 2$ (cazul $n > 2$ revine uşor la cazul $n = 2$), A c z é l a reuşit să înlocuiască condiţia d) cu ecuaţia bisimetriei [2], [3]. Prin urmare soluţiile ecuaţiei funcţionale a bisimetriei cu condiţiile suplimentare de reflexivitate, $f(x,x) = x$, şi simetrie, $f(x,y) = f(y,x)$ (pe lîngă continuitate şi monotonie strictă), sînt funcţiile

$$f(x, y) = H^{-1}\left[\frac{H(x) + H(y)}{2}\right], \tag{22}$$

unde $H(x)$ e o funcţie continuă şi strict monotonă.

S-a ridicat atunci problema rezolvării ecuaţiei (19) fără aceste două condiţii suplimentare. A c z é l a reuşit să pună la o parte întîi simetria, găsind că soluţiile reflexive ale ecuaţiei (19) sînt funcţiile

$$f(x,y) = H^{-1}[p\, H(x) + q\, H(y)],\ p, q > 0,\ p + q = 1, \tag{23}$$

numite medii *nesimetrice interne* şi apoi printr-un nou artificiu de calcul a ajuns la rezultatul enunţat la începutul acestui punct.

Condiţiile de bisimetrie, simetrie şi reflexivitate impuse funcţiei continue şi strict monotone $f(x,y)$ pot fi înlocuite cu singura condiţie de *autodistributivitate strîmbă*

$$f[f(x, y), t] = f[f(t, x), f(y, t)], \tag{24}$$

precum a arătat R y l l - N a r d z e w s k i prin rezolvarea ecuaţiei funcţionale (24) [31], şi K n a s t e r în mod direct [20].

Funcţiile (23) formează o subclasă a funcţiilor (20) şi pot fi reprezentate prin nomograme cu trei scări rectilinii, paralele şi egale, avînd originile lor (punctele O_1, O_2, O_3, pe fig. 6) pe aceeaşi dreaptă şi scara z între scările x şi y; iar funcţiile (22) formează o subclasă a funcţiilor (23) şi pot fi reprezentate cu nomogramele de mai sus în care scara z este tocmai la mijlocul scărilor x şi y.

5. Problema caracterizării pseudosumelor prin ecuaţie funcţională. Funcţiile (20) au putut fi caracterizate printr-o ecuaţie funcţională, anume prin ecuaţia bisimetriei. Se ridică în mod natural problema de a caracteriza tot printr-o ecuaţie funcţională funcţiile mai generale (13), care constituie o clasă de funcţii, fundamentală în nomografie. Problema a fost formulată de J. A c z é l într-o lucrare din 1952 [5].

În această privinţă M. H o s s z ú a găsit următorul rezultat [16], [17]: Soluţiile strict monotone şi cu derivate parţiale de ordinul întîi ale ecuaţiei funcţionale cu trei funcţii necunoscute de cîte două variabile

$$f[g(u, x), h(y, v)] = f[g(u, y), h(x, v)] \tag{25}$$

sînt funcţiile

$$\begin{aligned} f(x, y) &= H^{-1}[F(x) + G(y)] \\ g(x, y) &= F^{-1}[L(x) + N(y)] \\ h(x, y) &= G^{-1}[N(x) + M(y)]. \end{aligned} \tag{26}$$

Ecuaţia (25) poate fi privită ca o generalizare a ecuaţiei bisimetriei.

Rezultatul lui Hosszú nu este satisfăcător din două motive: 1) presupune derivabilitate, 2) dacă vrem să-l aplicăm, pentru a decide dacă o funcţie dată e pseudosumă sau nu, atunci pe lîngă această funcţie mai intervin două funcţii necunoscute, ceea ce face aplicarea imposibilă.

În capitolul II, vom caracteriza pseudosumele cu ajutorul mai multor condiţii echivalente, una fiind o variantă particularizată a rezultatului lui Hosszú, fără intervenţia altor funcţii străine şi aceasta în cazul continuităţii şi a monotoniei stricte, ceea ce va permite o aplicare uşoară în capitolele următoare.

Pe aceste condiţii se bazează metoda noastră de a rezolva ecuaţii funcţionale cu mai multe variabile, dezvoltată în capitolele III şi VI şi care constă în a arăta că soluţia ecuaţiei funcţionale respective este o pseudosumă. Vom rezolva cu această metodă şi ecuaţia (25) pentru funcţii continue şi strict monotone.

6. Ecuaţia funcţională a asociativităţii a fost considerată prima dată de A b e l [1]; ea se scrie astfel:

$$f[f(x, y), t] = f[x, f(y, t)], \tag{27}$$

x, y, t fiind numere oarecare din intervalul de definiție (α, β) al operației f. A b e l a rezolvat această ecuație în ipoteza că $f(x, y)$ este o funcție simetrică, transformînd-o într-o ecuație diferențială. Soluția ei este

$$f(x, y) = H^{-1}[H(x) + H(y)] \tag{28}$$

Funcția (27) poartă numele de *cvasisumă*.

J. A c z é l a arătat că avem aceeași soluție, dacă nu se presupune nici simetria și nici derivabilitatea, ci se presupune doar continuitatea și monotonia strictă [4]. Pentru cazul în care admitem că numerele intervalului (α, β) formează un grup cu operația $f(x,y)$, soluția (28) a fost dată de L. E. J. B r o u w e r (într-un grup continu unidimensional se poate introduce un parametru aditiv) [12].

Vom regăsi acest rezultat în capitolul III de două ori: 1) cu metoda noastră generală, 2) demonstrînd direct că din asociativitate rezultă simetria, cu ajutorul căreia bisimetria și soluția urmează imediat.

Acest rezultat permite tratarea ecuației funcționale

$$\varphi(x + y) = f[\varphi(x), \varphi(y)], \tag{29}$$

unde f este o funcție de două variabile dată și $\varphi(x)$ funcția necunoscută [7]. Ecuația (31) generalizează ecuația funcțională a lui Cauchy $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Căutînd soluțiile continue și strict monotone $\varphi(x)$, notăm $\varphi^{-1} = H$, $\varphi(x) = u$, $\varphi(y) = v$; atunci (29) ia forma

$$f(u, v) = H^{-1}[H(u) + H(v)]. \tag{30}$$

Determinarea lui φ din (29) este echivalentă cu determinarea lui H din (30). Deci

Condițiile următoare sînt necesare și suficiente pentru ca ecuația (29) să admită o soluție continuă și strict monotonă: 1) $f(x, y)$ să fie continuu și strict monoton 2) $f(x, y)$ să fie asociativ.

C A P I T O L U L II

CARACTERIZAREA PSEUDOSUMELOR

1. Condiții pentru ca o funcție cu două variabile să fie o pseudosumă.

Pentru ușurarea exprimării vom întrebuința noțiunea de pseudosumă în sensul următor:

Definiție. Funcția $z = f(x, y)$, definită în domeniul D, se zice *pseudosumă*, dacă în orice punct din D

$$f(x, y) = H^{-1}[F(x) + G(y)] \tag{1}$$

și dacă funcțiile de o variabilă F, G, H sînt continue și strict monotone.

Următoarea condiție este evidentă:

Condiția E: Domeniul valorilor funcției H conține toate numerele de forma $F(x) + G(y)$, $(x, y) \in D$.

Funcția $F(x) + G(y)$ este definită în dreptunghiul R, circumscris domeniului D (fig. 10). Liniile de nivel ale funcției $F(x) + G(y)$ trasate în R, care au puncte în D, acoperă un domeniu $D' \supset D$. Definiția (1) poate fi extinsă pe D'.

Pseudosumele (1) satisfac

Condiția T: $f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1)$, $f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1) \Longrightarrow f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2)$.

Într-adevăr, în baza monotoniei funcției H, din relațiile

$$H^{-1}[F(x_1) + G(y_2)] = H^{-1}[F(x_2) + G(y_1)],$$
$$H^{-1}[F(x_1) + G(y_3)] = H^{-1}[F(x_3) + G(y_1)]$$

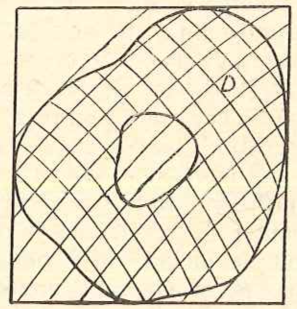

Fig. 10

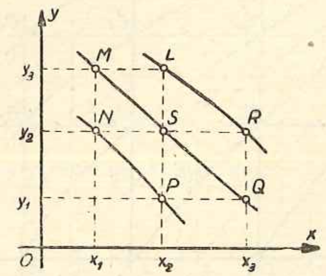

Fig. 11

urmează

$$F(x_1) + G(y_2) = F(x_2) + G(y_1), \quad F(x_1) + G(y_3) = F(x_3) + G(y_1),$$

din care obținem prin scădere

$$F(x_2) + G(y_3) = F(x_3) + G(y_2)$$

sau

$$H^{-1}[F(x_2) + G(y_3)] = H^{-1}[F(x_3) + G(y_2)].$$

Condiția T atrage după sine în mod evident

Condiția B: $f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1)$, $f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1) = f(x_2, y_2) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2)$.

Interpretarea geometrică a acestei condiții din urmă este următoarea: liniile de nivel ale funcției (1) și paralele cu axele de coordonate formează împreună un țesut. Fie $S(x_2, y_2)$ și $L(x_2, y_3)$ două puncte pe dreapta $x = x_2$ (fig. 11). Paralela la axa Ox dusă prin L taie linia de nivel prin S în M, paralela prin M la Oy taie paralela la Ox prin S în N, linia de nivel ce trece prin N și paralela la Oy prin S se intersectează în P, iar paralela la Ox prin P și linia de nivel prin S în Q și în fine paralela la axe prin Q și S se taie în R. Condiția B exprimă proprietatea punctelor L și R de a fi pe aceeași linie de nivel, sau exprimat altfel: exagonul curbiliniu avînd ca laturi și diagonale linii de nivel și paralele la axe se închide. Acest exagon curbiliniu se numește *figura lui Brianchon*.

Prin urmare condiția B *exprimă faptul că toate figurile Brianchon situate în* D *se închid.*

În teoria țesuturilor exagonale se demonstrează că, invers închiderea tuturor figurilor Brianchon atrage după sine că funcția continuă și strict monotonă $f(x, y)$ este o pseudosumă [11]. Dăm mai jos o demonstrație simplificată a acestei teoreme.

Să presupunem că $z = f(x, y)$ este o funcție continuă și strict monotonă în domeniul D și că satisface condiția B. Vom demonstra că $f(x, y)$ este o pseudosumă.

Putem admite fără a restrînge generalitatea că D conține în interior originea axelor de coordonate și $f(x, y)$ este o funcție crescătoare în raport cu fiecare variabilă independentă, căci printr-o transformare liniară convenabilă a acestor variabile se poate ajunge la acest caz.

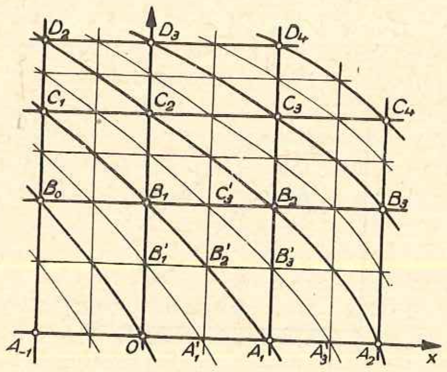

Fig. 12

Alegem o linie de nivel a funcției $f(x, y)$, care taie axele de coordonate în punctele A_1 și B_1, în așa fel ca domeniul OA_1B_1 să fie în primul cadran și interior lui D (fig. 12). Linia de nivel dusă prin punctul de intersecție B_2 al paralelor la axe prin A_1 și B_1 taie axele în A_2 și C_2. Din condiția B rezultă că figurile lui Brianchon se închid, deci punctele de intersecție B_3 și C_3 ale paralelelor la axe prin A_2 și B_1 respectiv prin A_1 și C_2 sînt situate pe aceeași linie de nivel, care taie axele în A_3 și D_3. Punctele B_4, C_4 și D_4 obținute în mod analog sînt de asemenea pe aceeași linie de nivel. Continuăm această operație pînă ce toate punctele de intersecție ale paralelelor la axe, deja desemnate, nu se află în exteriorul părții din primul cadran al domeniului D. Putem face aceeași construcție pentru celelalte cadrane; fie de exemplu C_1 punctul de intersecție al liniei de nivel prin B_1 cu paralela la Ox prin C_2; B_0 respectiv A_{-1} intersecția paralelei la Oy prin C_1 cu paralele la Ox prin B_1 respectiv O; punctele B_0 și O se găsesc pe aceeași linie de nivel etc. Notăm cu $x_{i,1}$ abscisa comună a punctelor A_i, B_{i+1}, $C_{i+2}, \ldots$, cu $y_{1,1}$ ordonata comună a punctelor B_k cu $y_{2,1}$ ordonata punctelor C_k, etc. și cu $z_{i,1}$ valoarea comună a funcției $z = f(x, y)$ pe punctele $A_i, B_i, C_i, \ldots$

Definim funcțiile $F(x)$, $G(y)$ și $H(z)$, pentru moment în punctele discrete $x_{i,1}$, $y_{i,1}$, $z_{i,1}$, astfel

$$F(x_{i,1}) = i, \qquad G(y_{i,1}) = i, \qquad H(z_{i,1}) = i.$$

Atunci $z = f(x, y)$ satisface în vîrfurile rețelei construite relația

$$H[f(x, y)] = F(x) + G(y). \tag{2}$$

Din monotonia strictă și continuitatea lui $f(x, y)$ rezultă că sistemul de ecuații $f(\alpha, \beta) = z_{1,1}, f(\alpha, 0) = f(0, \beta)$ are o singură soluție α, β și $0 < \alpha < x_1$, $0 < \beta < y_1$, adică pe linia de nivel A_1B_1 există un punct unic B_2' cu proiecțiile pe axe (A_1' și B_1') pe aceeași linie de nivel. Dreptunghiul cu laturile paralele la axe și cu două vîrfuri în B_2' și B_2 are celelalte două vîrfuri (B_3' și C_3') situate pe aceeași linie de nivel, căci exagonul curbiliniu $C_3' B_1 B_1' A_1' A_1 B_3'$ trebuie să se închidă. Tot așa, dacă B_4 este intersecția dreptei $B_2' B_3'$ cu linia de nivel A_2B_2 și A_3' proiecția lui B_4' pe Ox, atunci

punctele B_3' și A_3' sînt situate pe aceeași linie de nivel. Continuînd această construcție, obținem o rafinare a rețelei inițiale. Notăm ecuațiile paralelelor rețelei rafinate cu $x = x_{i,2}$ și $y = y_{i,2}$; avem $x_{2k,2} = x_{k,1}$, $y_{2k,2} = y_{k,1}$. Fie $z_{i,2}$ valorile funcției $f(x, y)$ pe liniile de nivel trasate în rețeaua rafinată; atunci $z_{2k,2} = z_{k,1}$.

Definim pe rețeaua rafinată:

$$F(x_{i,2}) = \frac{i}{2}, \quad G(y_{i,2}) = \frac{i}{2}, \quad H(z_{i,2}) = \frac{i}{2}$$

(pentru vîrfurile rețelei inițiale avem valorile definite mai înainte) și observăm că relația (2) încă are loc.

Continuăm indefinit această operație de rafinare a rețelelor. La al n-lea pas obținem mulțimile $\{x_{i,n}\}$, $\{y_{i,n}\}$, $\{z_{i,n}\}$ și $x_{2k,n} = x_{k,n-1}$, $y_{2k,n} = y_{k,n-1}$, $z_{2k,n} = z_{k,n-1}$. Definim valorile funcțiilor F, G, H respectiv pe aceste mulțimi, punînd

$$F(x_{i,n}) = \frac{i}{2^n}, G(y_{i,n}) = \frac{i}{2^n}, \quad H(z_{i,n}) = \frac{i}{2^n};$$

în acest fel pentru vîrfurile rețelei a n-a, care fac parte și din rețeaua a $(n$-1)-a, avem valorile vechi. Se constată imediat că relația (2) este valabilă pentru toate vîrfurile de rețea.

Abscisele $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n}, \ldots$ ale punctelor $A_1, A_1', \ldots, A_1^{(n-1)}, \ldots$ sînt pozitive și formează un șir descrescător, care deci are o limită $x^* \geqslant 0$. Avem

$$f(x_{1,n}, y_{1,n}) = f(x_{1,n-1}, 0)$$
$$f(x_{1,n}, 0) = f(0, y_{1,n}).$$

Din a doua egalitate urmează, în baza continuității și monotoniei stricte, că $y_{1,n}$ are de asemenea o limită cînd $n \to \infty$, pe care o notăm y^*. Făcînd $n \to \infty$ în prima egalitate, obținem $f(x^*, y^*) = f(x^*, 0)$ și folosind monotonia, $y^* = 0$. A doua egalitate devine, pentru $n \to \infty$, $f(x^*, 0) = f(0,0)$, $x^* = 0$.

Să considerăm un domeniu OAB interior lui D, mărginit de axele de coordonate și de o linie de nivel AB, A fiind un vîrf de rețea. Atunci mulțimea $\{x_{i,n}\}$ este densă pe segmentul OA, cînd i și n variază. Căci dacă presupunem că acest segment conține un interval (γ, δ) lipsit de puncte $x_{i,n}$, atunci pentru fiecare n determinăm $k = k(n)$ astfel ca (γ, δ) să fie cuprins între $A_k^{(n)}$ și $A_{k+1}^{(n)}$ (fig. 13). Linia de nivel prin $A_k^{(n)}$ taie Oy în $Q_k^{(n)}$, iar paralela la Ox prin $Q_k^{(n)}$ intersectează linia de nivel prin $A_{k+1}^{(n)}$ în $Q_{k+1}^{(n)}$; proiecția punctului $Q_{k+1}^{(n)}$ pe Ox este tocmai $A_1^{(n)}$. Ținînd seamă că pentru $n \to \infty$

$$\overline{Q_k^{(n)} Q_{k+1}^{(n)}} = \overline{OA_1^{(n)}} = x_{1,n} \to 0,$$

avem $\overline{A_k^{(n)} A_{k+1}^{(n)}} \to 0$, în contradicție cu ipoteza noastră. Rezultă că punctele de rețea formează o mulțime densă în domeniul OAB.

Să luăm acum un domeniu OMM^*, mărginit de axe și de linia de nivel MM^*, despre care nu se mai presupune că trece prin vîrfuri de rețea (fig. 14). Să arătăm că vîrfurile de rețea formează o mulțime densă și pe OMM^*. Pentru aceasta ajunge să demonstrăm că M e un punct de acumulare pentru mulțimea $\mathfrak{S}$ a punctelor $x_{i,n}$ situate pe segmentul OM. Să presupunem contrariul, adică $Q = \sup \mathfrak{S}$ e situat la stînga punctului M. Știm că $\mathfrak{S}$ e dens pe OQ, deci putem alege punctele Q' și Q'' din $\mathcal{E}$ astfel ca dreptunghiul $Q'Q''RS$ să aibă vîrful S pe aceeași linie de nivel ca și Q'' și vîrful R să fie în domeniul QMM^*Q^*. Din felul în care am construit rețelele rezultă că R și R' sînt vîrfuri de rețele, adică $R' \in \mathcal{E}$, în contradicție cu ipoteza $Q = \sup \mathcal{E}$.

Să acoperim domeniul D cu domenii D_j, mărginite de paralelele la axe și de cîte o linie de nivel. Din cele demonstrate mai înainte urmează că dacă un D_j conține un punct de rețea, atunci mulțimea punctelor de rețea e densă în D_j. Rezultă imediat că vîrfurile de rețea formează o mulțime densă în D.

Funcțiile F, G, H definite pe mulțimile dense $\{x_{i,n}\}$, $\{y_{i,n}\}$, $\{z_{i,n}\}$ sînt funcții continue și monotone pe aceste mulțimi, deci definiția lor poate fi extinsă prin

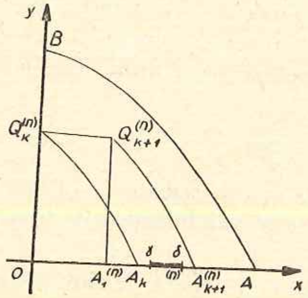

Fig. 13

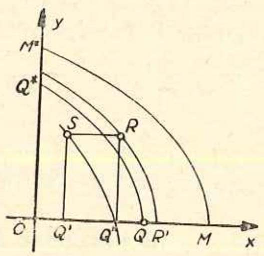

Fig. 14

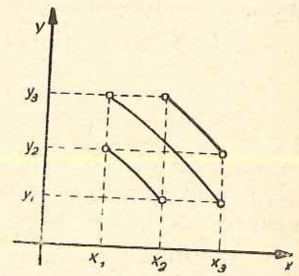

Fig. 15

continuitate pentru toate valorile din intervalele respective ale figurii 10; F, G și H, fiind astfel definite, sînt funcții continue și strict monotone și verifică relația (2) pentru toate valorile $(x, y) \in D$, ceea ce se vede trecînd la limită prin puncte de rețea. Deci am demonstrat:

T e o r e m a II, 1. *Următoarele condiții sînt necesare și suficiente pentru ca funcția $z = f(x, y)$ să fie o pseudosumă în domeniul D:*

1) *funcția $f(x, y)$ să fie continuă și strict monotonă în D.*

2) *$f(x, y)$ să verifice condiția* B.

Observație. Din demonstrație rezultă că putem slăbi condiția 2), cerînd *verificarea condiției* B *în toate domeniile cuprinse în D avînd diametre mai mici decît un număr pozitiv dat* (oricît de mic), adică numai pentru x_i, y_i, care verifică inegalitățile

$$|x_i - x_j| < \delta, \quad |y_i - y_j| < \delta, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Deoarece în cazul continuității și al monotoniei stricte (1) $\Rightarrow$ *condiția* T $\Rightarrow$ *condiția* B $\Rightarrow$ (1), putem enunța

T e o r e m a II, 2. *Următoarele condiții sînt necesare și suficiente pentru ca funcția $z = f(x, y)$ să fie o pseudosumă în domeniul D:*

1) *$f(x, y)$ să fie continuu și strict monoton în D,*

2) *$f(x, y)$ să verifice condiția* T.

Interpretarea geometrică a condiției T se vede pe figura 15: *figurile lui Thomsen situate în D trebuie să se închidă.*

Condiția B respectiv T pot fi înlocuite cu o a treia condiție:

Condiția R: $f(x_1, y_3) = f(x_2, y_1)$, $f(x_1, y_4) = f(x_2, y_2)$, $f(x_3, y_3) = f(x_4, y_1) \Rightarrow f(x_3, y_4) = f(x_4, y_2)$.

