ASUPRA PROBLEMEI MULTILOCALE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

DE

DUMITRU RIPIANU

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R., din 17–18 aprilie 1957

§ **1.** Se spune că o familie de funcţii F, depinzînd de un număr oarecare n de parametri este interpolatoare de ordinul k $(k \leqslant n)$ într-un interval $[\alpha, \beta]$, dacă oricare ar fi nodurile distincte $x_1, x_2, \ldots, x_k$ situate în intervalul $[\alpha, \beta]$ şi oricare ar fi numerele $y_1, y_2, \ldots, y_k$, există o funcţie $f(x) \in F$ şi una singură, care să satisfacă condiţiile

$$f(x_i) = y_i, \qquad (i = 1,2, \ldots, k).$$

În studiul ecuaţiilor diferenţiale se pune în mod firesc chestiunea determinării intervalului de lungime maximă în care integrala generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n este interpolatoare de ordinul n. Cunoscuta teoremă a lui de la Vallée-Poussin stabileşte existenţa unui interval de lungime destul de mică în care integrala generală a ecuaţiei este interpolatoare de ordinul n în anumite ipoteze asupra formei ecuaţiei.

În lucrarea [1] s-a stabilit lungimea intervalului de lungime maximă în care integrala generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi de ordinul 3 sau 4 este interpolatoare de ordinul 3 sau 4.

Problema se poate generaliza, făcînd ca o parte din noduri să fie confundate şi cerînd că dacă în nodul x_i sînt confundate r noduri, funcţia $f(x) \in F$ să satisfacă condiţiile

$$f(x_i) = y_i;\ f'(x_i) = y'_i, \ldots, f^{(r-1)}(x_i) = y_i^{(r-1)},$$

$y_i, y'_i, \ldots, y_i^{(r-1)}$ fiind numere oarecare. În lucrarea [2] s-a cercetat intervalul de lungime maximă în care integrala unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 4 cu coeficienţi constanţi este interpolatoare pe două noduri duble distincte, adică în care, oricum s-ar lua două noduri distincte x_1 și x_2 să existe o integrală $y = f(x)$ a ecuației date, care să verifice condițiile

$$f(x_1) = y_1 \ ; \ f'(x_1) = y_1' \,,\ f(x_2) = y_2,\ f'(x_2) = y_2',$$

y_1, y_2, y_1', y_2' fiind patru numere oarecare, în cazul cînd polinomul caracteristic al ecuației considerate are două rădăcini reale distincte și două imaginar conjugate, care se pot totdeauna presupune egale, respectiv cu $\pm i$. Dacă a și b $(a > b)$ sînt rădăcinile reale ale polinomului caracteristic, se poate totdeauna presupune $a > 0$. S-a arătat în lucrarea amintită că intervalul căutat este egal cu cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației transcendente în s

$$f(s) = 0$$

unde

$$f(s) = (1 + ab)(e^{as} - e^{bs}) \sin s + (a - b)\{(e^{as} + e^{bs}) \cos s - [1 + e^{(a+b)s}]\} =$$
$$= -\frac{a-b}{12}(1 + a^2)(1 + b^2) s^4 + a_5 s^5 + \ldots \qquad (1)$$

și s-au făcut o serie de observații cu privire la distribuția rădăcinilor pozitive ale ecuației în chestiune.

În nota de față se fac cîteva observații noi cu privire la distribuția rădăcinilor amintite.

Se vor aminti din concluziile la care se ajunge în nota [2], pe cele de mai jos

1° dacă $b \leqslant 0$, $f(s)$ are o infinitate de rădăcini

$$s = \tau_n \,(n\pi < \tau_n < (n + 1)\pi) \text{ pentru } b < 0 \text{ și } s = 2 n \pi \text{ și } s = \tau_{2n}$$
$$(2 n \pi < \tau_{2n} < (2 n + 1) \pi) \text{ pentru } b = 0; \quad (n = 1,2, \ldots);$$

2° pentru $b > 0$ dacă $ab \geqslant 1$ avem $f(s) < 0$ pentru orice $s > 0$. Pentru $b > 0$, dar $ab < 1$, avem $f(s) < 0$ pentru $0 < s \leqslant 2\pi$ $\qquad (1_1)$

Intervalul $(0, 2\pi]$, în care $f(s)$ nu are rădăcini, nu se poate prelungi la dreapta, cu alte cuvinte se pot găsi valori ale lui a și b astfel încît $f(s_1) > 0$, s_1 fiind o cantitate mai mare decît 2π, dar după voie de apropiată de 2π.

§ **2**. Se va trece acum la subiectul propriu-zis al notei de față.

Avem din (1)

$$f_2(a) = \frac{f(s)}{a-b} = -1 + (e^{as} + e^{bs}) \cos s - e^{(a+b)s} + \frac{1 + ab}{a - b}(e^{as} - e^{bs}) \sin s, \qquad (2)