Într-adevăr, prin verificare directă se constată că din (1) rezultă R și că din R rezultă B, dacă punem $x_2 = x_3$, $y_2 = y_3$. Deci are loc

T e o r e m a II, 3. *Următoarele condiții sînt necesare și suficiente pentru ca funcția $z = f(x, y)$ să fie o pseudosumă în domeniul D:*

1) *$f(x, y)$ să fie continuu și strict monoton în D,*

2) *$f(x, y)$ să verifice condiția* R.

În cazul teoremelor II.2 și II.3 putem face observații analoage cu cea făcută după teorema II.1.

Interpretarea geometrică a condiției R este arătată pe figura 16: *figurile Reidemeister situate în D se închid,* adică dacă trei din vîrfurile unui dreptunghi cu laturi paralele la axe se deplasează pe linii de nivel, atunci și al patrulea vîrf se deplasează pe o linie de nivel.

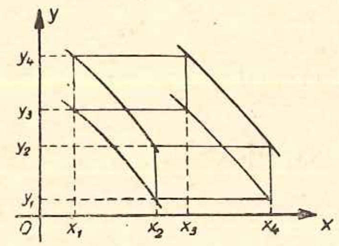

Fig. 16

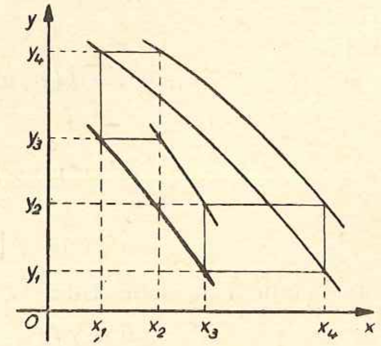

Fig. 17

Interpretările geometrice ale teoremelor II.1, II.2 și II. 3 sînt cunoscute în geometria țesuturilor [11].

Observații. 1) Să demonstrăm în mod direct implicația T $\Rightarrow$ R. Fie

$$f(x_1, y_3) = f(x_2, y_1), f(x_1, y_4) = f(x_2, y_2), f(x_3, y_3) = f(x_4, y_1)$$

și să definim numerile ξ și η prin

$$f(x_1, y_4) = f(\xi, y_3), f(x_1, \eta) = f(x_3, y_3).$$

Ținînd seamă de T avem $f(\xi, \eta) = f(x_3, y_4)$. Pe de altă parte

$$f(x_2, y_1) = f(x_1, y_3), f(x_2, y_2) = f(\xi, y_3) \Rightarrow f(\xi, y_1) = f(x_1, y_2)$$

$$f(x_1, \eta) = f(x_4, y_1), f(x_1, y_2) = f(\xi, y_1) \Rightarrow f(x_4, y_2) = f(\xi, \eta)$$

deci

$$f(x_4, y_2) = f(x_3, y_4).$$

2) Condițiile T și R pot fi combinate și se obține o a patra condiție echivalentă:

$$f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1), f(x_1, y_4) = f(x_4, y_1), f(x_2, y_3) = f(x_3, y_3) \Rightarrow f(x_2, y_4) = f(x_4, y_2).$$

Interpretarea geometrică a acestei condiții se vede pe figura 17.

2. Altă formă a condiției T. Dintre condițiile stabilite cea mai simplă e condiția T. Scriind-o sub altă formă apare legătura ei cu ecuația (25) din capitolul I, întîlnită de M. H o s s z ú.

Funcția $f(x, y)$ fiind continuă și strict monotonă, ecuația

$$z = f(x, y)$$

poate fi rezolvată în raport cu x și y:

$$x = \bar{f}(y, z), \; y = \tilde{f}(z, x), \tag{3}$$

unde funcțiile $\bar{f}$ și $\tilde{f}$ sînt de asemenea continue și strict monotone în cîte un domeniu $\bar{D}$ și $\tilde{D}$.

Notăm

$$x = f(v, y') = f(x', u), \; y = f(v, y'') = f(x'', u); \tag{4}$$

atunci

$$f(x', y'') = f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)]$$

și

$$f(x'', y') = f[\bar{f}(u, y), \tilde{f}(x, v)].$$

În aceste notații T se scrie astfel

$$(4) \Longrightarrow f(x', y'') = f(x'', y')$$

sau

$$f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)] = f[\bar{f}(u, y), \tilde{f}(x, v)], \tag{5}$$

pentru toate valorile x, y, u, v pentru care notațiile au sens.

Putem enunța:

T e o r e m a II, 4. *Mulțimea soluțiilor continue și strict monotone ale ecuației funcționale (5) constă din totalitatea pseudosumelor.*

Observație. Pentru funcțiile $z = f(x, y)$ diferențiabile acest rezultat apare ca o consecință a soluționării dată de H o s s z ú ecuației funcționale (25) din capitolul I. Într-adevăr n-avem decît să facem următoarele particularizări în funcțiile (26) din capitolul I

$$L(x) = -G(x), \; M(x) = -F(x), \; N(x) = H(x);$$

atunci

$$g(x, y) = \bar{f}(x, y) \text{ și } h(x, y) = \tilde{f}(x, y).$$

3. Aplicație la ecuația de ordinul al treilea nomografic. Ecuația de ordinul al 3-lea nomografic este

$$A f_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 = 0, \tag{6}$$

unde

$$f_1 = f_1(x), \; f_2 = f_2(y), \; f_3 = f_3(x)$$

sînt funcții continue și strict monotone.

Arătăm că *funcția $z = f(x, y)$ definită de (6) este o pseudosumă* prin verificarea ecuației funcționale (5). Avem

$$z = f(x, y) = f_3^{-1}\left[-\frac{B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + D}{A f_1 f_2 + B_2 f_1 + B_1 f_2 + C_3}\right],$$

$$x = \bar{f}(y, z) = f_1^{-1}\left[-\frac{B_1 f_2 f_3 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D}{A f_2 f_3 + B_3 f_2 + B_2 f_3 + C_1}\right]$$

$$y = \tilde{f}(z, x) = f_2^{-1}\left[-\frac{B_2 f_3 f_1 + C_3 f_3 + C_1 f_1 + D}{A f_3 f_1 + B_1 f_3 + B_3 f_1 + C_2}\right],$$

deci, notînd pentru prescurtare $f_2(u) = U$, $f_3(x) = X$, $f_3(y) = Y$, $f_1(v) = V$, avem

$$-f_3\{f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)]\} = \frac{P}{Q},$$

unde

$$\begin{aligned} P = {} & B_3(B_1 UX + C_2 U + C_3 X + D)(B_2 YV + C_3 Y + C_1 V + D) - \\ & - C_1(B_1 UX + C_2 U + C_3 X + D)(AYV + B_1 Y + B_3 V + C_2) - \\ & - C_2(AUX + B_3 U + B_2 X + C_1)(B_2 YV + C_3 Y + C_1 V + D) + \\ & + D(AUX + B_3 V + B_2 X + C_1)(AYV + B_1 Y + B_3 V + C_2), \end{aligned}$$

iar expresia lui Q se deduce din P schimbînd coeficienții $B_3, -C_1, -C_2, D$ din fața produselor în $A, -B_2, -B_1, C_3$. Dezvoltăm expresia lui P și Q și nu mai scriem termenii ce conțin produsul XY și nici termenii fără X și Y. Pentru P termenii rămași sînt

$$(B_3 D - C_1 C_2)(AUV + B_1 U + B_2 V + C_3)(X + Y),$$

iar pentru Q

$$(A C_3 - B_1 B_2)(B_3 UV + C_2 U + C_1 V + D)(X + Y),$$

deci $\frac{P}{Q}$ este simetric în raport cu X și Y. Ținînd seama că f_3 este o funcție strict monotonă, avem

$$f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)] = f[\bar{f}(u, y), \tilde{f}(x, v)].$$

4. Determinarea scărilor. După ce s-a constatat că funcția $z = f(x, y)$ este o pseudosumă (1), se ridică problema determinării funcțiilor $F(x)$, $G(y)$ și $H(z)$. O dată cu ele sît determinate și ecuațiile scărilor nomogramei de gen 0, care reprezintă ecuația (1).

Pentru aceasta trebuie să rezolvăm ecuația funcțională (1) în care $f(x, y)$ este o funcție dată și $F(x)$, $G(y)$, $H(z)$ trei funcții necunoscute de o variabilă. Cu notația $F^{-1} = \varphi$, $G^{-1} = \psi$, $H^{-1} = \chi$, $F(x) = \xi$, $G(y) = \eta$, ecuația (1) se scrie

$$\chi(\xi + \eta) = f[\varphi(\xi), \psi(\eta)]$$

sau notînd iarăși cu x și y variabilele

$$\chi(x + y) = f[\varphi(x), \psi(y)]. \tag{7}$$

O consecință imediată a teoremelor II, 1 — II, 4 este

Teorema II, 5. *Următoarele condiții sînt necesare și suficiente pentru ca ecuația funcțională (7) să admită un sistem de soluții continue și strict monotone: 1) $f(x,y)$ să fie continuu și monoton, 2) să satisfacă una din condițiile B,T,R, sau ecuația (5).*

Ecuația (7) este o generalizare a ecuației (29) din capitolul I, 6, în sensul că în locul unei singure funcții necunoscute avem trei funcții necunoscute. Soluționarea ecuației noastre mai generale (7) revine la aceasta, căci punînd $y = 0$, apoi $x = 0$ și notînd $g(0) = b$ și $h(0) = c$, avem

$$\chi(x+y) = f[\varphi(x), \psi(y)]$$
$$\chi(x) = f[\varphi(x), c]$$
$$\chi(y) = f[b, \psi(y)].$$

Eliminînd din acest sistem $\varphi(x)$ și $\psi(y)$, obținem o ecuație de forma (29), capitolul I, 6.

Exemplu. Să se rezolve ecuația funcțională cu trei funcții necunoscute:

$$\chi(x+y) = \varphi(x) + \psi(y). \tag{8}$$

Avem

$$\chi(x) = \varphi(x) + c,$$
$$\chi(y) = b + \psi(y),$$

care înlocuite în (8) ne dau

$$\chi(x+y) = \chi(x) + \chi(y) - b - c.$$

Notînd $\chi(x) = \bar{\chi}(x) + b + c$, obținem pentru $\bar{\chi}(x)$ ecuația funcțională a lui Cauchy

$$\bar{\chi}(x+y) = \bar{\chi}(x) + \bar{\chi}(y),$$

a cărei soluție este $\bar{\chi}(x) = ax$. Deci

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= ax + b \\ \psi(x) &= ax + c \\ \chi(x) &= ax + b + c. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Pe de altă parte, funcțiile (9) verifică ecuația (8). *Toate soluțiile ecuației (8) sînt date de formulele (9).*

Ecuația (8) este o generalizare a ecuației funcționale a lui Cauchy și a mai fost tratată cu alte metode [29].

Să studiem numărul soluțiilor ecuației (7). Se observă că dacă $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ este un sistem de soluții continue și strict monotone, atunci funcțiile

$$\begin{aligned} \varphi^*(x) &= \varphi(ax+b) \\ \psi^*(x) &= \psi(ax+c) \\ \chi^*(x) &= \chi(ax+b+c) \end{aligned} \tag{10}$$

formează de asemenea un sistem de astfel de soluții. Demonstrăm că alte soluții nu sînt. Fie $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $\bar{\chi}(x)$ o soluție oarecare (continuă și strict monotonă) a ecuației (7). Avem

$$\chi(x+y) = f[\varphi(x), \psi(y)]$$
$$\bar{\chi}(x+y) = f[\bar{\varphi}(x), \bar{\psi}(y)];$$

alegem u și v astfel ca

$$\varphi(u) = \bar{\varphi}(x) \text{ și } \psi(v) = \bar{\psi}(y);$$

atunci $\bar{\chi}(x+y) = \chi(u+v)$ și

$$\chi^{-1}\bar{\chi}(x+y) = \varphi^{-1}\bar{\varphi}(x) + \psi^{-1}\bar{\psi}(y).$$

Ținînd seamă de exemplul (8) avem

$$\varphi^{-1}\bar{\varphi}(x) = ax + b, \psi^{-1}\bar{\psi}(x) = ax + c, \chi^{-1}\bar{\chi}(x) = ax + b + c,$$

de unde rezultă

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(ax+b) = \varphi^*(x)$$
$$\bar{\psi}(x) = \psi(ax+c) = \psi^*(x)$$
$$\bar{\chi}(x) = \chi(ax+b+c) = \chi^*(x).$$

Teorema II, 6. *Formulele (10) reprezintă toate soluțiile continue și monotone ale ecuației (7), $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ fiind un sistem de astfel de soluții și a,b,c constante oarecare.*

Consecință. Pseudosuma

$$f(x,y) = H^{-1}[F(x) + G(y)] \tag{1}$$

admite și reprezentările

$$f(x,y) = \bar{H}^{-1}[\bar{F}(x) + \bar{G}(y)],$$

unde $\bar{F}(x) = a F(x) + b$, $\bar{G}(y) = a G(y) + c$, $\bar{H}(z) = a H(z) + b + c$. Funcția $z = f(x,y)$ nu are alte reprezentări de forma (1).

5. Proprietatea locală și globală de pseudosumă. Stabilim

Lema. Fie $f(x,y)$ o pseudosumă în domeniul D

$$f(x,y) = H^{-1}[F(x) + G(y)], \quad (x,y) \in D$$

și $f_1(x,y)$ o prelungire a funcției $f(x,y)$ în $D_1 \supset D$

$$f_1(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

despre care se presupune că este de asemenea o pseudosumă. Atunci putem determina funcțiile $F_1(x)$, $G_1(y)$, $H_1(z)$ în așa fel ca

$$f_1(x,y) = H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)], \quad (x,y) \in D_1$$

și ca F_1, G_1, H_1 să fie prelungiri ale funcțiilor F, G, H.

Într-adevăr, să notăm

$$f_1(x,y) = H_2^{-1}\,[F_2(x) + G_2(y)], \quad (x,y) \in D_1.$$

În baza consecinței de la punctul 4, avem în D

$$F(x) = aF_2(x) + b, \quad G(y) = aG_2(y) + c, \quad H(z) = aH_2(z) + b + c$$

și, ținînd seama de aceeași consecință, $f_1(x,y)$ se mai poate scrie

$$f_1(x,y) = H_1^{-1}\,[F_1(x) + G_1(y)], \quad (x,y) \in D_1$$

unde

$$F_1(x) = aF_2(x) + b, \; G_1(y) = aG_2(y) + c, \; H_1(z) = aH_2(z) + b + c,$$

deci în D avem

$$F_1(x) = F(x), \; G_1(y) = G(y), \; H_1(z) = H(z).$$

Demonstrăm

T e o r e m a II, 7. *Dacă orice punct al domeniului D are o vecinătate în care $f(x,y)$ este o pseudosumă, atunci $f(x,y)$ este o pseudosumă în domeniul întreg D* (proprietatea locală de pseudosumă atrage după sine și proprietatea globală de pseudosumă).

Fie V_P vecinătatea punctului oarecare $P \in D$, în care $f(x,y)$ este o pseudosumă și fie D^* un domeniu închis interior lui D. Putem alege un număr finit de vecinătăți V_{P_i} $(i = 1,\dots,n)$, care acoperă pe D^*. Alegînd pe $\delta > 0$ suficient de mic, orice domeniu $\Omega \subset D^*$ cu un diametru mai mic decît δ, este interior unui V_{P_i} $(i=1,\dots,n)$, deci în orice domeniu Ω funcția $f(x,y)$ satisface condiția B. Din observația făcută după teorema II, 1 rezultă că $f(x,y)$ este pseudosumă în D^*.

Să alegem un șir de domenii închise.

$$D_1^* \subset D_2^* \subset \dots \subset D_j^* \subset \dots$$

astfel ca $\bigcup_j D_j^* = D$. Funcția $f(x,y)$ este pseudosumă în fiecare D_j^*

$$f(x,y) = H_j\,[F_j(x) + G_j(y)], \quad (x,y) \in D_j.$$

În baza lemei putem admite că în D_j

$$F_j(x) = F_{j+1}(x) = \dots$$

$$G_j(y) = G_{j+1}(y) = \dots$$

$$H_j(z) = H_{j+1}(z) = \dots$$

Notăm

$$F(x) = \lim_{j\to\infty} F_j(x), \; G(y) = \lim_{j\to\infty} G_j(y), \; H(z) = \lim_{j\to\infty} H_j(z);$$

atunci

$$f(x,y) = H^{-1}[F(x) + G(y)], \quad (x,y) \in D,$$

ceea ce era de demonstrat.

CAPITOLUL III

REZOLVAREA UNOR ECUAȚII FUNCȚIONALE CU O FUNCȚIE NECUNOSCUTĂ DE DOUĂ VARIABILE

În acest capitol regăsim soluția unor ecuații funcționale cu ajutorul unei metode comune, bazată pe teoremele din capitolul II. *În toate cazurile e vorba despre soluțiile continue și strict monotone într-un interval* (α,β) *cu valori în același interval* (ceea ce nu vom mai specifica de fiecare dată). Rezultat nou în acest capitol este numai soluționarea ecuației semisimetriei (punctul 5) în condițiile specificate și discuția domeniului de valori din punctul 2. Metodele folosite sînt noi.

1. Ecuația bisimetriei. Am amintit, în capitolul I, 4 că ecuația

$$f[f(u,x),\; f(y,v)] = f[f(u,y), f(x,v)] \tag{1}$$

a fost soluționată de J. A c z é l în ipotezele de mai sus. Soluțiile sînt funcțiile cvasiliniare

$$f(x,y) = H^{-1}\,[aH(x) + b\,H(y) + c], \tag{2}$$

unde $H(x)$ este continuu și strict monoton în (α,β) [3], [7].

Se vede prin înlocuire, că funcțiile (2) verifică (1). Pentru a arăta că alte soluții nu există, să presupunem că $f(x,y)$ satisface (1) și să demonstrăm întîi că $f(x,y)$ îndeplinește condiția T în dreptunghiul $\alpha < x < \beta$, $\alpha < y < \beta$.

Fie $x_i, y_i \in (\alpha,\beta)$, $(i = 1, 2, 3)$ și $v \in (\alpha,\beta)$ și să admitem că

$$f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1), f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1).$$

Avem succesiv:

$$f[f(x_2, y_3),\; f(y_1, v)] = f[f(x_2, y_1), f(y_3, v)] = f[f(x_1, y_2), f(y_3, v)] =$$
$$= f[f(x_1, y_3),\; f(y_2, v)] = f[f(x_3, y_1), f(y_2, v)] = f[f(x_3, y_2), f(y_1, v)].$$

Se observă că în primul și ultimul membru al doilea argument este același, deci în baza monotoniei stricte

$$f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2),$$

$f(x, y)$ satisface condiția T.

Aplicînd teorema II, 2 găsim

$$f(x, y) = H^{-1}\,[F(x) + G(y)]. \tag{3}$$

Înlocuim (3) în (1):

$$H^{-1}\{FH^{-1}[F(u) + G(x)] + GH^{-1}[F(y) + G(v)]\} =$$
$$= H^{-1}\{FH^{-1}[F(u) + G(y)] + GH^{-1}[F(x) + G(v)]\},$$

egalăm argumentele funcției H^{-1} din cei doi membri și schimbînd notația

$$\left.\begin{aligned} FH^{-1} = \varphi,\; GH^{-1} = \psi \\ H(u) = s,\, H(v) = t,\, H(x) = \xi,\, H(y) = \eta, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

obținem

$$\varphi[\varphi(s)+\psi(\xi)]+\psi[\varphi(\eta)+\psi(t)]=\varphi[\varphi(s)+\psi(\eta)]+\psi[\varphi(\xi)+\psi(t)]$$

sau

$$\varphi[\varphi(s)+\psi(\xi)]-\varphi[\varphi(s)+\psi(\eta)]=\psi[\varphi(\xi)+\psi(t)]-\psi[\varphi(\eta)+\psi(t)].$$

Membrul al doilea nu depinde de s, deci

$$\varphi(s_2)-\varphi(s_1)=K_{\xi,\eta}, \quad \text{dacă } s_2-s_1=\psi(\xi)-\psi(\eta).$$

Fiind dată o valoare d, alegem ξ și η astfel ca $\psi(\xi)-\psi(\eta)=d$; atunci $K_{\xi,\eta}=\lambda(d)$ și

$$\varphi(s_2)-\varphi(s_1)=\lambda(s_2-s_1).$$

Prin schimbarea notației obținem o ecuație funcțională asemănătoare cu ecuația funcțională a lui Cauchy, însă conținînd două funcții necunoscute

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\lambda(y). \tag{5}$$

Punînd $x=x_0$, găsim

$$\lambda(y)=\varphi(y+x_0)-\varphi(x_0).$$

Ecuația (5) devine

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y+x_0)-\varphi(x_0).$$

Pentru funcția $\Phi(x)=\varphi(x+x_0)-\varphi(x_0)$ avem ecuația

$$\Phi(x+y-x_0)=\Phi(x-x_0)+\Phi(y),$$

sau cu notația $x-x_0=x'$

$$\Phi(x'+y)=\Phi(x')+\Phi(y),$$

care este ecuația funcțională a lui Cauchy. Soluția ei este $\Phi(x)=ax$ și atunci

$$\varphi(x)=\Phi(x-x_0)+\varphi(x_0)=a(x-x_0)+\varphi(x_0)=ax+c_1.$$

În mod analog obținem $\psi(x)=bx+c_2$.

Ținînd seama de (4)

$$F=\varphi H=aH+c_1, \qquad G=\psi H=bH+c_2;$$

prin urmare (3) devine $(c_1+c_2=c)$

$$f(x,y)=H^{-1}[aH(x)+bH(y)+c].$$

2. Discuția domeniului de valori al funcției H (x). Funcția $H(x)$ din expresia (2) este continuă și strict monotonă în intervalul (deschis) (α,β). În afară de aceasta condiția E trebuie să fie satisfăcută (cap. II, 1), care în acest caz devine

Condiția E': Domeniul (γ,δ) al valorilor funcției $H(x)$ satisface:

$$h_1, h_2 \in (\gamma,\delta) \Longrightarrow ah_2+bh_2+c\in(\gamma,\delta).$$

Condiția E' impune o restricție pentru intervalul (γ,δ). Condiția E' este echivalentă cu următoarele restricții pentru (γ,δ), în diferitele cazuri ale valorilor a, b, c.

Să observăm întîi că dacă $a+l\neq 1$, atunci putem presupune $c=0$, căci scriind

$$H(x)=H_1(x)+\frac{c}{a+b-1}$$

termenul constant dispare. În cazurile I — V am presupus $c=0$.

Cazul I. $a>0,\ b>0,\ a+b<1$; atunci $\gamma<0<\delta$.

Cazul II. $a>0,\ b>0,\ a+b>1$; atunci $\gamma\geqslant 0,\ \delta=\infty$ sau $\gamma=-\infty,\ \delta\leqslant 0$ sau $\gamma=-\infty,\ \delta=+\infty$.

Cazul III. $a<0,\ b<0,\ a+b\geqslant -1$; atunci $\gamma+\delta=0$.

Cazul IV. $a<0,\ b<0,\ a+b<-1$, atunci $\gamma=-\infty,\ \delta=\infty$.

Cazul V. $ab<0$, atunci $\gamma=-\infty,\ \delta=\infty$.

Cazul VI. $a+b=1,\ 0<a<1,\ c=0$, atunci (γ,δ) oarecare.

Cazul VII. $a+b=1,\ 0<a<1,\ c>0$, atunci γ oarecare, $\delta=\infty$.

Cazul VIII. $a+b=1,\ 0<a<1,\ c<0$, atunci $\gamma=-\infty$, δ oarecare.

Cazul IX. $a+b=1,\ a<0$ sau $a>1$, atunci $\gamma=-\infty,\ \delta=+\infty$.

În toate cazurile se aplică un raționament simplu, care se bazează pe faptul că

$$p\geqslant 0,\ q\geqslant 0,\ p+q=1 \Longrightarrow p\,h_1+qh_2\in[h_1,h_2]$$

și pe care nu-l detaliăm.

Dacă căutăm soluțiile $f(x,y)$ ale ecuației (1) definite într-un interval *închis* sau *semideschis*, care satisfac în *acest* interval condițiile noastre obișnuite (continuitate, monotonie strictă și cu valori în intervalul respectiv), atunci aceste condiții sînt satisfăcute și în intervalul corespunzător deschis (α,β). Pentru continuitate și monotonie această afirmație e trivială, iar ținînd seama de monotonia strictă, se vede imediat că $f(x,y)$ nu poate fi egal cu α sau β decît în capetele intervalului, deci și a treia condiție (f operație) rămîne valabilă în intervalul deschis. Prin urmare în (α,β) funcția e pseudosumă, iar în capetele acestui interval funcția e determinată prin continuitate, ceea ce atunci e posibil cînd γ respectiv $\delta\neq\infty$. *Astfel condiția* E' *devine mai restrictivă.*

Pentru intervalul închis $[\alpha,\beta]$ *cazurile I, III și VI sînt posibile.*

Pentru intervalul semideschis $[\alpha,\beta)$ *la acestea se mai adaugă cazurile II și VII, iar pentru intervalul* $(\alpha,\beta]$ *cazurile II și VIII.*

Se vede deci, că în contradicție cu intervalul deschis, în cazul intervalelor închise sau semideschise *nu orice valori a,b,c sînt posibile.*

3. Ecuația bisimetriei cu condiții suplimentare. Să regăsim acum rezultatele lui Aczél [2], [3] relative la soluțiile ecuației (1), care satisfac și condițiile următoare:

a) *reflexivitate*: $f(x,x)=x$

b) *simetrie*: $f(x,y)=f(y,x)$.

Să se determine funcția $f(x,y)$ care verifică (1) și a). Avem (2) și

$$H^{-1}[aH(x)+bH(x)+c]=x$$

sau

$$(a+b-1)H(x)+c=0,$$

ceea ce atrage după sine

$$a+b=1,\ c=0.$$

Ne aflăm deci în cazul VI sau IX (pct. 2). În cazul VI, adică dacă $a > 0$ și $b > 0$, nu avem nici o condiție în plus pentru $H(x)$. În cazul IX $H(x)$ trebuie să ia toate valorile de la $-\infty$ pînă $+\infty$. Dacă intervalul (α, β) se consideră închis sau semideschis, acest al doilea caz nu este posibil. Deci soluțiile sînt

$$f(x, y) = H^{-1}[pH(x) + qH(y)],\ p + q = 1,\ p \geqslant 0,\ q \geqslant 0 \tag{6}$$

cu $H(x)$ oarecare (continuu și strict monoton), *mediile nesimetrice interne și*

$$f(x, y) = H^{-1}[aH(x) + bH(y)],\ a + b = 1, \tag{7}$$

$a < 0$ sau $b < 0$ cu $H(x)$ luînd valori de la $-\infty$ la $+\infty$, *mediile nesimetrice externe.*

Se găsește imediat:

Funcțiile care satisfac (1) *și b) sînt*

$$f(x, y) = H^{-1}[aH(x) + aH(y) + c]. \tag{8}$$

Funcțiile care satisfac (1) *a)* și *b) sînt mediile cvasiaritmetice*

$$f(x, y) = H^{-1}\left[\frac{H(x) + H(y)}{2}\right]. \tag{9}$$

În capitolul I, 4 am amintit că (1) a) și *b)* pot fi înlocuiți cu singura condiție de auto-distributivitate strîmbă (ecuația (24) din cap. I).

Tot așa ecuația (1) și condiția b) (simetrie și bisimetrie) pot fi înlocuite cu singura ecuație

$$f[f(u, x), f(v, y)] = f[f(u, y), f(v, x)], \tag{10}$$

o modificare a ecuației (1). Într-adevăr, dacă punem în (10) $u = v$ și $f(u, x) = \xi$, $f(u, y) = \eta$, găsim

$$f(\xi, \eta) = f(\eta, \xi),$$

care împreună cu (10) conduce la (1). Pe de altă parte, din (1) și b) rezultă imediat (10). Urmează că soluția ecuației (10) e dată de formula (8).

Ecuația

$$f[f(u, x), f(y, v)] = f[f(u, y), f(v, x)], \tag{11}$$

considerată de H. P i d e k într-o scrisoare adresată lui J. A c z é l [6], are aceeași soluție. Aci facem $y = x$

$$f[f(u, x), f(x, v)] = f[f(u, x), f(v, x)];$$

primul argument fiind același în cei doi membri, avem în baza monotoniei stricte

$$f(x, v) = f(v, x),$$

deci $f(x, y)$ este simetric și ținînd seama de (11) se vede că satisface (1).

4. Ecuația asociativității. În capitolul I, 6 am aruncat o scurtă privire istorică asupra soluționării ecuației funcționale

$$f[f(x, y), t] = f[x, f(y, t)]. \tag{12}$$

Vom rezolva mai jos ecuația (12) cu două metode noi în condițiile noastre obișnuite (f operație, continuu și strict monoton).

Metoda I. Demonstrăm întîi că soluția oarecare $f(x, y)$ a ecuației (12) este o pseudosumă prin verificarea condiției B.

Să presupunem

$$f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1),\ f(x_1, y_3) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_1) \tag{13}$$

și să alegem t_1 și t_2 astfel ca

$$f(y_1, t_2) = f(y_2, t_1), \tag{14}$$

ceea ce cu siguranță este posibil, dacă $|y_1 - y_2|$ e mai mic decît un anumit număr pozitiv; or această restricție este admisibilă în baza teoremei II. 7.

Se obține succesiv (folosind (12), (13) și (14))

$$f[x_1, f(y_2, t_2)] = f[f(x_1, y_2), t_2] = f[f(x_2, y_1), t_2] =$$
$$= f[x_2, f(y_1, t_2)] = f[x_2, f(y_2, t_1)] = f[f(x_2, y_2), t_1] =$$
$$= f[f(x_1, y_3), t_1] = f[x_1, f(y_3, t_1)].$$

În primul și ultimul membru primul argument este același, deci în baza monotoniei stricte avem

$$f(y_3, t_1) = f(y_2, t_2). \tag{15}$$

Folosind (12), (13), (14) și (15) obținem

$$f[f(x_2, y_3), t_1] = f[x_2, f(y_3, t_1)] = f[x_2, f(y_2, t_2)] =$$
$$= f[f(x_2, y_2), t_2] = f[f(x_3, y_1), t_2] = f[x_3, f(y_1, t_2)] =$$
$$= f[x_3, f(y_2, t_1)] = f[f(x_3, y_2), t_1],$$

de unde rezultă

$$f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2). \tag{16}$$

Am arătat că (13) atrage după sine (16), adică condiția B este satisfăcută. Aplicînd teorema II. 1 putem scrie

$$f(x, y) = H^{-1}[F(x) + G(y)]. \tag{17}$$

Înlocuim (17) în (12), egalăm argumentele funcției exterioare H^{-1} din cei doi membri și grupăm termenii:

$$FH^{-1}[F(x) + G(y)] - F(x) = GH^{-1}[F(y) + G(t)] - G(t).$$

Membrul al doilea nu conține pe x, deci

$$FH^{-1}[F(x) + G(y)] - F(x) = \lambda[G(y)]. \tag{18}$$

Notăm

$$FH^{-1} = \varphi;\ F(x) = \xi,\ G(y) = \eta.$$

Ecuația (18) devine

$$\varphi(\xi + \eta) = \xi + \lambda(\eta)$$

şi punînd $\eta = \text{const.}$ găsim

$$\varphi\ (\xi) = \xi + a;$$

deci $FH^{-1}\ (\xi) = \xi + a$ sau

$$F(x) = H\ (x) + a.$$

La fel se obţine

$$G(x) = H(x) + b.$$

Prin urmare

$$H\ [f\ (x,\ y)] = H(x) + H(y) + a + b$$

şi scriind în loc de funcţia continuă şi monotonă oarecare $H(x) + a + b$ tot $H(x)$, obţinem în sfîrşit

$$f(x,\ y) = H^{-1}\ [H(x) + H(y)]. \tag{19}$$

Deci dacă $f\ (x,\ y)$ verifică ecuaţia (12), atunci e de forma (19). Pe de altă parte, funcţiile (19) verifică ecuaţia (12), precum se constată prin înlocuire directă.

Funcţiile (19) fiind cazuri particulare ale funcţiilor cvasiliniare (12), discuţia domeniului de valori ale funcţiei $H(x)$, făcută la punctul **2**, se pot aplica pentru cazul de faţă. În (19) $a = b = 1$, deci sîntem în cazul II. Deci $H(x)$ este o funcţie continuă şi strict monotonă în $(\alpha,\ \beta)$, cu valori tinzînd la infinit într-o direcţie sau în amîndouă direcţiile. Intervalul (α, β) poate fi înlocuit cu un interval semideschis. Într-un interval închis ecuaţia (12) nu are soluţie.

Metoda II. Soluţia (19) a ecuaţiei asociativităţii este o funcţie simetrică. Vom arăta direct că din asociativitate rezultă simetria (în condiţiile noastre obişnuite). La unele detalii ale acestei demonstraţii, vom utiliza cîteva idei din lucrarea [4].

Funcţia $f(x,\ y)$, care verifică (12), trebuie să fie crescătoare în raport cu x şi y. Într-adevăr să presupunem că $f(x,\ y)$ descreşte cînd x creşte; atunci făcînd în (12) pe x să crească, $f(x,\ y)$ descreşte şi primul membru creşte, în timp ce al doilea membru descreşte. Făcînd să varieze t, se vede că $f(x,y)$ trebuie să fie crescătoare în raport cu y.

Să presupunem că există $e \in (\alpha,\beta)$ pentru care $f\ (e,\ e) = e$. Urmează

$$f[e,\ f\ (e,\ x)] = f\ [f\ (e,\ e),\ x] = f\ (e,\ x)$$

şi ţinînd seama de monotonia strictă avem $f\ (e,\ x) = x$ şi la fel se obţine că $f\ (x,\ e) = x$. Dacă ar exista şi un $e' \neq e$ cu proprietatea $f\ (e',\ e') = e'$, atunci din $f\ (e,\ x) = x$ şi $f\ (e',\ x) = x$ am trage concluzia $e' = e$, deci în $(\alpha,\ \beta)$ există cel mult un element idempotent.

Să admitem întîi că există elementul idempotent e. Fie $x_1 > e$ şi

$$x_2 = f\ (x_1,\ x_1) > f\ (e,\ x_1) \ = x_1$$

$$x_3 = f\ (x_2,\ x_1) > f\ (x_1,\ x_1) \ = x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = f\ (x_{n-1},\ x_1) > f\ (x_{n-2},\ x_1) = x_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Şirul $\{x_n\}$ este crescător; notăm $\bar{x} = \lim x_n$. Dacă am avea $\bar{x} < \beta$, $f\ (x,\ y)$ ar fi definit pentru $x = \bar{x}$, $y \in (\alpha,\ \beta)$ şi trecînd la limită în egalitatea care defineşte pe x_n, am obţine, folosind continuitatea, că $\bar{x} = f\ (\bar{x},\ x_1)$, ceea ce e absurd, căci $f\ (\bar{x},\ x_1) > f\ (\bar{x},\ e) = \bar{x}$.

Deci

$$\lim\ x_n = \beta. \tag{20}$$

Din (12) rezultă imediat

$$f\ (x_m,\ x_n) = x_{m+n} = f\ (x_n,\ x_m),$$

adică $f\ (x,\ y)$ este simetric pe mulţimea $\{x_n\}$.

Fie M_{x_1} mulţimea punctelor $x \geqslant x_1$ pentru care $f\ (x_1,\ x) = f\ (x,\ x_1)$. Dacă şirul $\xi_i \in M_{x_1}$ tinde către $\xi < \beta$, atunci din $f\ (x_1,\ \xi_i) = f\ (\xi_i,\ x_1)$ rezultă $f\ (x_1,\ \xi) = f\ (\xi,\ x_1)$, deci mulţimea M_{x_1} este închisă relativ la intervalul $[x_1,\ \beta)$. Să arătăm că M_{x_1} coincide cu $[x_1,\ \beta)$. Presupunînd contrariul, fie $(y,\ z)$ un interval contigu mulţimii M_{x_1}. Avem $f\ (x_1,\ y) = f\ (y,\ x_1)$ şi $f\ (x_1,\ z) = f\ (z,\ x_1)$. Deoarece $f(y,\ y) < f\ (y,\ z)$ şi $f\ (z,\ z) > f\ (y,\ z)$, ecuaţia $f\ (\alpha,\ \alpha) = f\ (y,\ z)$ determină pe α în mod univoc. Avem

$$\begin{aligned} f\ [x_1, f\ (\alpha,\ \alpha)] &= f\ [x_1, f\ (y,\ z)] = f\ [f\ (x_1,\ y),\ z] = f\ [f\ (y,\ x_1),\ z] = \\ &= f\ [y,\ f\ (x_1,\ z)] = f\ [y,\ f\ (z,\ x_1)] = f\ [f(y,\ z),\ x_1] = f\ [f\ (\alpha,\ \alpha),\ x_1]. \end{aligned} \tag{21}$$

Inegalitatea $f\ (x_1,\ \alpha) < f\ (\alpha,\ x_1)$ este imposibilă, căci din ea ar urma

$$f\ [x_1,\ f\ (\alpha,\ \alpha)] = f\ [f\ (x_1,\ \alpha), \alpha] < f\ [f\ (\alpha,\ x_1),\ \alpha] =$$

$$= f\ [\alpha,\ f\ (x_1,\ \alpha)] < f\ [\alpha, f(\alpha,\ x_1)] = f\ (\alpha,\ \alpha),\ x_1],$$

ceea ce este în contradicţie cu (21). În mod analog se vede că şi inegalitatea $f\ (x_1,\ \alpha) > f\ (\alpha,\ x_1)$ este imposibilă. Rezultă: $f\ (x_1,\ \alpha) = f\ (\alpha,\ x_1)$ sau cu alte cuvinte $\alpha \in M_{x_1}$, ceea ce e o imposibilitate α fiind luat dintr-un interval contigu mulţimii M_{x_1}. Ţinînd seamă de (20) şi de faptul că $x_n \in M_{x_1}$, rezultă că $M_{x_1} = [x_1,\ \beta)$.

Deci toate punctele situate la dreapta punctului oarecare $x_1 > e$ sînt permutabile cu x_1. Rezultă că funcţia $f\ (x,\ y)$ este simetrică pe $[e,\ \beta)$. La fel se poate arăta că e simetrică pe $(\alpha,\ e]$.

Funcţia $f\ (x,\ y)$ satisface ecuaţia bisimetriei în $[e,\ \beta)$, căci dacă $x,\ y,\ u,\ v \in [e,\ \beta)$

$$f[f\ (u,\ x),\ f(y,\ v)] = f\{\ u, f[x,\ f(y,\ v)]\} = f\{u, f[f(x,\ y),\ v]\} =$$

$$= f\{\ u, f[f(y,\ x),\ v]\} = f\{u, f[y,\ f(x,\ v)]\} = f[f(u,\ y), f(x,\ v)].$$

Funcţia $f\ (x, y)$ considerată pentru $x,\ y \in [e,\ \beta)$ satisface (1), e continuă, strict monotonă şi are valori în acest interval semideschis, deci (pct. 1)

$$f\ (x,\ y) = H^{-1}\ [aH\ (x) + bH\ (y) + c],\quad x, y \in [e, \beta). \tag{22}$$

Ţinînd seama de simetrie, $b = a$. Înlocuind în (12) obţinem

$$a\ [aH(x) + aH(y) + c] + aH\ (t) + c = aH(x) + a\ \ [aH(y) + aH(t) + c] + c,$$

de unde rezultă $a^2 = a$ şi deoarece $a \neq 0$, avem $a = 1$. Notînd $H_1(x) = H(x) + c$,

$$f\ (x,\ y) = H_1^{-1}\ [H_1\ (x) + H_1\ (y)],\quad x, y \in [e, \beta), \tag{23}$$

Punînd $x = y = e$, avem $H(e) = H(e) + H(e)$, deci $H(e) = 0$. Deoarece $a = b = 1$, $c = 0$, ne aflăm în cazul II (pct. 2), deci $\lim\limits_{x \to \beta - 0} H(x) = \pm \infty$. Scriind (23) în forma $H_1(f) = H_1(x) + H_1(y)$, se vede că putem presupune $H_1(x) \geqslant 0$ în $[e, \beta)$ (schimbînd dacă e nevoie pe H_1 în $-H_1$). Deci

$$H_1(e) = 0, \quad \lim_{x \to \beta - 0} H_1(x) = +\infty. \tag{24}$$

La fel se obține în $(\alpha, e]$

$$f(x, y) = H_2^{-1}[H_2(x) + H_2(y)], \quad x, y \in (\alpha, e], \tag{25}$$

unde

$$\lim_{x \to \alpha + 0} H_2(x) = -\infty, \quad H_2(e) = 0. \tag{26}$$

Formulele (24) și (26) arată că funcțiile monotone $H_2(x)$ și $H_1(x)$ sînt deodată crescătoare și se racordează, deci formează împreună o funcție $H(x)$ continuă și crescătoare în (α, β). Formulele (23) și (25) pot fi contopite în

$$f(x, y) = H^{-1}[H(x) + H(y)]. \tag{19}$$

Să trecem acum la cazul în care nu există element idempotent. Pentru $x, y, t \in (\alpha, \beta)$ avem

$$f(x, y) > y \iff f(y, x) > y \tag{27}$$

și

$$f(x, y) > y \iff f(x, t) > t \tag{28}$$

Echivalența inegalităților (27) se obține din

$$f[y, f(x, y)] = f[f(y, x), y],$$

dacă ținem seamă de monotonia strictă a lui $f(x, y)$ și echivalența (28) se obține din

$$f[t, f(x, y)] = f[f(t, x), y]$$

și din (27). În (27) și (28) semnul $>$ poate fi schimbat prin $<$ sau prin $=$.

Dacă pentru un x_0 și un y_0 avem $f(x_0, y_0) > y_0$, atunci $f(x, y) > y$ pentru x și y oarecare din (α, β). Într-adevăr, să presupunem contrariul, adică $f(x_1, y_1) \leqslant y_1$. Din (28) rezultă $f(x_0, y_1) > y_1$. Ecuația $f(\alpha, y_1) - y_1 = 0$ are o soluție unică, căci pentru $\alpha = x_0$ membrul I al acestei ecuații este pozitiv și pentru $\alpha = x_1$ negativ sau nul. Utilizînd (28) (cu semnul $=$) obținem $f(\alpha, \alpha) = \alpha$, în contradicție cu ipoteza că nu există element idempotent. La fel se arată că din $f(x_0, y_0) < y_0$ rezultă $f(x, y) < y$. Ipoteza $f(x_0, y_0) = y_0$ conduce imediat la contradicție.

Rezultă că numai următoarele două posibilități pot avea loc:

I. Pentru x, y oarecare $f(x, y) > y$ și $f(x, y) > x$

II. Pentru x, y oarecare $f(x, y) < y$ și $f(x, y) < x$

În cazul I se poate raționa ca și mai sus pentru $[e, \beta)$, iar în cazul II ca și pentru $(\alpha, e]$.

Astfel în toate cazurile sîntem conduși la (19).

Dacă există element idempotent, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} H(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \beta + 0} H(x) = +\infty$. În cazul I $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} H(x) = \gamma > 0$, $\lim\limits_{x \to \beta - 0} H(x) = +\infty$ și în cazul II $\lim\limits_{x \to \alpha + 0} H(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \beta - 0} H(x) = \delta < 0$ (γ și δ putînd lua și valori infinite).

Consecință. Fie $f(x, y)$ o operație continuă, strict monotonă și asociativă în intervalul (α, β). *Dacă presupunem că există un număr $e \in (\alpha, \beta)$, astfel ca $f(e, e) = e$, atunci numerile intervalului (α, β) formează cu operația $f(x, y)$ un grup comutativ.*

Adică o parte din axiomele de grup împreună cu monotonia strictă și continuitate atrag după sine celelalte axiome de grup. Nu trebuie presupusă natura intervalului (α, β), din ipotezele făcute rezultă că este deschis.

Într-adevăr, am văzut că în cazul existenței elementului idempotent

$$H[f(x, y)] = H(x) + H(y),$$

unde $H(x)$ are pe $(-\infty, +\infty)$ ca domeniu de valori. Deci transformarea $x' = H(x)$ stabilește un izomorfizm între structura algebrică (α, β) și grupul aditiv al numerelor reale.

5. Ecuația semisimetriei. Ecuația funcțională

$$f[f(t, x), y] = f[f(t, y), x] \tag{29}$$

a fost prima dată rezolvată de S c h w e i t z e r, prin reducere la ecuație diferențială, admițînd în afara derivabilității și ipoteza că ecuația $z = f(x, y)$ poate fi rezolvată în raport cu x pentru orice y și z și în raport cu y pentru orice x și z [33]. Ocupîndu-se cu diferite ecuații funcționale provenite din permutarea variabilelor în ecuația asociativității, H o s s z ú a reluat această ecuație [18] și a rezolvat-o în ipoteza că soluția căutată $f(x, y)$ este o funcție continuă și strict monotonă în intervalul deschis (α, β), care satisface și condiția că există un $x_0 \in (\alpha, \beta)$ astfel ca ecuația în y

$$f(x_0, y) = z \tag{30}$$

admite o soluție, *oricare* ar fi numărul real z.

În soluționarea dată mai jos ne vom putea lipsi de ipoteza (30).

Pentru a accentua structura asemănătoare a ecuației (29) cu cea a bisimetriei (dar mai simplă), am numit-o ecuația semisimetriei.

Arătăm că din (29) urmează condiția T. Fie

$$f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1) \text{ și } f(x_1, y_3) = f(x_3, y_1); \tag{31}$$

atunci

$$f[f(x_2, y_3), y_1] = f[f(x_2, y_1), y_3] = f[f(x_1, y_2), y_3] =$$

$$= f[f(x_1, y_3), y_2] = f[f(x_3, y_1), y_2] = f[f(x_3, y_2), y_1].$$

Comparînd primul și ultimul membru avem

$$f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2). \tag{32}$$

Deci (31) $\Longrightarrow$ (32), adică condiția T este satisfăcută. Din teorema II, 2 rezultă

$$f(x, y) = H^{-1}[F(x) + G(y)],$$

care înlocuită în (29) ne dă

$$FH^{-1}[F(t) + G(x)] + G(y) = FH^{-1}[F(t) + G(y)] + G(x).$$

Făcînd t și y constant și $G(x)$ să varieze, se observă că

$$FH^{-1}(\xi) = \xi + a$$

sau notînd $H^{-1}(\xi) = x$

$$F(x) = H(x) + a.$$

Scriind $G(y)$ în loc de $G(y) + a$, avem în definitiv

$$f(x, y) = H^{-1}[H(x) + G(y)]. \tag{33}$$

Pe altă parte, funcțiile (33) satisfac ecuația (29), după cum se vede prin înlocuire.

Domeniul (γ, δ) al valorilor funcției $H(x)$ este supusă la o restricție: numerile $H(x) + G(y)$ trebuie să-i aparțină. Dacă $G(y)$ ia valori numai pozitive restricția este $\delta = \infty$; dacă $G(y)$ ia numai valori negative, atunci $\gamma = -\infty$; iar dacă $G(y)$ ia valori pozitive și negative atunci $\gamma = -\infty$ și $\delta = \infty$.

6. Extinderea rezultatelor pentru cazul în care $z = f(x, y)$ nu este operație. În acest capitol am presupus că pentru $x, y \in (\alpha, \beta), z = f(x, y) \in (\alpha, \beta)$, ($f$ este o operație în (α, β)). Raționamentele prin care am rezolvat ecuațiile funcționale (1), (12) cu metoda I și (29) pot fi aplicate (cu mici modificări triviale) pentru cazul cînd condiția de operație se înlocuiește cu următoarea condiție mai slabă: *intervalul* (α, β) *să cuprindă un subinterval* (α', β') *astfel ca pentru* $x, y \in (\alpha', \beta')$, $f(x, y) \in (\alpha, \beta)$. Se găsește că în (α', β') *soluțiile sînt cele aflate mai înainte, adică* (2), (19) *respectiv* (33).

Dacă avem în (α, β) *un număr* e *pentru care* $f(e, e) = e$, *atunci existența intervalului* (α', β') *este asigurată*, ceea ce rezultă imediat din continuitatea funcției $f(x, y)$.

În cazul ecuației (12) existența numărului e înseamnă că (α, β) este un grup local [30] [1]).

CAPITOLUL IV

ALTE EXPRESII PENTRU CONDIȚIILE DE PSEUDOSUMĂ

1. Funcția $\psi_{uv}(x, y; f)$. Fie iarăși

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

o funcție continuă și strict monotonă într-un domeniu D. Rezolvăm ecuația (1) în raport cu x și y (exact ca și cap. II, 2):

$$x = \bar{f}(y, z), \quad y = \tilde{f}(z, x), \tag{2}$$

[1]) p. 144.

funcțiile $\bar{f}$ și $\tilde{f}$ fiind continue și strict monotone în domeniile lor de definiție $\bar{D}$ și $\tilde{D}$. Punem

$$\psi_{uv}(x, y; f) = \psi_{uv}(x, y) = f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)]. \tag{3}$$

Pentru u și v vom alege totdeauna valori în așa fel ca $(v, u) \in D$. Atunci funcția (3) de variabilele x și y este definită într-un domeniu D_{uv}, care nu este vid. Într-adevăr fie R un dreptunghi interior lui D, conținînd punctul (v, u) și să notăm cu A', A respectiv B', B intersecția dreptelor $\eta = u$ și $\xi = v$ cu laturile dreptunghiului (fig. 18). Să alegem dreptunghiul R astfel ca A, B respectiv A', B' să fie pe cîte o aceeași linie de nivel a funcției $f(x, y)$ și să notăm valorile lui $f(x, y)$ în A' și A cu α respectiv β. Atunci D_{uv} conține domeniul pătratic $\alpha < x < \beta, \alpha < y < \beta$, căci dacă luăm de aici pe (x, y) și notăm cu P intersecția liniei de nivel x cu $A'A$ și cu Q cea a lui y cu $B'B$, atunci punctul de intersecție M al paralelelor la axele ξ, η duse prin Q și P se găsește în interiorul lui R. $\psi_{uv}(x, y; f)$ este egal cu valoarea lui f în M.

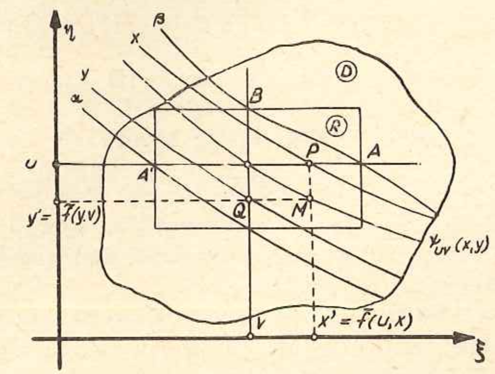

Fig. 18.

Formula (3) poate fi scrisă și astfel:

$$\psi_{uv}(x, y; f) = f(x', y'), \text{ unde } x = f(x', u), y = f(v, y') \tag{4}$$

sau schimbînd x' în x și y' în y

$$f(x, y) = \psi_{uv}[f(x, u), f(v, y)]. \tag{5}$$

În cazul pseudosumei

$$z = f(x, y) = H^{-1}[F(x) + G(y)] \tag{6}$$

funcția $\psi_{uv}(x, y; f)$ este

$$\psi_{uv}(x, y; f) = H^{-1}[H(x) + H(y) + G(u) - F(v)], \tag{7}$$

deci *pentru pseudosume* $\psi_{uv}(x, y; f)$ *este simetric, asociativ, bisimetric și semisimetric.* În punctul următor vom arăta că fiecare din aceste proprietăți caracterizează pseudosumele.

2. Caracterizarea pseudosumelor prin proprietățile funcției $\psi_{uv}(x, y; f)$. În cap. II, 2 am transformat condiția T în

$$f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)] = f[\bar{f}(u, y), \tilde{f}(x, v)]$$

(teorema II, 4), care în notațiile introduse acum se exprimă prin *simetria funcției* $\psi_{uv}(x, y; f)$. Deci teorema II, 4 conține faptul că simetria lui $\psi_{uv}(x, y; f)$ atrage după sine că f este o pseudosumă.

Să presupunem acum că $\psi_{uv}(x, y; f)$ satisface ecuația asociativității (cap. III, ecuația (12)) pentru u și v oarecare, dar fixați. Notăm $e = f(v, u)$; folosind (5), avem

$$\psi_{uv}(e, e; f) = \psi_{uv}[f(v, u); f(v, u); f] = f(v, u) = e;$$

deci putem aplica rezultatul din cap. III, 6: există $\delta > 0$, astfel ca pentru $|x-e| < \delta$, $|y-e| < \delta$ funcția $\psi_{uv}(x, y; f)$ este pseudosuma

$$\psi_{uv}(x, y; f) = H_{uv}^{-1}\ [H_{uv}(x) + H_{uv}(y)], \quad \text{dacă} \begin{cases} |x-f(v, u)| < \delta \\ |y-f(v, u)| < \delta \end{cases}$$

Ținînd seamă de (5) avem

$$f(x, y) = H_{uv}^{-1}\{H_{uv}[f(x, u)] + H_{uv}[f(v, y)]\}$$

pentru o vecinătate a punctului (v, u), adică fiecare punct din D are o vecinătate în care $f(x, y)$ este pseudosumă. Din teorema II, 7 rezultă că $f(x, y)$ este pseudosumă în D.

Dacă $\psi_{uv}(x, y; f)$ satisface ecuația bisimetriei (cap. III (1)) sau ecuația semisimetriei (cap. III (29)), atunci putem raționa exact la fel și deduce că $f(x, y)$ este pseudosuma în D.

T e o r e m a IV, 1. *Fiecare din următoarele condiții este necesară și suficientă pentru ca funcția continuă și strict monotonă $z = f(x, y)$ să fie pseudosumă:*

1) $\psi_{uv}(x, y; f)$ *simetric,*
2) $\psi_{uv}(x, y; f)$ *asociativ,*
3) $\psi_{uv}(x, y; f)$ *bisimetric,*
4) $\psi_{uv}(x, y; f)$ *semisimetric.*

Am văzut în capitolul II, 2 *că simetria lui* $\psi_{uv}(x, y; f)$ este de fapt *condiția* T *sub altă formă.* Să arătăm că *asociativitatea lui* $\psi_{uv}(x, y; f)$ *revine la condiția* R. Fie

$$f(x_1, y_3) = f(x_2, y_1),\ f(x_1, y_4) = f(x_2, y_2),\ f(x_3, y_3) = f(x_4, y_1). \tag{8}$$

Condiția R înseamnă că din (8) rezultă

$$f(x_3, y_4) = f(x_4, y_2). \tag{9}$$

Să punem

$$u = y_3,\ v = x_2,\ r = f(x_4, y_3),\ s = f(x_1, y_3),\ t = f(x_2, y_4).$$

Ținînd seamă de (8) și (5)

$$\psi_{uv}(r, s) = \psi_{y_3x_2}[f(x_4, y_3), f(x_2, y_1)] = f(x_4, y_1) = f(x_3, y_3)$$
$$\psi_{uv}(s, t) = \psi_{y_3x_2}[f(x_1, y_3), f(x_2, y_4)] = f(x_1, y_4) = f(x_2, y_2)$$

și

$$\psi_{uv}[\psi_{uv}(r, s), t] = \psi_{y_3x_2}[f(x_3, y_3), f(x_2, y_4)] = f(x_3, y_4)$$
$$\psi_{uv}[r, \psi_{uv}(s, t)] = \psi_{y_3x_2}[f(x_4, y_3), f(x_2, y_2)] = f(x_4, y_2)$$

deci (9) este echivalent cu

$$\psi_{uv}[\psi_{uv}(r, s), t] = \psi_{uv}[r, \psi_{uv}(s, t)].$$

Observație. Se vede acum o nouă cale de a demonstra teoremele II, 2 și II, 3. Pornim de la soluționarea directă a ecuației asociativității pentru funcții $f(x, y)$ continue și strict monotone în (α, β) cu proprietatea că există $e \in (\alpha, \beta)$ astfel ca $f(e, e) = e$. Deducem ca și în demonstrația teoremei IV, 1 că din asociativitatea lui $\psi_{uv}(x, y; f)$ rezultă că $f(x, y)$ are proprietatea locală de pseudosumă, din care deducem proprietatea globală de pseudosumă. Arătînd echivalența condiției R cu asociativitatea lui $\psi_{uv}(x, y; f)$ teorema II, 3 este demonstrată. Teorema II, 2 urmează în baza observației 1) din cap. II, 1 conform căreia T $\Rightarrow$ R.

3. Caracterizarea funcțiilor $\psi_{uv}(x, y; f)$. Formula (7) ne arată că operația $\psi_{uv}(x, y; f)$ aplicată pseudosumei (6) conduce la o funcție mai particulară. Se pune întrebarea: care este mulțimea funcțiilor $\psi_{uv}(x, y; f)$, cînd f parcurge toate funcțiile continue și strict monotone? Răspunsul e dat de

T e o r e m a IV, 2. *Fie $\varphi(x, y)$ o funcție continuă și strict monotonă. Fiecare din următoarele două condiții este necesară și suficientă pentru existența unei funcții continue și strict monotone $f(x, y)$ astfel ca*

$$\varphi(x, y) = \psi_{uv}(x, y; f) \tag{10}$$

a) *să existe numărul e cu proprietățile*

$$x = \varphi(x, e),\ y = \varphi(e, y)$$

b) $\psi_{st}(s, t; \varphi) = e$ *(constantă).*

Condiția a) *este necesară.* Ținînd seamă de (5)

$$f(x, y) = \varphi[f(x, u), f(v, y)]. \tag{11}$$

Să punem $y = u$, apoi $x = v$; notînd $f(v, u) = e$, avem

$$f(x, u) = \varphi[f(x, u), e]$$
$$f(v, y) = \varphi[e, f(v, y)].$$

Deoarece $f(x, u)$ și $f(v, y)$ pot lua valori arbitrare, condiția a) este arătată.

Condiția a) *este suficientă.* Admitem a) și alegem u, v în așa fel ca $f(v, u) = e$. Fie $\lambda(x)$ și $\mu(y)$ două funcții continue și strict monotone, care satisfac singura condiție

$$\lambda(v) = \mu(u) = e.$$

Funcția

$$f(x, y) = \varphi[\lambda(x), \mu(y)]$$

verifică ecuația (11). Într-adevăr

$$\varphi[f(x, u), f(v, y)] = \varphi\{\varphi[\lambda(x), \mu(u)], \varphi[\lambda(v), \mu(y)]\} = \varphi\{\varphi[\lambda(x), e], \varphi[e, \mu(y)\} =$$
$$= \varphi[\lambda(x), \mu(y)] = f(x, y).$$

Notînd în (11) $f(x, u) = \xi$, $f(v, y) = \eta$

$$\varphi(\xi, \eta) = f[\bar{f}(u, \xi), \tilde{f}(\eta, v)] = \psi_{uv}(\xi, \eta; f).$$

Din b) *rezultă* a). Ținînd seamă de (4) din b) urmează:

$$\varphi(x', y') = e, \quad \text{dacă } s = \varphi(x', s),\ t = \varphi(t, y').$$

Să presupunem că s este fix şi t variabil, atunci x' este fix şi deci y' de asemenea fix. Rezultă că pentru orice t corespunde acelaşi y' şi la fel pentru orice s acelaşi x'. Pe de altă parte pentru $s = t = e$ avem

$$\varphi\,(x', y') = e, \qquad e = \varphi\,(x', e), \qquad e = \varphi\,(y', e),$$

din care rezultă $x' = y' = e$, deci

$$s = \varphi\,(e, s) \text{ şi } t = \varphi\,(t, e)$$

pentru s şi t oarecare, ceea ce este tocmai a).

Din a) *rezultă* b). Am văzut că din a) urmează că există $f(x, y)$ astfel ca (10) să aibă loc. Condiţia b) rezultă din identitatea

$$\psi_{st}\,[s, t; \psi_{uv}\,(x, y; f)] = f(v, u). \tag{12}$$

Rămîne de a demonstra (12). Am văzut că

$$s = \psi_{uv}\,[f(v, u), s; f], \qquad t = \psi_{uv}\,[t, f(v, u); f]. \tag{13}$$

Din (4) găsim

$$\psi_{st}[s, t; \psi_{uv}\,(x, y; f)] = \psi_{uv}\,(s', t'; f), \text{ dacă}$$

$$s = \psi_{uv}\,(s', s; f), \qquad t = \psi_{uv}\,(t, t'; f),$$

ceea ce comparat cu (13) ne dă

$$s' = t' = f(v, u)$$

şi utilizînd (5) avem în definitiv

$$\psi_{st}\,[s, t; \psi_{uv}\,(x, y; f)] = \psi_{uv}\,[f(v, u), f(v, u); f] = f(v, u).$$

CAPITOLUL V

INTERPRETĂRI NOMOGRAFICE

1. Interpretarea simetriei funcţiei ψ_{uv} $(x, y; f)$. Să presupunem că funcţia $\zeta = f(\xi, \eta)$ este reprezentabilă cu o nomogramă cu puncte aliniate (fig. 19). Să fixăm pe scările ξ şi η punctele de cote v respectiv u şi pe scara ζ punctele de cote x şi y. Intersectăm scara ξ cu dreapta ux, scara η cu vy; dreapta care uneşte aceste două puncte de intersecţie taie scara ζ în punctul de cotă

$$z = f[f(u, x), \tilde{f}\,(y, v)] = \psi_{uv}\,(x, y; f).$$

Dacă ψ_{uv} $(x, y; f)$ este o funcţie simetrică de x şi y, atunci schimbînd rolul lui x şi y în construcţia de mai sus, ajungem la acelaşi punct z (fig. 20). Deci simetriei funcţiei $\psi_{uv}(x, y; f)$ îi corespunde următoarea proprietate a locului geometric L, format din suporţii celor trei scări: să presupunem că laturile opuse ale exago-

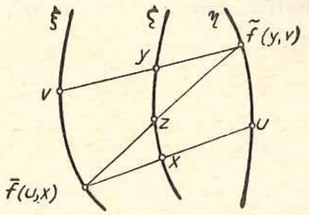

Fig. 19.

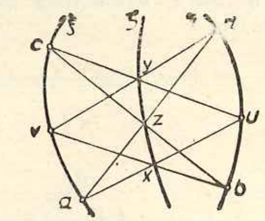

Fig. 20.

nului *advbcu* se taie în punctele x, y, z; dacă din aceste nouă puncte, opt se află pe L, atunci şi al nouălea se găseşte pe L. Se ştie că orice cubică se bucură de această proprietate (teorema lui Chasles) şi că numai cubicele au această proprietate (dualul teoremei lui Graf şi Sauer [14], [11]. Ţinînd seama de teorema IV, 1, conform căreia simetria lui $\psi_{uv}(x, y; f)$ este echivalentă cu faptul că $f(x, y)$ este o pseudosumă (în condiţii de continuitate şi monotonie strictă), putem enunţa:

T e o r e m a V, 1. *Orice nomogramă cu puncte aliniate, avînd scările pe aceeaşi cubică (proprie sau degenerată), reprezintă o pseudosumă şi nu există alte nomograme cu puncte aliniate pentru pseudosume.*

Observaţie. În tratatele de nomografie se arată că nomogramele cu scările pe aceeaşi cubică cu un punct dublu, de întoarcere sau izolat reprezintă pseudosume. Pentru aceasta se folosesc ecuaţiile parametrice ale cubicei, care în cazurile specificate se exprimă prin funcţii raţionale, iar rezultatul enunţat se obţine prin ecuaţia lui Soreau (ecuaţia (9) din cap. I). Pentru celelalte două tipuri de cubice proprii proiectiv distincte, în ecuaţia lui Soreau trebuie să figureze funcţii eliptice. Partea a doua a teoremei V, 1 nu a fost arătată pînă în prezent în nomografie.

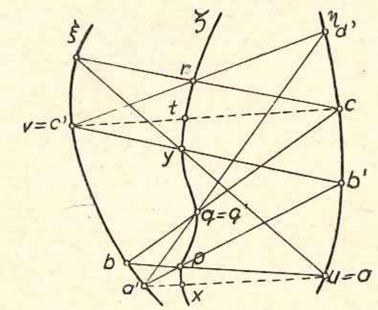

Fig. 21.

2. Interpretarea asociativităţii funcţiei ψ_{uv} $(x,y;f)$. Notăm pe figura 21 intersecţia scării ζ cu dreapta bc prin q şi cu dreapta $a'd'$ prin q'. Avem $\psi_{uv}\,(x,y;f) = p$, $\psi_{uv}\,(p, t; f) = q$, $\psi_{uv}\,(y, t; f) = r$, $\psi_{uv}\,(x, r; f) = q'$.

Deci proprietatea de asociativitate a funcţiei $\psi_{uv}\,(x,y;f)$ se exprimă prin $q=q'$.

Prin urmare asociativităţii lui $\psi_{uv}\,(x, y; t)$, îi corespunde următoarea proprietate pentru locul geometric L: dacă *abcd* şi *a'b'c'd'* sînt două patrulatere înscrise în L, astfel ca intersecţia perechilor de drepte $(ab, a'b')$, $(cd, c'd')$ şi $(ad, b'c')$, se află pe L, atunci şi dreptele bc şi $a'd'$ se intersectează tot pe el. *Această* *proprietate este caracteristică pentru cubice*, deoarece ea este echivalentă cu asociativitatea lui $\psi_{uv}(x, y; f)$, care este echivalentă cu simetria lui $\psi_{uv}(x, y; f)$, despre care știm din punctul anterior că este necesară și suficientă pentru ca locul L să fie cubică.

3. Interpretarea bisimetriei și semisimetriei funcției $\psi_{uv}(x,y;f)$. Pentru a interpreta relația

$$\psi_{uv}[\psi_{uv}(r, x), \psi_{uv}(y, s)] = \psi_{uv}[\psi_{uv}(r, y), \psi_{uv}(x, s)],$$

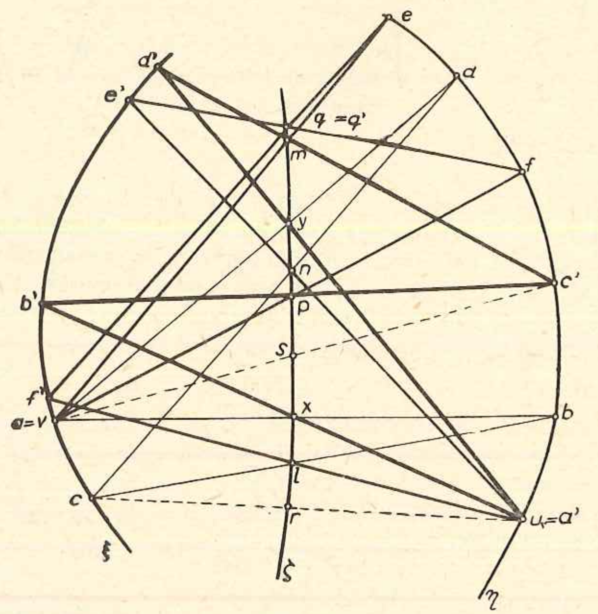

Fig. 22

notăm pe figura 22 pe rînd punctele

$$\psi_{uv}(r, x) = l, \qquad \psi_{uv}(y, s) = m, \qquad \psi_{uv}(l, m) = q,$$
$$\psi_{uv}(r, y) = n, \qquad \psi_{uv}(x, s) = p, \qquad \psi_{uv}(n, p) = q'.$$

Bisimetria funcției $\psi_{uv}(x, y; f)$ este deci echivalentă cu coinciderea punctelor q și q' adică cu următoarea proprietate a locului geometric L: fie $abcd$ și $a'b'c'd'$ două patrulatere înscrise în L și $a\,e\,f'a'e'f$ un exagon înscris în L avînd cîte un vîrf comun cu patrulaterele. Dacă perechile de drepte $(ab, a'b')$, $(ad, a'd')$, $(ae, c'd')$, $(a'e', cd)$, $(af, b'c')$, $(a'f', bc)$ se intersectează pe L, atunci și dreptele ef' și $e'f$ se intersectează pe L. Rezultă că *această proprietate este caracteristică pentru cubice.*

Interpretarea similară a semisimetriei funcției $\psi_{uv}(x, y; f)$ nu conduce la o proprietate nouă; găsim aceeași proprietate ca și în cazul simetriei lui $\psi_{uv}(x, y; f)$, arătată pe figura 20.

CAPITOLUL VI

REZOLVAREA UNOR ECUAȚII FUNCȚIONALE CU MAI MULTE FUNCȚII NECUNOSCUTE DE DOUĂ VARIABILE

1. Condiția ca o funcție cu trei variabile să fie de forma $F[\varphi(x, y), z]$. Vom vedea în capitolul VII că descompunerea funcției date $f(x, y, z)$ în

$$f(x, y, z) = F[\varphi(x, y), z] \tag{1}$$

este o problemă fundamentală pentru construirea nomogramelor compuse.

Dacă admitem pentru φ și F funcții cu două variabile, fără nici o restricție, atunci descompunerea (1) este totdeauna posibilă. Într-adevăr, să presupunem că $f(x, y, z)$ este o funcție (oarecare) definită în cubul unitar $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. Alegem funcția $\varphi(x, y)$ în felul următor: valorile x și y se scriu sub forma de fracție zecimală infinită (pentru fracțiile zecimale finite care admit două reprezentări sub formă de fracție zecimală, alegem reprezentarea constînd din cifre 9 de la un anumit rang)

$$\begin{cases} x = 0,\, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots \\ y = 0,\, b_1\, b_2 \ldots b_n \ldots \end{cases}$$

și punem

$$\varphi(x, y) = 0,\, a_1\, b_1\, a_2\, b_2 \ldots$$

Funcția $\varphi(x, y)$ reprezintă biunivoc patratul unitar pe segmentul unitar. Funcția $F(u, z)$ o definim pentru $0 \leqslant u, z \leqslant 1$ determinînd x^*, y^* astfel ca $\varphi(x^*, y^*) = u$ și punînd $F(u, z) = f(x^*, y^*, z)$. Atunci în mod evident

$$f(x, y, z) = F[\varphi(x, y), z].$$

Dacă pentru φ și F se admit numai funcții derivabile, atunci descompunerea (1) nu mai este totdeauna posibilă. E. G o u r s a t a stabilit condiția necesară și suficientă pentru ca $f(x, y, z)$ să admită descompunerea (1) în acest caz [13], sub forma

$$f''_{xz}\, f'_y - f'_{yz}\, f'_x = 0. \tag{2}$$

Condiția (2) este necesară, pentru că prin derivare în raport cu x și y obținem din (1)

$$f'_x = F'_\varphi\, \varphi'_x, \quad f'_y = F'_\varphi\, \varphi'_y$$

deci

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\varphi'_x(x, y)}{\varphi'_y(x, y)} = \text{funcție de } x \text{ și } y$$

sau

$$\left(\frac{f'_x}{f'_y}\right)_z = 0,$$

din care (2) rezultă imediat. Condiția (2) este suficientă, căci (2) fiind satisfăcută, notăm $f(x, y, z_0) = \varphi(x, y)$, unde constanta z_0 s-a ales astfel ca $f(x, y, z_0) \not\equiv 0$. Expresia

$$\frac{f'_x(x, y, z)}{f'_y(x, y, z)}$$

fiind independentă de z, avem

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$$

sau

$$\frac{\partial (f, \varphi)}{\partial (x, y)} = 0,$$

din care rezultă

$$f(x, y, z) = F[\varphi(x, y), z].$$

Pentru cazul funcțiilor φ și F continue și strict monotone demonstrăm:
Teorema VI, 1. *Următoarele condiții sînt necesare și suficiente pentru ca funcția $f(x, y, z)$ să fie de forma* (1) *cu F și φ continue și strict monotone.*

a) *$f(x, y, z)$ continuu și strict monoton în domeniul său de definiție E,*

b) $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) \Longrightarrow f(x_1, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_2)$.

Condițiile sînt necesare: a) rezultă imediat; pentru a arăta b), fie

$$F[\varphi(x_1, y_1), z_1] = F[\varphi(x_2, y_2), z_1];$$

din monotonia strictă a funcției F rezultă $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$, deci

$$F[\varphi(x_1, y_1), z_2] = F[\varphi(x_2, y_2), z_2].$$

Condițiile sînt suficiente: demonstrăm întîi că din a) și b) rezultă că fiecare punct din E are o vecinătate în care $f(x, y, z)$ este de forma (1). Fie $(x_0, y_0, z_0) \in E$; să luăm în E un cub de latura δ, avînd centrul în acest punct și muchiile paralele cu axele de coordonate și să alegem în interiorul cubului o vecinătate V_0 a punctului (x_0, y_0, z_0) în așa fel ca $f(x, y, z)$ să ia în V_0 numai valori cuprinse între $f(x_0 - \delta, y_0, z_0)$ și $f(x_0 + \delta, y_0, z_0)$. Atunci pentru $(x, y, z_0) \in V_0$ se poate determina o valoarea unică x' astfel ca

$$f(x, y, z_0) = f(x', y_0, z_0)$$

și $x_0 - \delta < x' < x_0 + \delta$. Acest x' este funcție de x și y,

$$x' = \varphi(x, y).$$

Introducînd notația

$$F(\xi, \eta) = f(\xi, y_0, \eta),$$

avem în baza condiției *b)*

$$f(x, y, z) = f(x', y_0, z) = F(x', x) = F[\varphi(x, y), z].$$

Să considerăm acum paralelipipede închise cu fețe paralele cu planele de coordonate, situate în E. Dacă în fiecare din două paralelipipede cu o față comună, paralelă cu planul xOy, funcția $f(x, y, z)$ este de forma (1), adică dacă

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= F[\varphi(x, y), z], \; z_1 \leqslant z \leqslant z_2, \\ f(x, y, z) &= F_1[\varphi_1(x, y), z], \; z_2 \leqslant z \leqslant z_3 \end{aligned}\right. \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \; y_1 \leqslant y \leqslant y_2$$

atunci

$$F[\varphi(x, y), z_2] = F_1[\varphi_1(x, y), z_2],$$

deci

$$\varphi_1(x, y) = g[\varphi(x, y)].$$

Notînd $F^*(\xi, \eta) = F_1[g(\xi), \eta]$, avem în al doilea paralelipiped

$$f(x, y, z) = F^*[\varphi(x, y), z].$$

Funcțiile $F(\xi, \eta)$ și $F^*(\xi, \eta)$ sînt definite pentru aceleași valori ξ și F pentru $z_1 \leqslant \eta \leqslant z_2$, iar F^* pentru $z_2 \leqslant \eta \leqslant z_3$; avînd în vedere că $F(\xi, z_2) = F^*(\xi, z_2)$, funcțiile F și F^* pot fi considerate ca o aceeași funcție F definită pentru $z_1 \leqslant \eta \leqslant z_3$. Rezultă că *$f(x, y, z)$ este de forma (1), în domeniul obținut prin impreunarea celor două paralelipipede.*

Să luăm acum două paralelipipede lipite cu o față paralelă cu planul xOz și să presupunem că $f(x, y, z)$ este de forma (1) în fiecare:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z) &= F[\varphi(x, y), z], \; y_1 \leqslant y \leqslant y_2, \\ f(x, y, z) &= F_1[\varphi_1(x, y), z], \; y_2 \leqslant y \leqslant y_3 \end{aligned}\right. \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \; z_1 \leqslant z \leqslant z_2.$$

În al doilea paralelipiped avem

$$F_1[\varphi_1(x, y), z] = F^*\{g[\varphi_1(x, y)], z,\},$$

unde funcția de o variabilă g se poate alege arbitrar; o alegem în așa fel ca

$$g[\varphi_1(x, y_0)] = \varphi(x, y_0).$$

Atunci

$$F(\xi, \eta) = F^*(\xi, \eta)$$

pentru orice pereche de valori ξ, η pentru care amîndouă funcții F și F^* sînt definite. Considerîndu-le ca o aceeași funcție și la fel funcțiile $\varphi(x, y)$ și $g[\varphi_1(x, y)]$, vedem că *$f(x, y, z)$ este de forma* (1) *în domeniul obținut prin împreunarea celor două paralelipipede.* În mod analog pot fi împreunate două paralelipipede lipite cu o față paralelă cu planul yOz.

Teorema enunțată rezultă acum ușor în baza unui raționament analog cu cel din capitolul II, 5.

Observație. Din demonstrație rezultă că putem slăbi condiția b), cerînd verificarea ei în cîte o vecinătate a fiecărui punct din E.

2. Generalizarea ecuației asociativității. Ecuația funcțională

$$g[\varphi(x, y), z] = h[x, \psi(y, z)] \tag{3}$$

cu patru funcții necunoscute reprezintă o generalizare a ecuației asociativității și a diferitelor modificări ale ei, de exemplu:

$$h[x, h(y, z)] = h[z, h(y, x)] \tag{4}$$

(legea asociativității a lui Grassmann),

$$g[g(x, y), z] = g[x, g(z, y)] \tag{5}$$

(legea asociativității a lui Tarki),

$$g[g(x, y), z] = g[y, g(z, x)] \tag{6}$$

(legea asociativității ciclice), ecuația semisimetriei (cap. III, 5) etc. M. Hosszú a rezolvat ecuațiile particulare (4), (5), (6) în ipoteza că soluțiile sînt funcții continue și strict monotone, iar ecuația generală (3) în ipoteza că soluțiile sînt strict monotone și admit derivate parțiale de ordinul 1 [18]. Rezolvăm mai jos ecuația (3) în ipoteza de continuitate și monotonie strictă.

Precizăm că numai atunci vom considera ecuația (3) verificată de funcțiile φ, ψ, g, h, dacă pentru (x, y) din domeniul de definiție al lui φ se găsește totdeauna un interval de valori z, pentru care membrul I este definit și pentru toate aceste valori și membrul II are sens. Se cere de asemenea că pentru orice (y, z) din domeniul de definiție al funcției ψ să se găsească un interval de valori x pentru care membrul II are sens și că pentru toate aceste valori x, y, z și membrul I să aibă sens. Dacă funcțiile φ, ψ, g, h sînt definite pe întregul plan, atunci aceste condiții sînt firește verificate de la sine.

T e o r e m a VI, 2. *Soluțiile continue și strict monotone cele mai generale ale ecuației* (3) *sînt*

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)] \\ \psi(x, y) &= H_2^{-1}[G_1(x) + G_2(y)] \\ g(x, y) &= H_3^{-1}[H_1(x) + G_2(y)] \\ h(x, y) &= H_3^{-1}[F_1(x) + H_2(y)], \end{aligned} \tag{7}$$

unde F_1, G_1, G_2, H_1, H_2 *sînt funcții continue și strict monotone arbitrare.*

Înlocuind funcțiile (7) în ecuația (3), găsim

$$H_3^{-1}[F_1(x) + G_1(y) + G_2(z)] = H_3^{-1}[F_1(x) + G_1(y) + G_2(z)],$$

deci aceste funcții satisfac ecuația (3).

Pentru a arăta că nu există alte soluții, să admitem că funcțiile continue și strict monotone φ, ψ, g, h satisfac (3) și să notăm cei doi membri ai ecuației (3) cu $f(x, y, z)$

$$f(x, y, z) = g[\varphi(x, y), z] = h[x, \psi(y, z)]. \tag{8}$$

Folosind teorema VI, 1, avem

$$\begin{aligned} f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2) &\Longrightarrow \\ f(x_1, y_2, z_2) = f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1). & \end{aligned} \tag{9}$$

Arătăm că funcția de două variabilă $f(x, y, z_1)$ verifică condiția B (cap. II, 1). Fie

$$\begin{aligned} &f(x_1, y_2, z_1) = f(x_2, y_1, z_1), \\ &f(x_1, y_3, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) = f(x_3, y_1, z_1) \end{aligned} \tag{10}$$

și să notăm cu z_2 valoarea z pentru care

$$f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_1, z_2);$$

dacă $|x_2 - x_1|$ e suficient de mic, ceea ce putem admite avînd în vedere teorema II, 7, atunci z_2 există cu siguranță. Avem

$$f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2)$$

și folosind (9) mai avem

$$f(x_1, y_2, z_2) = f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1). \tag{11}$$

Din (10) și (11)

$$f(x_2, y_2, z_1) = f(x_1, y_3, z_1) = f(x_1, y_2, z_2),$$

și aplicînd (9)

$$f(x_1, y_3, z_2) = f(x_2, y_2, z_2) = f(x_2, y_3, z_1). \tag{12}$$

Ținînd iarăși seamă de (10) și (11)

$$f(x_3, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_1) = f(x_2, y_1, z_2),$$

și aplicînd (9) găsim

$$f(x_2, y_2, z_2) = f(x_3, y_1, z_2) = f(x_3, y_2, z_1). \tag{13}$$

Relațiile (12) și (13) ne dau

$$f(x_2, y_3, z_1) = f(x_3, y_2, z_1), \tag{14}$$

deci (10) $\Longrightarrow$ (14) și astfel am arătat că funcția $f(x, y, z_1)$ verifică condiția B (local).

Avînd în vedere (8)

$$\varphi(x, y) = \Phi[f(x, y, z_1)],$$

deci $\varphi(x, y)$ satisface de asemenea condiția B, deci în baza teoremei II, 7

$$\varphi(x, y) = H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)]. \tag{15}$$

Înlocuim această expresie a funcției $\varphi(x, y)$ în ecuația (3) și punem $y = y'$, $z = z_0$

$$h[x, \psi(y', z_0)] = g\{H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y')], z_0\}.$$

Notăm $\psi(y', z_0) = y$; atunci

$$h(x, y) = H_3^{-1}[F_1(x) + H_2(y)]. \tag{16}$$

Înlocuind din nou în ecuația (3), găsim

$$g\{H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)], z\} = H_3^{-1}\{F_1(x) + H_2[\psi(y, z)]\}. \tag{17}$$

Punînd $y = y_0$, avem

$$g(x, y) = H_3^{-1}[\Phi(x) + X(y)] \tag{18}$$

și (17) devine

$$\Phi H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)] + X(z) = F_1(x) + H_2[\psi(y, z)]. \tag{19}$$

Făcînd aici $x = x_0$

$$\psi(x, y) = H_2^{-1}[\Psi(x) + X(y)]. \tag{20}$$

Înlocuim (20) în ecuația (19):

$$\Phi H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)] + X(z) = F_1(x) + \Psi(y) + X(z)$$

sau

$$\Phi H_1^{-1}[F_1(x) + G_1(y)] = [F_1(x) + G_1(y)] + [\Psi(y) - G_1(y)].$$

Făcînd $y = const$, se vede că $\Phi H_1^{-1}(\xi) = \xi + a$, deci

$$\Phi(x) = H_1(x) + a$$
$$\Psi(x) = G_1(x) + a.$$

Notînd $X(x) + a = G_2(x)$, avem în definitiv

$$g(x, y) = H_3^{-1}[H_1(x) + G_2(y)],$$
$$\psi(x, y) = H_2^{-1}[G_1(x) + G_2(y)].$$

Aceste două formule împreună cu (15) și (16) sînt tocmai formulele (7) și cu aceasta am demonstrat teorema VI, 2.

Putem găsi acum cu ușurință soluțiile diferitelor cazuri particulare ale ecuației (3):

a) *Ecuația asociativității.* Avem

$$g(x, y) = \varphi(x, y) = h(x, y) = \psi(x, y).$$

În cazul de față formulele (7) reprezintă în diferite feluri *aceeași* pseudosumă. Dar în capitolul II, 4 am văzut că din două reprezentări ale aceleiași pseudosume

$$f(x, y) = H^{-1}[F(x) + G(y)],$$
$$f(x, y) = H^{*-1}[F^*(x) + G^*(y)],$$

rezultă

$$F^*(x) = aF(x) + b,\ G^*(x) = aG(x) + c,\ H^*(x) = aH(x) + b + c,$$

unde a, b, c sînt constante. Deci din prima și a patra formulă (7) avem

$$H_2 = G_1 + a, \qquad H_3 = H_1 + a,$$

din a doua și a treia

$$H_1 = G_1 + b, \qquad H_3 = H_2 + b$$

și din a treia și a patra

$$H_1 = F_1 + c, \qquad H_2 = G_2 + c.$$

Deci

$$G_1 = F_1 + c - b, \qquad G_2 = F_1 + a - b$$

$$H_1 = F_1 + c,\ H_2 = F_1 + a - b + c,\ H_3 = F_1 + a + c;$$

rezultă

$$F_1[\varphi(x, y)] + c = F_1(x) + F_1(y) + c_1 - b.$$

Notînd $H(x) = F_1(x) - b$, avem

$$\varphi(x, y) = H^{-1}[H(x) + H(y)]$$

și astfel am regăsit că soluțiile ecuației asociativității sînt cvasisumele (cap. III, 4).

(b *Ecuația lui Grassmann.* Introducînd notația $h(x, y) = -h'(y, x)$, ecuația (4) devine

$$h'[h'(x, y), z] = h[x, h(y, z)],$$

deci ea se obține din ecuația (3) prin particularizarea

$$h = \psi = g' = \varphi'$$

(am notat în general cu accent funcția obținută prin schimbarea rolului celor două variabile independente). Obținem la fel ca mai înainte

$$H_1 = H_2 + a,\ F_1 = G_2 + a,\ F_1 = bH_1 + c,\ G_1 = bG_2 + d,\ H_1 = bH_3 + c + d,$$

de unde

$$G_1 = b^2 H_2 + ab^2 + bc - ab + d,\ G_2 = bH_2 + ab + c - a;$$

prin urmare

$$h(x, y) = \psi(x, y) = H_2^{-1}[b^2 H_2(x) + bH_2(y) + \alpha], \tag{21}$$

care este tocmai rezultatul lui Hosszú.

Dacă $b^2 + b - 1 \neq 0$, notînd $H(x) = H_2(x) + \dfrac{\alpha}{b^2 + b - 1}$,

avem

$$h(x, y) = H^{-1}[b^2 H(x) + bH(x)]; \tag{22}$$

iar dacă $b^2 + b - 1 = 0$, atunci notînd $H = H_2(x)$

$$h(x, y) = H^{-1}\left[\frac{1 - \varepsilon\sqrt{5}}{2} H(x) + \frac{1 + \varepsilon\sqrt{5}}{2} H(y) + \alpha\right],\ \varepsilon = \pm 1. \tag{22'}$$

Se constată imediat prin verificare directă că funcțiile (22) și (22′) satisfac ecuațiile (4), deci *toate soluțiile continue și strict monotone ale ecuației* (4) *sînt date de formulele* (22) *și* (22′), *unde* $H(x)$ *este continuu și strict monoton.*

c) *Ecuația lui Tarki.* Ecuația funcțională (5) se obține din (3), prin particularizarea

$$g = \varphi = h = \psi';$$

folosind (7) se găsește, ca și mai înainte, că toate *soluțiile ecuației* (5) *sînt funcțiile*

$$g(x, y) = H^{-1}[H(x) + H(y)];$$

urmează că ecuația (5) este echivalentă cu ecuația asociativității.

d) *Ecuația asociativității ciclice.* Schimbînd pe x și y între ei, ecuația (6) devine

$$g[g(y, x), z] = g[x, g(z, y)],$$

deci se obține din ecuația (3) prin particularizarea

$$g = h = \varphi' = \psi'.$$

Soluțiile ei sînt cvasisumele, deci ecuația (6) este iarăși echivalentă cu ecuația asociativității.

e) *Ecuația semisimetriei.* Ecuația (29) din cap. III, 5 se poate scrie sub forma

$$f\,[f'\,(x,\ y),\ z] = f'\,[x,\ f\,(y,\ z)],$$

deci se obține din (3) dacă

$$g = \psi = h' = \varphi';$$

folosind (7) se regăsește soluția (33) din capitolul III

$$f(x,\ y) = H^{-1}\,[H\,(x) + G\,(y)].$$

Ecuația funcțională (3) conține și alte tipuri de ecuații mai particulare, de exemplu cele în care intervine pe lîngă funcția necunoscută $g(x,y)$ și funcțiile inverse $\overline{g}$ și $\widetilde{g}$ (pentru notație a se vedea cap. IV, 1). Să considerăm două exemple:

f) *Ecuația funcțională*

$$g\,[\overline{g}\,(x,\ y).\ z] = g\,[x,\ \widetilde{g}\,(y,\ z)]. \tag{23}$$

Aplicînd teorema VI, 2 avem

$$\overline{g}\,(x,\ y) = H_1^{-1}\,[-\,G_2\,(x) + H_3\,(y)]$$

$$\widetilde{g}\,(x,\ y) = G_2^{-1}\,[H_3\,(x) - H_1\,(y)]$$

$$h = g,\quad \varphi = \overline{g},\ \psi = \widetilde{g}$$

$$H_1 = F_1 + a,\ H_2 = G_2 + a,\ -G_2 = F_1 + b,\ H_3 = G_1 - b,$$

$$H_2 = cG_1 + d,\ -H_1 = cG_2 + e,\ G_2 = cH_2 + d + e.$$

Rezultă că $c = 1,\ d = -b,\ e = b - a$ și

$$g\,(x, y) = H^{-1}\,[G\,(x) - G\,(y)]. \tag{24}$$

Pe de altă parte, această funcție verifică ecuația (23) deci *toate soluțiile continue și strict monotone ale ecuației* (23) *sînt funcțiile* (24).

g) *Ecuația funcțională*

$$g\,[\widetilde{g}\,(x,\ y),\ z] = g\,[x,\ \overline{g}\,(x,\ y)] \tag{25}$$

are ca soluție generală

$$g\,(x,\ y) = H^{-1}\,[H\,(x) + H\,(y)],$$

deci este echivalentă cu ecuația asociativității.

3. Generalizarea ecuației bisimetrice. Ecuația funcțională

$$f\,[g\,(u,\ x),\ h\,(y,\ v)] = \varphi\,[\psi\,(u,\ y),\ \chi\,(x,\ v)] \tag{26}$$

cu șase funcții necunoscute a fost rezolvată de M. H o s s z ú în ipoteza că soluțiile sînt derivabile și strict monotone [17]. Rezolvăm această ecuație în ipoteza de continuitate și monotonie strictă. În același timp simplificăm și scrierea rezultatului dat de H o s s z ú.

T e o r e m a VI, 3. *Soluțiile continue și strict monotone cele mai generale ale ecuației funcționale* (26) *sînt*

$$\begin{aligned} f\,(x,\ y) &= H^{-1}\,[F_1\,(x) + G_1\,(y)], & \varphi\,(x,y) &= H^{-1}\,[F_4\,(x) + G_4\,(y)]\\ g\,(x,\ y) &= F_1^{-1}\,[F_2\,(x) + G_2\,(y)], & \psi\,(x,y) &= F_4^{-1}\,[F_2\,(x) + F_3\,(y)]\\ h\,(x,\ y) &= G_1^{-1}\,[F_3\,(x) + G_3\,(y)], & \chi\,(x,y) &= G_4^{-1}\,[G_2\,(x) + G_3\,(y)], \end{aligned} \tag{27}$$

unde cele nouă funcții de o singură variabilă sînt continue și strict monotone arbitrare.

Pentru demonstrație notăm

$$g\,(\xi,\ \eta) = g'\,(\eta,\ \xi)\quad \text{și}\quad \varphi\,(\xi,\ \eta) = \varphi'\,(\eta,\ \xi)$$

și punem $v = v_0$; ecuația (26) devine

$$f\,[g'\,(x,\ u),\ h\,(y,\ v_0)] = \varphi'\,[\chi\,(x,\ v_0),\ \psi\,(u,\ y)].$$

Facem următoarea schimbare în notația funcțiilor

$$\begin{aligned} k\,(\xi,\ \eta) &= f\,[\xi,\ h\,(\eta,\ v_0)]\\ l\,(\xi,\ \eta) &= \varphi'\,[\chi\,(\xi,\ v_0),\ \eta]; \end{aligned} \tag{28}$$

ecuația funcțională (26) devine

$$k\,[g'\,(x,\ u),\ y] = l\,[x,\ \psi\,(u,\ y)],$$

care este tocmai ecuația generalizată a asociativității (3). Aplicînd teorema VI, 2 avem

$$g\,(x,\ y) = g'\,(y,\ x) = F_1^{-1}\,[F_2\,(x) + G_3\,(y)]$$

$$\psi\,(x,\ y) = F_4^{-1}\,[F_2\,(x) + F_3\,(y)]$$

$$k\,(x,\ y) = H^{-1}\,[F_1\,(x) + F_3\,(y)]$$

$$l\,(x,\ y) = H^{-1}\,[G_2\,(x) + F_4\,(y)].$$

Înlocuim în prima formulă (28) expresia găsită pentru $k\,(\xi,\ \eta)$ și punem $\xi = x$, $h\,(\eta,\ v_0) = y$; notînd $G_1\,(y) = F_3\,[\overline{h}\,(v_0,\ y)]$, se obține

$$f\,(x,\ y) = H^{-1}\,[F_1\,(x) + G_1\,(y)].$$

Înlocuim în a doua formulă (28) expresia funcției $l\,(\xi,\ \eta)$, punem $x = \psi\,(\xi,\ v_0)$, $y = \eta$ și notăm $G_4\,(x) = G_2\,[\overline{\chi}\,(v_0,x)]$; se obține

$$\varphi'\,(x,\ y) = H^{-1}\,[G_4\,(x) + F_2\,(y)]$$

sau

$$\varphi\,(x,y) = H^{-1}\,[F_4\,(x) + G_4\,(y)].$$

Substituim în ecuația funcțională (26) expresiile aflate pentru funcțiile $g\,(x,y)$, $\psi\,(x,\ y)$, $f\,(x,\ y)$ și $\varphi\,(x,\ y)$:

$$F_2\,(u) + G_2\,(x) + G_1\,[h\,(y,\ v)] = F_2\,(u) + F_3\,(y) + G_2\,[\chi\,(x,\ v)].$$

Grupînd aici termenii

$$G_1\,[h\,(y,\ v)] - F_3\,(y) = G_4\,[\chi\,(x,\ v)] - G_2\,(x);$$

membrul I nu depinde de x, membrul II nu depinde de y, deci cei doi membri sînt funcţii numai de v; notîndu-le cu $G_3(v)$, avem

$$h(y, v) = G_1^{-1}[F_3(y) + G_3(v)],\quad \chi(x, v) = G_4^{-1}[G_2(x) + G_3(v)]$$

sau

$$h(x, y) = G_1^{-1}[F_3(x) + G_3(y)],$$

$$\chi(x, y) = G_4^{-1}[G_2(x) + G_3(y)].$$

Am obţinut astfel toate funcţiile (27).

Funcţiile (27) formează un sistem de soluţii ale ecuaţiei (26), pentru că înlocuindu-le în (26) obţinem:

$$H^{-1}[F_2(u) + G_2(x) + F_3(y) + G_3(v)] = H^{-1}[F_2(u) + F_3(y) + G_2(x) + G_3(v)].$$

Observaţii. 1) Ecuaţia (25) din capitolul I este un caz particular al ecuaţiei (26). Soluţia ei se găseşte dacă punem $f = \varphi$, $g = \psi$, $h = \chi$.

2) Prin particularizări analoage cu cele făcute în punctul anterior, putem găsi cu uşurinţă soluţiile anumitor ecuaţii funcţionale, între altele ale ecuaţiei bisimetriei şi ale ecuaţiei (5) din capitolul II, 2, precum şi modificărilor lor.

4. Aplicaţie geometrică. Am văzut că dacă o familie de curbe se bucură de proprietatea lui Thomsen (cap. II, 1), atunci ecuaţia familiei de curbe este

$$F(x) + H(y) = \text{const.} \tag{29}$$

Arătăm acum ca o aplicaţie a ecuaţiei (26):

T e o r e m a VI, 4. Fie $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, *trei familii de curbe în planul xy cu următoarea proprietate: dacă punctele M, S de pe figura 23 sînt pe aceeaşi curbă din $\mathfrak{F}_2$ şi punctele N, R pe aceeaşi curbă din $\mathfrak{F}_3$, atunci punctele P,Q se află pe aceeaşi curbă a familiei F_1. In aceste ipoteze cele trei familii de curbe coincid şi ecuaţia lor este de forma* (29).

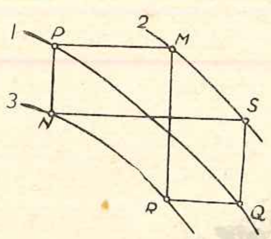

Fig. 23.

Ecuaţiile familiilor de curbe sînt

$\mathfrak{F}_1$) $f(x,y) = \text{const.}$

$\mathfrak{F}_2$) $g(x,y) = \text{const.}$

$\mathfrak{F}_3$) $h(x,y) = \text{const.}$

Din capitolul I, 1 rezultă că putem presupune că f,g,h sînt funcţii continue şi strict monotone. Avem

$$g(x_1, y_2) = g(x_2, y_1),\quad h(x_1, y_3) = h(x_3, y_1) \Longrightarrow f(x_2, y_3) = f(x_3, y_2). \tag{30}$$

Notăm

$$s = g(x_1, y_2) = g(x_2, y_1),\quad t = h(x_1, y_3) = h(x_3, y_1);$$

folosind notaţiile din capitolul IV, 1 pentru funcţii inverse, avem

$$x_2 = \bar g(y_1, s) \qquad y_2 = \tilde g(s, x_1)$$

$$x_3 = \bar h(y_1, t) \qquad y_3 = \tilde h(t, x_1).$$

Condiţia (30) devine ecuaţia funcţională

$$f[\bar g(y_1, s), \tilde h(t, x_1)] = f[\bar h(y_1, t), \tilde g(s, x_1)], \tag{31}$$

care este un caz particular al ecuaţiei (26). Aplicînd teorema VI, 3 şi ţinînd seama că $\chi = \bar g$ şi $h = \bar\psi$ în formulele (27), găsim după un calcul simplu, analog, celor făcute la particularizările din punctul precedent, că

$$f(x, y) = H_1^{-1}[F(x) + G(y)]$$

$$g(x, y) = H_2^{-1}[F(x) + G(y)]$$

$$h(x, y) = H_3^{-1}[F(x) + G(y)].$$

5. Ecuaţia generalizată a tranzitivităţii. Ecuaţia

$$f[f(x, t), f(y, t)] = f(x, y) \tag{32}$$

poartă numele de ecuaţie funcţională a tranzitivităţii. Ea a fost rezolvată pentru prima oară de A. R. S c h w e i t z e r prin transformarea ei într-o ecuaţie diferenţială [34], [35]. În ipoteza de continuitate şi monotonie strictă ecuaţia (32) a fost rezolvată de M. H o s s z ú [19]. În aceeaşi notă se dă şi soluţia următoarei generalizări a ecuaţiei (32)

$$f[\varphi(x,t), \psi(y,t)] = g(x,y), \tag{33}$$

însă numai pentru funcţii strict monotone, care admit derivate parţiale de ordinul întîi. Dăm mai jos soluţiile continue şi strict monotone ale ecuaţiei (33), iarăşi prin reducere la ecuaţia asociativităţii generalizate.

T e o r e m a VI, 5. *Soluţiile continue şi strict monotone cele mai generale ale ecuaţiei* (33) *sînt funcţiile*

$$\left\{\begin{aligned} f(x, y) &= H^{-1}[F_1(x) - G_1(y)] \\ g(x, y) &= H^{-1}[F_2(x) - G_2(y)] \\ \varphi(x, y) &= F_1^{-1}[F_2(x) - G_3(y)] \\ \psi(x, y) &= G_1^{-1}[G_2(x) - G_3(y)], \end{aligned}\right. \tag{34}$$

în care F_1, F_2, G_1, G_2, G_3, H sînt funcţii continue şi strict monotone oarecare.

Notînd $\varphi(x, t) = u$, $\psi(y, t) = v$, ecuaţia (33) devine

$$f(u, v) = g[\bar\varphi(t, u), \bar\psi(t, v)]$$

sau

$$\bar\varphi(t, u) = \bar g[\bar\psi(t, v), f(u, v)].$$

Dacă punem $f(u, v) = s$, ecuaţia funcţională se transformă în

$$\bar g[\bar\psi(t, v), s] = \bar\varphi[t, \bar f(v, s)]. \tag{35}$$

Ecuaţiile (33) şi (35) sînt echivalente. Ecuaţia (35) este de forma (3), deci în baza teoremei VI, 2 putem scrie

$$\bar{\psi}(x,y) = G_2^{-1}[G_3(x) + G_1(y)],$$
$$\bar{f}(x,y) = F_1^{-1}[G_1(x) + H(y)],$$
$$\bar{g}(x,y) = F_2^{-1}[G_2(x) + H(y)],$$
$$\bar{\varphi}(x,y) = F_2^{-1}[G_3(x) + F_1(y)],$$

din care se găsesc imediat expresiile (34).

Soluţia generală a ecuaţiei (32) se obţine din formulele (34), dacă punem $f = g = \varphi = \psi$

$$f(x,y) = F^{-1}[F(x) - F(y)]. \tag{36}$$

Prin urmare *soluţia generală a ecuaţiei* (32) *este dată de formula* (36).

6. Pseudosume cu trei termeni. La punctul 2, am arătat că, dacă funcţia $f(x,y,z)$ admite două descompuneri de forma (8)

$$f(x,y,z) = g[\varphi(x,y), z] = h[x, \psi(y,z)], \tag{8}$$

atunci φ, ψ, g şi h se exprimă prin formulele (7), deci

$$f(x,y,z) = H_3^{-1}[F_1(x) + G_1(y) + G_2(z)]$$

sau

$$f(x,y,z) = K^{-1}[F(x) + G(y) + H(z)]. \tag{37}$$

Invers, fiind dată funcţia (37), dacă notăm $\varphi(x,y) = F(x) + G(y)$, $g(x,y) = K^{-1}[x + H(y)]$, $\psi(x,y) = G(x) + H(y)$, $h(x,y) = K^{-1}[F(x) + y]$, atunci se vede că $f(x,y,z)$ admite descompunerile (8). Funcţia (37) o vom numi *pseudosumă cu trei termeni*, dacă F,G,H,K sînt funcţii continue şi strict monotone. Din cele spuse rezultă:

T e o r e m a V I, 6. *Condiţia necesară şi suficientă, pentru ca funcţia continuă şi strict monotonă* $f(x,y,z)$ *să fie o pseudosumă cu trei termeni, este existenţa descompunerilor* (8).

Consecinţă. Din cele două descompuneri (8) rezultă o a treia descompunere:

$$f(x,y,z) = l[k(x,z), y].$$

Descompunerile (8) sînt echivalente cu următoarele două implicaţii

$$\begin{cases} f(x_2,y_1,z_1) = f(x_1,y_2,z_1) \Rightarrow f(x_2,y_1,z_2) = f(x_1,y_2,z_2) \\ f(x_1,y_1,z_2) = f(x_1,y_2,z_1) \Rightarrow f(x_2,y_1,z_2) = f(x_2,y_2,z_1). \end{cases} \tag{38}$$

Implicaţiile (38) atrag după sine

$$\begin{aligned} f(x_2,y_1,z_1) = f(x_1,y_2,z_1) = f(x_1,y_1,z_2) \Rightarrow \\ f(x_1,y_2,z_2) = f(x_2,y_1,z_2) = f(x_2,y_2,z_1). \end{aligned} \tag{39}$$

După aparenţă din (39) nu rezultă (38), căci ipotezele în (39) sînt mai restrictive; de fapt, în (39) din cele şase valori x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2 numai patru pot fi alese în mod

arbitrar, celelalte două rezultă, în timp ce în fiecare din ipotezele implicaţiilor (38) cinci din aceste valori sînt arbitrare. Demonstrăm mai jos că totuşi (39) $\Rightarrow$ (38), adică, că are loc:

T e o r e m a V I, 7. *Implicaţia* (39) *este necesară şi suficientă pentru ca funcţia continuă şi strict monotonă* $f(x,y,z)$ *să fie pseudosumă cu trei termeni.*

Implicaţia (39) este identică cu (9) de la punctul 2, unde cu ocazia rezolvării ecuaţiei asociativităţii generalizate, am văzut că din (39) rezultă că $f(x,y,z)$ este o pseudosumă de x şi y. Ţinînd seama de rolul simetric al variabilelor x,y,z în (39), urmează că şi funcţiile $f(x,y_0,z)$, $f(x_0,y,z)$ sînt pseudosume cu doi termeni.

Prin urmare, dacă y_1 şi z_1 sînt fixaţi, putem nota

$$\begin{aligned} f(x,y,z_1) &= K^{-1}[F(x) + G(y)] \\ f(x,y_1,z) &= \Psi^{-1}[\Phi(x) + H(z)]. \end{aligned} \tag{40}$$

Înlocuind expresiile (40) în (39) obţinem

$$\begin{aligned} F(x_2) + G(y_1) = F(x_1) + G(y_2), \quad \Phi(x_2) + H(z_1) = \Phi(x_1) + H(z_2) = \\ \Rightarrow \Psi^{-1}[\Phi(x_2) + H(z_2)] = K^{-1}[F(x_2) + G(y_2)]. \end{aligned} \tag{41}$$

Privim pe x_1 şi x_2 ca variabile independente, din ipotezele implicaţiei (41) exprimăm pe $G(y_2)$ şi $H(z_2)$ în funcţie de x_1 şi x_2 (y_1 şi z_1 sînt fixate de la început) şi înlocuindu-le în concluzia implicaţiei (41), obţinem ecuaţia funcţională

$$\Psi^{-1}[2\Phi(x_2) - \Phi(x_1) + H(z_1)] = K^{-1}[2F(x_2) - F(x_1) + G(y_1)].$$

Notînd

$$\Phi(x_2) = x, \quad \Phi(x_1) = y$$

şi

$$K\Psi^{-1}[x + H(z_1)] - G(y_1) = \varphi(x), \quad F\Phi^{-1}(x) = \psi(x), \tag{42}$$

obţinem

$$\varphi(2x - y) = 2\psi(x) - \psi(y),$$

care prin schimbarea de funcţie

$$2\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \chi(x) \tag{43}$$

revine la ecuaţia funcţională

$$\chi(x + y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

întîlnită în capitolul II, 4 (ecuaţia (14)). Soluţia ei este

$$\varphi(x) = ax + b, \quad \psi(x) = ax + c, \quad \chi(x + y) = ax + b + c;$$

avînd în vedere (43) $2c = b + c$, deci $c = b$. Ţinînd seamă de (42) avem

$$\begin{aligned} F(\xi) &= a\Phi(\xi) + b \\ K(\xi) &= a\Psi(\xi) + b', \end{aligned} \tag{44}$$

unde s-a notat $b' = b + G(y_1) - aH(z_1)$.

A doua formulă (40) se poate scrie astfel:

$$a\Psi[f(x, y_1, z)] + b' = a\Phi(x) + b + aH(z) + b' - b$$

sau avînd în vedere (44)

$$K[f(x, y_1, z)] = (x) + aH(z) + b' - b;$$

scriind $H_1(z)$ în loc de $aH(z) + b' - b$, avem

$$f(x, y_1, z) = K^{-1}[F(x) + H_1(z)].$$

Facem acum pe y_1 să varieze, menținînd o valoare fixă pentru z_1. Atunci în ultima formulă numai funcția H_1 se schimbă odată cu y_1, deci

$$f(x, y, z) = K^{-1}[F(x) + \psi(y, z)] = h[x, \psi(y, z)].$$

În mod analog, $f(x,y,z)$ admite încă două descompuneri similare cu x,y respectiv cu x,z grupați. Teorema VI, 7 rezultă acum din teorema VI, 6.

Observații. 1) Din faptul că $f(x,y,z)$ este pseudosumă cu doi termeni pentru orice valoare fixată a fiecărei variabile, nu rezultă încă că $f(x,y,z)$ este o pseudosumă cu trei termeni, după cum arată exemplul.

$$f(x, y, z) = F(x)\,G(y) + H(z)$$

2) De asemenea din faptul că $f(x,y,z)$ este pseudosumă în raport cu x,z pentru y fixat în mod arbitrar și în raport cu y,z pentru x fixat arbitrar, nu rezultă că $f(x,y,z)$ este o pseudosumă în raport cu x și y pentru z fixat, ceea ce se vede din exemplul

$$f(x, y, z) = [F(x) + G(y)]\,M(x)\,H(z).$$

7. Interpretarea geometrică a teoremei VI, 7. Noțiunile de familie de curbă, rețea și țesut, definite în capitolul I, 1, pot fi extinse pentru spațiu. Un sistem de suprafețe formează *o familie de suprafețe într-un domeniu spațial* E, dacă domeniul E și suprafețele considerate sînt omeomorfe cu un domeniu E și un sistem de plane paralele în E. Trei familii de suprafețe formează o *rețea de suprafețe în* E, dacă domeniul E și cele trei familii sînt omeomorfe cu un domeniu E și trei familii de plane paralele în E, ortogonale două cîte două. Un sistem de patru familii de suprafețe formează un *țesut spațial*, dacă fiecare grup de trei din aceste familii de suprafețe este o rețea de suprafețe.

Să presupunem punctele $A(x_2, y_1, z_1)$, $B(x_1, y_2, z_1)$, $C(x_1, y_1, z_2)$, $A'(x_1, y_2, z_2)$, $B'(x_2, y_1, z_2)$, $C'(x_2, y_2, z_1)$ (fig. 24). Implicațiile (39) exprimă faptul că dacă punctele A, B, C sînt pe aceeași suprafață de nivel a funcției $f(x,y,z)$ atunci punctele A', B', C' sînt la fel pe o aceeași suprafață de nivel, adică dacă încercăm să construim octaedre avînd cîte două fețe paralele cu planele de coordonate și două fețe curbe, formate din suprafețe de nivel, atunci aceste octaedre totdeauna pot fi construite (se închid). Planele paralele cu planele de coordonate și suprafețele de nivel ale funcției $f(x,y,z)$ formează un țesut spațial, iar octaedrele de mai sus *octaedre de țesut*. Condiția (39) se exprimă astfel: *octaedrele de țesut se închid.*

Să considerăm acum pseudosuma cu trei termeni

$$f(x,y,z) = K^{-1}[F(x) + G(y) + H(z)] \qquad (37)$$

și țesutul spațial $\mathcal{T}$, format din familiile planelor paralele cu planele de coordonate și a suprafețelor de nivel ale funcției (37). Prin transformarea topologică

$$x' = F(x),\ y' = G(y),\ z' = H(z)$$

primele trei familii rămîn plane paralele cu planele de coordonate, iar a patra devine

$$K^{-1}(x' + y' + z) = \text{const.}$$

sau

$$x' + y' + z' = \text{const},$$

deci tot o familie de plane paralele. Țesutul format din patru familii de plane paralele se numește *țesut regulat*. Prin urmare *țesutul* $\mathcal{T}$ *este omeomorf cu un țesut regulat.*

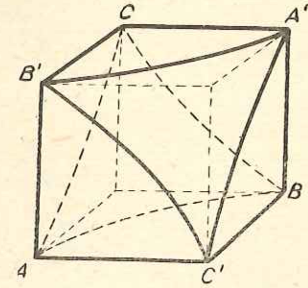

Fig. 24

Urmează următoarea interpretare pentru teorema VI, 7: *Condiția necesară și suficientă pentru ca un țesut, format din trei familii de plane paralele cu planele de coordonate și o familie de suprafețe, să fie omeomorf cu un țesut regulat este ca octaedrele de țesut să se închidă.*

Ținînd seama că un țesut oarecare este omeomorf cu un țesut de tipul considerat în această interpretare, putem enunța în general:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un țesut spațial să fie omeomorf cu un țesut regulat este ca octaedrele de țesut să se închidă.

Am găsit în acest fel un rezultat cunoscut în geometria țesuturilor [11].

CAPITOLUL VII

SEPARĂRI DE VARIABILE PENTRU CONSTRUIREA NOMOGRAMELOR COMPUSE

1. Separări de variabile. Am arătat în capitolul I, 2 că pentru orice ecuație cu trei necunoscute $z = f(x,y)$ se poate construi o nomogramă cu linii cotate, dacă funcția f este continuă și strict monotonă. Fie acum

$$w = f(x, y, z) \qquad (1)$$

o ecuație cu patru necunoscute, în care f este iarăși continuu și strict monoton. Dacă funcția f admite descompunerea (sau separarea de variabile)

$$f(x, y, z) = F[\varphi(x, y), z], \qquad (2)$$

atunci ecuația (1) poate fi reprezentată cu o nomogramă compusă în felul următor: Notînd

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad (3)$$

ecuația (1) devine

$$w = F(\xi, z). \qquad (4)$$

Construim nomogramele cu linii cotate pentru ecuațiile (3) și (4) în așa fel ca familia de linii ξ să fie comună (fig. 25). Utilizarea nomogramei este arătată pe figură. Se observă că familia de curbe intermediare ξ nu trebuie cotată.

Condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa descompunerii (2) au fost date în capitolul VI, 1 în diferite ipoteze asupra funcţiilor φ şi F.

În cazul ecuaţiilor cu mai multe necunoscute problema se pune în mod analog. Pentru a reprezenta nomografic ecuaţia

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{5}$$

se caută o separare de variabile de forma

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) = F[&\varphi_1(x_1, \dots, x_{p_1}), \varphi_2(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}), \dots \\ &\dots, \varphi_r(x_{p_{r-1}+1}, \dots, x_{p_r}), x_{p_r+1}, \dots, x_n] \end{aligned} \tag{6}$$

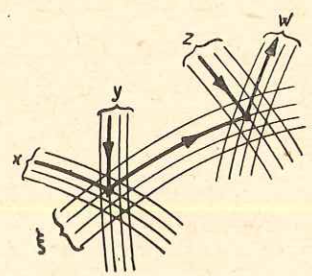

Fig. 25

şi dacă fiecare din ecuaţiile

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_{p_1}) \\ \xi_2 &= \varphi_2(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_2}) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \xi_r &= \varphi_r(x_{p_{r-1}+1}, \dots, x_{p_r}) \\ y &= F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, x_{p_r+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{7}$$

este nomografabilă, atunci ecuaţia (5) este reprezentabilă cu o nomogramă compusă. Problema are interes şi în cazul cînd ecuaţiile (7) conţin mai mult de trei variabile, căci, pe de o parte, ele pot fi eventual descompuse la rîndul lor sub forma (6), pe de altă parte, anumite ecuaţii pînă la 12 variabile pot fi reprezentate prin nomograme cu transparent.

Dacă descompuneri de forma (6) nu sînt posibile, se pot căuta descompuneri în care o variabilă intră în mai multe funcţii φ_i. Nomogramele compuse corespunzătoare vor fi cu variabile repetate, care din punct de vedere practic de sigur sînt mai dezavantajoase. În cadrul acestei lucrări nu ne ocupăm cu descompuneri de acest tip.

Am stabilit în colaborare cu L. B a l condiţiile necesare şi suficiente ale existenţei descompunerii (6), pentru cazul funcţiilor F şi φ_i $(i = 1, \dots, r)$ derivabile [8], [9], sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{f'_{x_i}}{f'_{x_{i+1}}}\right) = 0 \qquad \begin{aligned} &(k = 1, 2, \dots, r) \\ &(i = p_{k-1} + 1, \dots, p_k - 1),\ (p_0 = 0) \\ &(j = 1, \dots, p_{k-1}, p_k + 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{8}$$

Demonstraţia se bazează pe:

L e m a 1. *Dacă funcţia* $f(x_1, \dots, x_n)$ *admite descompunerile*

$$f(x_1, \dots, x_n) = F_k[x_1, \dots, x_{p_{k-1}}, \varphi_k(x_{p_{k-1}+1}, \dots, x_{p_k}), x_{p_k+1}, \dots, x_n], \tag{9}$$

$(k = 1, 2, \dots, r)$, $(p_0 = 0)$, *unde funcţiile* F_k, φ_k *sînt presupuse oarecare, atunci este valabilă şi descompunerea* (6).

Pentru a stabili în ce condiţii admite funcţia (5) descompunerea (6), dacă F şi φ_i nu sînt restrînse la funcţii derivabile, ci numai la funcţii continue şi strict monotone, arătăm întîi următoarea lemă, care generalizează teorema VI, 1:

L e m a 2. *Pentru ca funcţia continuă şi strict monotonă* $f(x_1, \dots, x_n)$ *să fie de forma*

$$f(x_1, \dots, x_n) = F[\varphi(x_1, \dots, x_p), x_{p+1}, \dots, x_n] \tag{10}$$

într-un domeniu n-dimensional E (unde F şi φ *sînt continue şi strict monotone) este necesar şi suficient ca orice punct din E să posede o vecinătate în care implicaţia*

$$\left\{\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n) \Longrightarrow \\ &f(x_1, x_2, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n) \end{aligned}\right. \tag{11}$$

să aibă loc.

Din

$$F[\varphi(x_1, \dots, x_p), x_{p+1}, \dots, x_n] = F[\varphi(y_1, \dots, y_p), x_{p+1}, \dots, x_n]$$

rezultă în baza monotoniei stricte

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = \varphi(y_1, \dots, y_p)$$

din care urmează imediat

$$F[\varphi(x_1, \dots, x_p), y_{p+1}, \dots, y_n] = F[\varphi(y_1, \dots, y_p), y_{p+1}, \dots, y_n];$$

aşadar din (10) rezultă (11).

Să presupunem acum că f satisface (11) şi nu e identic nul în vecinătatea V' a punctului $(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Acest punct are o vecinătate V, cuprinsă în V', astfel ca ecuaţia

$$f(x_1, \dots, x_p, c_{p+1}, \dots, c_n) = f(x', c_2, \dots, c_p, c_{p+1}, \dots, c_n) \tag{12}$$

să admită o soluţie (unică) x', pe care o scriem

$$x' = \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Notăm

$$F(\xi, x_{p+1}, \dots, x_n) = f(\xi, c_2, \dots, c_p, x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Atunci din (12) şi (11) avem

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x', c_2, \dots, c_p, x_{p+1}, \dots, x_n) = F[\varphi(x_1, \dots, x_p), x_{p+1}, \dots, x_n].$$

Prin urmare fiecare punct din E are o vecinătate în care f este de forma (10). Rezultă la fel ca şi în demonstraţia teoremei VI, 1 că f este de forma (10) în însuşi domeniul E.

Din lema 1 şi 2 rezultă imediat:

T e o r e m a VII, 1. *Funcţia* $f(x_1, \dots, x_n)$, *continuă şi strict monotonă în domeniul E, atunci şi numai atunci este de forma* (6) *cu F şi* φ_i *continue şi strict monotone, dacă relaţiile*

$$f(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_n^{(i_n)}) = f(x_1^{(j_1)}, x_2^{(j_2)}, \dots, x_n^{(j_n)}) \tag{13}$$

$(i_k = 0, 1,\ j_k = 0, 1)$ *presupuse pentru*

$$i_s = 0,\ j_s = 1,\ i_\sigma = j_\sigma = 0 \qquad \begin{aligned} &(s = p_{k-1} + 1, \dots, p_k) \\ &(\sigma = 1, \dots, p_{k-1}, p_k + 1, \dots, n) \\ &(k = 1, 2, \dots, r),\ (p_0 = 0) \end{aligned}$$

implică aceleași relații (13) *pentru*

$$i_s = 0, \qquad j_s = 1, \qquad i_\sigma = j_\sigma = 1$$

s și σ fiind aceleași ca mai sus.

2. Generalizarea pseudosumelor. În descompunerile (9) cele r funcții φ_k nu conțin nici o variabilă comună. Dacă presupunem că funcția $f(x_1,\ldots,x_n)$ admite descompuneri în care o variabilă poate figura grupată la mai multe descompuneri, atunci vom vedea că rezultă o formă mai particulară pentru funcția f.

Să considerăm întîi exemplul

$$f(x, y, z, u) = g\,[\varphi\,(x, y, z), u] = h\,[x, \psi\,(y, z, u)], \tag{14}$$

unde funcțiile φ, ψ, g, h sînt presupuse continue și strict monotone.

Din teorema VI, 6 urmează ca funcțiile $f(x, y, z_0, u)$ și $f(x, y_0, z, u)$ sînt pseudosume cu trei termeni

$$\begin{cases} f(x, y, z_0, u) = K^{-1}\,[F\,(x) + G\,(y) + H\,(u)] \\ f(x, y_0, z, u) = K_1^{-1}\,[F_1\,(x) + G_1\,(z) + H_1\,(u)]. \end{cases} \tag{15}$$

Punînd în prima egalitate (15) $y = y_0$ și în a doua $z = z_0$, obținem două reprezentări ale aceleiași pseudosume cu doi termeni. Din teorema II, 6 urmează

$$F_1\,(x) = aF\,(x) + b,$$

$$H_1\,(x) = aH\,(x) + aG\,(y_0) - G_1\,(z_0) + c,$$

$$K_1\,(x) = aK\,(x) + b + c,$$

deci a doua relație (15) se scrie

$$f\,(x, y_0, z, u) = K^{-1}\left[F(x) + G_1\,(z) + G\,(y_0) - \frac{1}{a}\,G_1\,(z_0) + H\,(u)\right].$$

Facem să varieze y_0, lăsînd pe z_0 fix; atunci F,H,G și K nu se schimbă, iar

$$G_1\,(z) + G\,(y_0) - \frac{1}{a}\,G_1\,(z_0) = G\,(y_0, z),$$

deci

$$f(x, y, z, u) = K^{-1}\,[F(x) + G\,(y, z) + H\,(u)]. \tag{16}$$

Prin urmare (14) *atrage după sine* (16) *și evident din* (16) *rezultă* (14). Acest rezultat poate fi generalizat:

T e o r e m a VII, 2. *Descompunerile*

$$f\,(x_1, \ldots, x_n) = g\,[\varphi\,(x_1, \ldots, x_q), x_{q+1}, \ldots, x_n] = h\,[x_1, \ldots, x_p, \psi\,(x_{p+1}, \ldots, x_n)] \tag{17}$$

($p < q$), *unde* φ, ψ, g, h *sînt funcții continue și strict monotone, sînt necesare și suficiente pentru ca funcția* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *să fie de forma*

$$f\,(x_1, \ldots, x_n) = K^{-1}\,[F(x_1, \ldots, x_p) + G\,(x_{p+1}, \ldots, x_q) + H\,(x_{q+1}, \ldots, x_n)], \tag{18}$$

F,G,H,K fiind continue și strict monotone.

Formula (18) poate fi scrisă evident sub forma (17), deci trebuie arătat că (17) $\Rightarrow$ (18). Am văzut că această implicație este adevărată pentru $n = 4$; să o presupunem pentru $n - 1 \geqslant 4$ și să o demonstrăm pentru n. Deoarece $n \geqslant 5$, într-unul din grupurile de variabile $x_1, \ldots, x_p$; $x_{p+1}, \ldots, x_q$; $x_{q+1}, \ldots, x_n$ există cu siguranță doi termeni; să presupunem pentru a fixa ideile că în al treilea grup sînt cel puțin doi termeni. Din ipoteza de inducție rezultă:

$$\left.\begin{aligned} f\,(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n^o) &= K^{-1}\,[F\,(x_1, \ldots, x_p) + G\,(x_{p+1}, \ldots, x_q) + \\ &\quad + H'\,(x_{q+1}, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})] \\ f(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}^o, x_n) &= K_1^{-1}[F_1\,(x_1, \ldots, x_p) + G_1\,(x_{p+1}, \ldots, x_q) + \\ &\quad + H_1\,(x_{q+1}, \ldots, x_{n-2}, x_n)]. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Avem

$$\begin{aligned} K^{-1}\,[F\,(x_1, \ldots, x_p) + G(x_{p+1}, \ldots, x_q) + H'\,(x_{q+1}, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}^o)] &= \\ = K_1^{-1}\,[F_1\,(x_1, \ldots, x_p) + G_1\,(x_{p+1}, \ldots, x_q) + H_1\,(x_{q+1}, \ldots, x_{n-2}, x_n^o)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Fixînd toate variabilele, în afară de x_1 și x_{p+1}, se obțin două reprezentări ale aceleiași pseudosume cu doi termeni, deci $K_1 = aK + a'$. Înlocuind această expresie a lui K_1 în a doua ecuație (19) și scriind în loc de $\frac{1}{a}\,F_1$, $\frac{1}{a}\,G_1$, $\frac{1}{a}\,H_1 - a'$ tot F_1, G_1, H_1, se obține aceeași formă pentru a doua ecuație (19) cu deosebirea că în loc de K_1 apare K. În (20) argumentele funcției K^{-1} din cei doi membri trebuie să fie egali, deci

$$F_1\,(x_1, \ldots, x_p) = F\,(x_1, \ldots, x_p),\; G_1\,(x_{p+1}, \ldots, x_q) = G\,(x_{p+1}, \ldots, x_q).$$

A doua ecuație (19) se scrie

$$f(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}^o, x_n) = K^{-1}\,[F(x_1, \ldots, x_p) + G\,(x_{p+1}, \ldots, x_q) + H_1(x_{q+1}, \ldots, x_{n-2}, x_n)].$$

Facem pe x_{n-1}^o să varieze, păstrînd pe x_n^o constant; atunci funcțiile F,G,K^{-1} nu se schimbă și obținem

$$\begin{aligned} f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K^{-1}\,[F\,(x_1, \ldots, x_p) + G\,(x_{p+1}, \ldots, x_q) + \\ + H\,(x_{q+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n)]. \end{aligned}$$

Am demonstrat teorema VII, 2.

Să presupunem acum că $f\,(x, y, z, u)$ admite următoarele trei descompuneri:

$$f\,(x, y, z, u) = g\,[\varphi\,(x, y, z), u] = h\,[\psi\,(x, y, u), z] = l\,[k\,(x, z, u), y]. \tag{21}$$

Din cele arătate mai înainte rezultă:

$$\begin{aligned} f\,(x, y, z, u) &= L^{-1}\,[F(x, y) + H\,(z) + K\,(u)] = \\ &= L_1^{-1}\,[F_1\,(x, y) + G_1\,(y) + K_1\,(u)]. \end{aligned}$$

Dacă dăm valori constante pentru y și z, se vede ca mai sus că putem presupune $L_1 = L$; punînd apoi $z = \text{const}$, găsim că $F\,(x, y) = F_1\,(x, z_0) + G_1\,(y) = F\,(x) + G\,(y)$, deci

$$f\,(x, y, z, u) = L^{-1}\,[F\,(x) + G\,(y) + H\,(z) + K\,(u)]. \tag{22}$$

Așadar cele trei descompuneri (21) *sînt necesare și suficiente pentru ca f(x,y,z,u) să fie o pseudosumă cu patru termeni.*

Prin inducție completă rezultă imediat:

T e o r e m a VII, 3. *Descompunerile*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g_i\,[\varphi_i\,(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), x_i] \tag{23}$$

$(i = 2, 3, \dots, n)$, unde φ_i și g_i sînt funcții continue și strict monotone, sînt necesare și suficiente pentru ca funcția f să fie o pseudosumă cu n termeni

$$f(x_1, \dots, x_n) = F^{-1}\,[F_1(x_1) + F_2(x_2) + \dots + F_n(x_n)], \tag{24}$$

F_i și F fiind funcții continue și strict monotone de o variabilă.

Teorema VII, 3 este generalizarea teoremei VI, 6. Teorema VI, 7 poate fi generalizată de asemenea:

T e o r e m a VII, 4. *Condiția necesară și suficientă pentru ca funcția continuă și strict monotonă $f(x_1, \dots, x_n)$ să fie o pseudosumă cu $n \geqslant 3$ termeni este ca relațiile*

$$f\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_n^{(i_n)}\right) = f\left(x_1^{(j_1)}, x_2^{(j_2)}, \dots, x_n^{(j_n)}\right) \tag{25}$$

presupuse pentru toți indicii $i_k = 0,1$, $j_k = 0,1$, care verifică $\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} j_k = 1$, să antreneze aceleași relații pentru $\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} j_k = 2$.

Pentru $n = 3$ această teoremă este adevărată, deoarece coincide cu teorema VI, 7. Demonstrăm suficiența condiției enunțate prin inducție completă, presupunem că ea este suficientă în cazul $n-1$ și arătăm că este suficientă pentru n. Admitem că relațiile (25) cu $\sum_{n=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} j_k = 1$ antrenează aceste relații cu $\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} j_k = 2$ și demonstrăm că f este o pseudosumă.

Să considerăm funcția

$$\varphi\,(x_1, \dots, x_{n-1}) = f\,(x_1, \dots, x_{n-1}\, x_n^{(0)})$$

și să presupunem că

$$\varphi\left(x_1^{(i_1)}, \dots, x_{n-1}^{(i_{n-1})}\right) = \varphi\left(x_1^{(j_1)}, \dots, x_{n-1}^{(j_{n-1})}\right), \tag{26}$$

dacă $i_k = 0,1$, $j_k = 0,1$, $\sum_{k=1}^{n-1} i_k = \sum_{k=1}^{n-1} j_k = 1$. Determinăm pe $x_n^{(1)}$ în așa fel ca

$$\varphi\,(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) = f\,(x_1^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(1)}).$$

Atunci funcția $f(x_1, \dots, x_n)$ verifică (25) pentru $\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} j_k = 1$, deci și pentru $\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} j_k = 2$. Ținînd seamă de definiția funcției $\varphi\,(x_1, \dots, x_{n-1})$ se vede că și condițiile (25) au loc pentru $\sum_{k=1}^{n-1} i_k = \sum_{k=1}^{n-1} j_k = 2$. Așadar (25) presupus pentru

$\sum_{k=1}^{n-1} i_k = \sum_{k=1}^{n-1} j_k = 1$ atrage după sine (25) pentru

$$\sum_{k=1}^{n-1} i_k = \sum_{k=1}^{n-1} j_k = 2,$$

deci în baza ipotezei de inducție

$$\varphi\,(x_1, \dots, x_{n-1}) = F^{-1}\,[F_1(x_1) + \dots + F_{n-1}(x_{n-1})].$$

Deci

$$f\,(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = F^{-1}\,[F_1(x_1) + \dots + F_{n-1}(x_{n-1})]$$

și în mod analog

$$f\,(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^{(0)}, x_n) = \Phi^{-1}[\Phi_1(x_1) + \dots + \Phi_{n-2}(x_{n-2}) + \Phi_n(x_n)].$$

Punînd în aceste două relații din urmă $x_3 = x_3^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$, pseudosuma cu doi termeni $f\,(x_1, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ este scrisă în două feluri; urmează că Φ poate fi ales egal cu F. Rezultă imediat că

$$F_i = \Phi_i \qquad (i = 1,2, \dots, n-2),$$

deci

$$f\,(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^{(0)}\, x_n) = F^{-1}\,[F_1(x_1) + \dots + F_{n-2}(x_{n-2}) + \Phi_n(x_n)].$$

Făcînd pe $x_{n-1}^{(0)}$ să varieze, în timp ce $x_n^{(0)}$ rămîne constant, avem

$$f(x_1, \dots, x_n) = F^{-1}\,[F_1(x_1) + \dots + F_{n-2}(x_{n-2}) + \Phi\,(x_{n-1}, x_n)].$$

În mod analog se obține

$$f(x_1, \dots, x_n) = G^{-1}\,[G_1(x_1) + \dots + G_{n-4}(x_{n-4}) + \psi\,(x_{n-3}, x_{n-2}) + \\ + G_{n-1}(x_{n-1}) + G_n(x_n)].$$

Prin compararea ultimelor două expresii se găsește că $f(x_1, \dots, x_n)$ este o pseudosumă cu n termeni.

Astfel am arătat suficiența condiției din teorema VII, 4 și deoarece necesitatea ei se verifică nemijlocit, teorema este demonstrată.

Institutul de calcul al Academiei R.P.R., Filiala Cluj

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СВЯЗИ С НОМОГРАФИЕЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В главе I приводятся общие сведения о номограммах. Сетчатая номограмма определяется в работе, как плоская ткань, состоящая из трех семейств кривых, причем для каждой из них выбирается по нормальному

параметру x,y,z (по поводу понятий ткани и нормального параметра см. [11]). Доказывается, что уравнение $z = f(x,y)$ представимо такой номограммой тогда и только тогда, когда $f(x,y)$ является непрерывной и строго монотонной (относительно каждой переменной) функцией.

Так как номограммы из выравненных точек являются фигурами двойственными к сетчатым номограммам уравнения, представимые номограммами из выравненных точек с тремя прямолинейными шкалами, суть:

$$z = H^{-1}\,[F(x) + G(y)], \tag{1}$$

где функции F,G,H непрерывны и строго монотонны в некоторых промежутках. В этих условиях функции (1) называются псевдосуммами. Я. Ацел охарактеризовал класс более частных функций

$$z = f(x,y) = H^{-1}\,[aH(x) + BH(y) + c] \tag{2}$$

при помощи функционального уравнения

$$f[f(u,x),\ f(y,v)] = f[f(u,y),\ f(x,v)], \tag{3}$$

называемого уравнением бисимметрии [3], [7], причем им доказано, что непрерывными строго монотонными решениями функционального уравнения (3), являются функции (2), где $H(x)$ непрерывна и строго монотонна. Я. Ацел сформулировал задачу охарактеризования функций (1) также при помощи функционального уравнения [5]. М. Госсу найден в этом направлении следующий результат: строго монотонными решениями функционального уравнения с тремя неизвестными функциями

$$f[g(u,x),\ h(y,v)] = f[g(u,y),\ h(x,v)], \tag{4}$$

допускающими частные производные первого порядка, являются функции

$$f(x,y) = H^{-1}\,[F(x) + G(y)],\ g(x,y) = F^{-1}\,[L(x) + N(y)],\ h(x,y) = G^{-1}\,[N(x) + M(y)],$$

где F,G,H,L,M,N, дифференцируемые и строго монотонные функции [16], [17].

Этот результат представляет два неудобства: а) он предполагает дифференцируемость и б) при желании установить, является ли некоторая функция псевдосуммой, кроме этой функции нужно рассматривать другие две неизвестные функции, что затрудняет применение результата. В главе II приводятся необходимые и достаточные условия, уже не представляющие этих неудобств. Пусть $f(x,y)$ — непрерывная и строго монотонная функция: уравнение $z = f(x,y)$, разрешенное относительно x соответственно y имеет вид $x = \bar{f}(y,z)$, $y = \tilde{f}(z,x)$. Непрерывными и строго монотонными решениями функционального уравнения

$$f[\bar{f}\,(u,x),\ \tilde{f}\,(y,v)] = f\,[\bar{f}\,(u,y),\ \tilde{f}\,(x,v)] \tag{5}$$

являются именно псевдосуммы. Эта теорема равносильна следующей:

Условие T $f(x_1,y_2) = f(x_2,y_1)$, $f(x_1,y_3) = f(x_3,y_1) \Longrightarrow f(x_2,y_3) = f(x_3,y_2)$ необходимо и достаточно для того, чтобы непрерывная и строго монотонная функция $f(x,y)$ являлась псевдосуммой. Условие T выражает то, что фигура Томсена замыкается. Другие необходимые и достаточные условия получаются из замыкания фигур Брианшона соответственно Рейдемейстера, то есть

Условие B: $f(x_1,y_2) = f(x_2,y_1), f(x_1,y_3) = f(x_2,y_2) = f(x_3,y_1) \Longrightarrow f(x_2,y_2) = f(x_3,y_2)$

или

Условие: R $f(x_1,y_3) = f(x_2,y_1), f(x_1,y_4) = f(x_2,y_2), f(x_3,y_3) = f(x_4,y_1) \Longrightarrow f(x_3,y_4) =$
$= f(x_4,y_2)$.

В качестве приложения доказывается, что функции, определяемые уравнениями третьяго номографического порядка удовлетворяют функциональному уравнению (5).

Если любая точка области D обладает окрестностью, в которой $f(x,y)$ является псевдосуммой, то $f(x,y)$ является псевдосуммой в D. Таким образом, достаточно проверить условие T, B или R локально.

Обобщив функциональное уравнение Коши, Я. Ацел рассмотрел уравнение $\varphi(x + y) = f[\varphi(x),\varphi(y)]$, где f — заданная непрерывная и строго монотонная функция и $\varphi(x)$ — неизвестная функция [7]. Для того чтобы это уравнение допускало непрерывное и строго монотонное решение, необходимо, чтобы $f(x,y)$ удовлетворяло уравнению ассоциативности $f[f(x,y),z] = f[x,f(y,z)]$. Из вышеприведенного результата следует, что функциональное уравнение $\chi(x+y) = f(\varphi(x),\psi(y)]$ с неизвестными функциями φ,ψ,χ тогда и только тогда допускает систему непрерывных строго монотонных решений, когда функция $f(x,y)$ непрерывна, строго монотонна и удовлетворяет уравнению (5). Если $\varphi(x),\psi(x),\chi(x)$ является системой решений, то совокупность всех решений записывается в виде

$$\varphi^*(x) = \varphi(ax+b), \psi^*(x) = \psi(ax+c),\quad \chi^*(x) = \chi(ax+b+c).$$

В главе III решается несколько функциональных уравнений с одной неизвестной функцией двух переменных в области непрерывных и строго монотонных функций. Применяется единый метод: доказывается, что соответствующее функциональное уравнение влечет за собой условие T или B, или R и затем, подставляя (1) в уравнение, определяются функции F,G,H. Таким образом, снова находятся решения функционального уравнения ассоциативности, бисимметрии и различных из видоизменений. Приводится таблица для возможной области значений функции в решении (2) уравнения бисимметрии.

В главе IV рассматривается функция $\psi_{uv}\,(x,y;f) = f[\bar{f}(u,x),\ \tilde{f}(y,v)]$. Было отмечено, что условие T равносильно симметрии функции $\psi_{uv}\,(x,y;f)$. Доказывается, что условие R равносильно ассоциативности функции $\psi_{uv}\,(x,y;f)$ в окрестности произвольной точки $(v,u) \in D$. При этом бисимметрия $\psi_{uv}\,(x,y;f)$ также необходима и достаточна для того, чтобы $f\,(x,y)$ являлась псевдосуммой.

В главе V предполагается, что функция $\zeta = f(\xi,\eta)$ представима номограммой из выравненных точек (рис. 19). На шкалах ξ и η фиксируются точки с отметками v соответственно u и на шкале ζ фиксируются точки с отметками x и y. Пересечем шкалу ξ с прямой ux и шкалу η с прямой vy;

прямая, соединяющая эти две точки пересечения пересекает шкалу ζ в точке с отметкой $z=f[\bar{f}(u,x),\bar{f}(y,v)] = \psi_{uv}(x,y;f)$. Симметрии функции $\psi_{uv}(x,y;f)$ соответствует следующее свойство геометрического места L, образуемого носителями этих трех шкал (рис. 20): предположим, что противолежащие стороны шестиугольника $advbcu$ пересекаются в точках x,y,z; если среди этих девяти точек восемь находятся на L, то и девятая находится на L. Известно, что кривые третьего порядка и только они обладают этим свойством. Получается, что *любая номограмма из выравненных точек, шкалы которой находятся на одной и той же кривой третьего порядка (собственной или же выроженной) представляет псевдосумму, и что не существует других номограмм из выравненных точек для псевдосумм.* Этот результат, известный для дифференцируемых псевдосумм, получен без предположения дифференцируемости.

Ассоциативности функции $\psi_{uv}(x,y;f)$ соответствует следующее свойство для геометрического места L: если $abcd$ и $a'b'c'd'$ — два вписанных в L четырехугольника таких, что пересечения пар прямых $(ab,a'b')$, $(cd,c'd')$ и $(ad,b'c')$ находятся на L, и прямые bc и $a'd'$ также пересекаются на L. Получается, что это свойство характеризует кривые третьего порядка.

В главе VI приводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(x,y,z)$ была вида $F[\varphi(x,y),z]$, важное для построения сложных номограмм, где F и φ непрерывны и строго монотонны. Это условие следующего вида:

$$f(x_1,y_1,z_1)=f(x_2,y_2,z_1) \Longrightarrow f(x_1,y_1,z_2)=f(x_2,y_2,z_2).$$

При его помощи решаются в области непрерывных и строго монотонных функций следующие функциональные уравнения, обобщающие уравнения ассоциативности, бисимметрии и транзитивности:

$$g[f(x,y),z] = \psi[x,\varphi(y,z)]$$

$$h[f(u,x),\ g(y,v)] = \chi[\varphi(u,y),\psi(x,v)]$$

$$h[f(x,t),g(y,t)] = \varphi(x,y).$$

Здесь все функции двух переменных являются неизвестными. Устанавливается, что системы решений состоят из псевдосумм. Эти уравнения решены М. Госсу для дифференцируемых и строго монотонных функций [17], [18], [19].

Из решения обобщенного уравнения ассоциативности вытекает, что следующее логическое следствие необходимо и достаточно для того, чтобы непрерывная и строго монотонная функция $f(x,y,z)$ являлась трехчленной псевдосуммой $K^{-1}[F(x)+G(y)+H(z)]$:

$$f(x_2,y_1,z_2)=f(x_1,y_2,z_1)=f(x_1,y_1,z_2) \Longrightarrow f(x_1,y_2,z_2)=f(x_2,y_1,z_2)=f(x_2,y_2,z_1).$$

Приводятся различные геометрические интерпретации этих результатов.

В главе VII приводятся обобщения результатов главы VI для функций с n-независимыми переменными.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES EN LIAISON AVEC LA NOMOGRAPHIE

RÉSUMÉ

Dans le premier chapitre, on donne des notions générales concernant les nomogrammes à lignes cotées et à points alignés. Le nomogramme à lignes cotées est défini, dans le présent travail, comme un tissu plan, formé par trois familles de courbes, en choisissant pour chacune d'elles un paramètre normal x, y, z (pour les notions de tissu et de paramètre normal, voir [11]). On démontre que *l'équation $z=f(x,y)$ peut être représentée par un pareil nomogramme si, et seulement si, $f(x,y)$ est une fonction continue et strictement monotone* (*par rapport à chacune des variables*).

Les nomogrammes à points alignés étant les figures duales des nomogrammes à droites cotées, les équations représentables par des nomogrammes à points alignés, à troits échelles rectilignes, sont:

$$z = H^{-1}[F(x)+G(y)], \tag{1}$$

où les fonctions F, G, H sont continues et strictement monotones dans certains intervalles. Dans ces conditions, les fonctions (1) sont appelées pseudo-sommes. J. Aczél a caractérisé la classe des fonctions plus particulières

$$z=f(x,y)=H^{-1}[aH(x)+bH(y)+c] \tag{2}$$

par l'équation fonctionnelle

$$f[f(u,x),f(y,v)]=f[f(u,y),f(x,v)], \tag{3}$$

appelée équation de la bissymétrie [3], [7], et a montré que les solutions continues et strictement monotones de l'équation fonctionnelle (3) sont les fonctions (2), où $H(x)$ est continue et strictement monotone. J. Aczél a formulé le problème consistant à caractériser les fonctions (1) toujours par une équation fonctionnelle [5]. M. Hosszú a trouvé, dans ce sens, le résultat suivant: les solutions strictement monotones admettant des dérivées partielles du 1er ordre de l'équation fonctionnelle à trois fonctions inconnues

$$f[g(u,x),h(y,v)]=f[g(u,y),h(x,v)] \tag{4}$$

sont les fonctions

$$f(x,y)=H^{-1}[F(x)+G(y)],\ g(x,y)=F^{-1}[L(x)+N(y)],$$
$$h(x,y)=G^{-1}[N(x)+M(y)],$$

où F, G, H, L, M, N, sont des fonctions dérivables et strictement monotones [16], [17].

Ce résultat offre deux inconvénients: *a*) il suppose la dérivabilité; *b*) si l'on veut décider si une fonction est une pseudo-somme ou non, on voit intervenir deux autres fonctions inconnues, outre la fonction considérée, ce qui en rend l'application difficile. Dans le Chap. II, on indique des conditions nécessaires et suffisantes dans lesquelles ces inconvénients n'apparaîtront plus. Soit $f(x,y)$ une fonction

continue et strictement monotone; l'équation $z=f(x, y)$ résolue par rapport à x, respectivement à y, s'écrit $x=\bar{f}(y, z)$, $y=\tilde{f}(z, x)$. *Les solutions continues et strictement monotones de l'équation fonctionnelle*

$$f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)]=f[\bar{f}(u, y), \tilde{f}(x, v)] \tag{5}$$

sont justement les pseudo-sommes. Ce théorème est équivalent au suivant: *La condition T*

$$f(x_1, y_2)=f(x_2, y_1), f(x_1, y_3)=f(x_3, y_1) \Longrightarrow f(x_2, y_3)=f(x_3, y_2)$$

est nécessaire et suffisante pour que la fonction continue et strictement monotone $f(x, y)$ soit une pseudo-somme. La condition T signifie que les figures de Thomsen se ferment. La fermeture des figures de Brianchon, respectivement de Reidemeister, fournissent d'autres conditions nécessaires et suffsantes, à savoir, *La condition B*:

$$f(x_1, y_2)=f(x_2, y_1), f(x_1, y_3)=f(x_2, y_2)=f(x_3, y_1) \Longrightarrow f(x_2, y_3)=f(x_3, y_2)$$

ou

La condition R:

$$f(x_1, y_3)=f(x_2, y_1), f(x_1, y_4)=f(x_2, y_2), f(x_3, y_3)= =f(x_4, y_1) \Longrightarrow f(x_3, y_4)=f(x_4, y_2)$$

Comme application, on montre que les fonctions définies par des équations du 3[e] ordre nomographique satisfont à l'équation fonctionnelle (5).

Si un point quelconque du domaine D a un voisinage où $f(x, y)$ est une pseudo-somme, il s'ensuit que $f(x, y)$ est une pseudo-somme en D. Il suffira donc de vérifier localement les conditions T, B ou R.

En généralisant l'équation fonctionnelle de Cauchy, J. Aczél a considéré l'équation $\varphi(x+y)=f[\varphi(x), \varphi(y)]$, où f est une fonction donnée, continue et strictement monotone, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue [7]. Il a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette une solution continue et strictement monotone est que $f(x, y)$ satisfasse à l'équation de l'associativité: $f[f(x, y), z]=f[x, f(y, z)]$. Il s'ensuit que l'équation fonctionnelle $\chi(x+y)=f[\varphi(x), \psi(y)]$, aux fonctions inconnues φ, ψ, χ, admet un système de solutions continues et strictement monotones si, et seulement si, la fonction $f(x, y)$ est continue et strictement monotone et satisfait à l'équation (5). Si $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ est un système de solutions, la totalité des solutions sera

$$\varphi^*(x)=\varphi(ax+b), \psi^*(x)=\psi(ax+c), \chi^*(x)=\chi(ax+b+c)$$

Dans le Chap. III on donne, dans le cadre des fonctions continues et strictement monotones, les solutions de plusieurs équations fonctionnelles à une fonction inconnue de deux variables, au moyen d'une méthode unitaire, en montrant que l'équation fonctionnelle respective entraîne la condition T ou B ou R; en substituant ensuite (1) dans l'équation, on peut déterminer les fonctions F, G, H. On retrouve ainsi les solutions de l'équation fonctionnelle de l'associativité, de la bissymétrie et de leur diverses modifications. On donne, en outre, un tableau

présentant le domaine possible des valeurs de la fonction H, dans la solution (2) de l'équation de la bissymétrie.

Dans le Chap. IV, on considère la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)=f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)]$. On a vu que la condition T est équivalente à la symétrie de la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$. On démontre que la condition R est équivalente à l'associativité de la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$ au voisinage du point quelconque $(v, u) \in$ D. En outre, la bissymétrie $\psi_{uv}(x, y; f)$ est nécessaire et suffisante pour que $f(x, y)$ soit une pseudo-somme.

Dans le Chap. V, on suppose que la fonction $\zeta=f(\xi, \eta)$ peut être représentée par un nomogramme à points alignés (fig. 19). On fixe sur les échelles ξ et η les points de cotes v, respectivement u, et sur l'échelle ζ les points de cotes x et y. On fait couper l'échelle ξ par la droite ux et l'échelle η par la droite vy; la droite réunissant les deux points d'intersection coupe l'échelle ζ au point de cote $z=f[\bar{f}(u, x), \tilde{f}(y, v)]=\psi_{uv}(x, y; f)$. A la symétrie de la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$ correspond la propriété suivante du lieu géométrique L, formé par les supports des trois échelles (fig. 20). Supposons que les côtés opposés de l'hexagone *advbcu* s'entrecoupent aux points x, y, z; si huit de ces neuf points se trouvent sur L, le neuvième point se trouvera lui aussi sur L. Or, on sait que les cubiques, et elles seules, jouissent de cette propriété. Il s'ensuit que *tout nomogramme à points alignés, ayant les échelles sur la même cubique (propre ou dégénérée), représente une pseudo-somme et qu'il n'y a pas d'autres nomogrammes à points alignés pour les pseudo-sommes.* Ce résultat, connu pour les pseudo-sommes dérivables, a été obtenu sans avoir eu recours à l'hypothèse de la dérivabilité.

A l'associativité de la fonction $\psi_{uv}(x, y; f)$ correspond, pour le lieu L, la propriété suivante: Si a b c d et a' b' c' d' sont deux quadrilatères inscrits dans L, de manière que l'intersection des paires de droites $(a, b, a' b')$, $(c\ d, c'\ d')$ et $(a\ d, b'\ c')$ se trouve sur L, l'intersection des droites $b\ c$ et $a'd'$ se trouvera aussi sur L. Il s'ensuit que c'est là une propriété caractéristique des cubiques.

Dans le Chap. VI, on indique une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x, y, z)$ soit de la forme $F[\varphi(x,y), z]$, qui est importante pour la construction des nomogrammes composés, F et φ étant continues et strictement monotones, cette condition est

$$f(x_1, y_1, z_1)=f(x_2, y_2, z_1) \Longrightarrow f(x_1, y_1, z_2)=f(x_2, y_2, z_2).$$

Elle permet de résoudre, dans le cadre des fonctions continues et strictement monotones, les équations fonctionnelles suivantes qui généralisent les équations de l'associativité, de la bissymétrie et de la transitivité:

$$g[f(x, y), z]=\psi[x, \varphi(y, z)]$$
$$h[f(u, x), g(y, v)]=\chi[\varphi(u, y), \psi(x, v)].$$
$$h[f(x, t), g(y, t)]=\varphi(x, y).$$

Ici, toutes les fonctions de deux variables sont inconnues. On constate que les systèmes de solutions sont formés de pseudo-sommes. Ces équations ont été résolues par M. Hosszú pour des fonctions dérivables et strictement monotones [17], [18], [19].

Il résulte de la solution de l'équation généralisée de l'asociativité que l'implication suivante est nécessaire et suffisante pour que la fonction continue et strictement monotone $f(x, y, z)$ soit une pseudo-somme à trois termes $K^{-1}[f(x) + G(y) + H(z)]$:

$$f(x_2, y_1, z_1) = f(x_1, y_2, z_1) = f(x_1, y_1, z_2) \Rightarrow f(x_1, y_2, z_2) = f(x_2, y_1, z_2) = f(x_2, y_2, z_1).$$

L'auteur donne plusieurs interprétations géométriques de ces résultats. Le Chap. VII comprend des généralisations des résultats obtenus au Chap. VI, pour les fonctions à n variables indépendantes.

BIBLIOGRAFIE

1. ABEL N. H., *Untersuchungen der Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen x und y, wie f (x, y), welche die Eigen schaft haben, dass f[z, f (x, y)] eine symmetrische Function von x, y und z ist.* Journ. reine und angew. Math., **1**, 11–15 (1826); Œuvres, **1**, 61–65.
2. ACZÉL J., *The Notion of Mean Values.* D. K. Norske Vidensk. Selsk. Forh., **19**, 84–86 (1946).
3. — *On Mean Values.* Bull. of the Amer. Math. Soc., **54**, 392–400 (1948).
4. — *Sur les opération définies pour nombres réels.* Bull. Soc. Math. France, **76**, 59–64 (1948).
5. — *Többváltozós függvényegyenletek visszavezetése parciális differenciálegyenletek megoldására és alkalmazása a nomográfiában.* Magy. Tud. Akad. Alk. Mat. Int. Közleményei, **1**, 311–333 (1952).
6. — *О теории средних.* Coll. Mathematicum, **4**, 33–55 (1956); *A középértékek elméletéhez.* Acta Univ. Debreceniensis, **1**, 117–135 (1954).
7. — *Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений.* Успехи Мат. Наук, **11**, 3, 3—68 (1956).
8. BAL L., RADÓ F., *Două teoreme referitoare la separarea variabilelor pentru ecuații cu cinci variabile.* Comunicările Acad. R.P.R., **5**, 285–290 (1955).
9. — *Separarea variabilelor în nomografie.* Comunicările Acad. R.P.R., **5**, 303–305 (1955).
10. — *Lecții de nomografie.* Editura tehnică, București, 1956.
11. BLASCHKE W., BOL G., *Geometrie der Gewebe.* Berlin, 1938.
12. BROUWER L. E. J., *Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie.* Math. Ann., **67**, 246–267 (1909).
13. GOURSAT E., *Sur les équations du second ordre à n variables analogues à l'équation de Monge-Ampère.* Bull. de la Soc. Math. de France, **27**, 1–34 (1899) (a se vedea p. 27).
14. GRAF H., SAUER R., *Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Deiecksnetze bilden.* Münchn. Ber. 119–146 (1924).
15. GRONWALL T. H., *Sur les équations entre trois variables représentables par de nomogrammes à points alignés.* Journ. de Math., **6**, serie **8**, 59–102 (1912).
16. HOSSZÚ M., *A biszimmetria függvényegyenletéhez.* Magy. Tud. Akad. Alk. Mat. Int. Közleményei, **1**, 335–342 (1952).
17. — *A Generalization of the Functional Equation of Bisymmetry.* Studia Math., **14**, 100–106 (1953).
18. — *Some Functional Equation Related with the Associative Law.* Publ. Math., **3**, 205–214 (1954).
19. HOSSZÚ M., *On the Functional Equation of Transitivity.* Acta Sc. Math. Szeged, **15**, 203–208, (1954).
20. KNASTER B., *Sur une équivalence pour les fonctions.* Coll. Math., **2**, 1–4 (1949).
21. KOLMOGOROV A. N., *Sur la notion de la moyenne.* Atti Accad. dei Lincei, (6) **12**, 388–391 (1930).

22. А. Н. КОЛМОГОРОВ, *О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложений.* Докл. Акад. Наук, **114**, 953—956 (1957).
23. MEYER ZUR CAPELLEN W., *Leitfaden der Nomographie.* Berlin, 1953.
24. NAGUMO M., *Über eine Klasse der Mittelwerte.* Japan. Journ. of. Math., **7**, 71–79 (1930).
25. Л. Ж. НЕЙШУЛЕР, Труды Мат. Инст. Стеклова, **20**, 87—108 (1947).
26. В. А. НЕВСКИ, *Справочник-книга по номографии.* Москва-Ленинград, 1951.
27. D'OCAGNE M., *Traité de Nomographie.* ed. a II-a. Paris, 1921.
28. PENTKOVSKI M. V., *Nomografia.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
29. PEXIDER H. W., *Notiz über Funktionaltheoreme.* Monatshefte für Math. und Phys., 293–301 (1903).
30. Л. С. ПОНТРЯГИН, *Непрерывные группы.* Москва, 1954.
31. RYLL-NARDZEWSKI C., *Sur les moyennes.* Studia Math., **11**, 31–37 (1949).
32. SAINT-ROBERT P., *De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante.* Mem. della. R. Acad. di Sc. di Torino, seria II, **25**, 53 (1871).
33. SCHWEITZER A. R., *Theorems on Functional Equations.* Bull. Amer. Math. Soc., **18**, 192 (1912); **19**, 66–70 (1913).
34. — *On a Functional Equation.* Bull. Amer. Math. Soc., **18**, 160–161, 299–302 (1912).
35. — *On the Iterative Properties of an Abstract Group.* Bull Amer. Math. Soc., **24**, 371, (1918).
36. С. В. СМИРНОВ, *К проблеме общей анаморфозы.* Докл. Акад. Наук, **69**, 297—300 (1949).
37. С. В. СМИРНОВ, *О номографируемости уравнений.* Ученые Записки Иванов, **4**, 22—60 (1953).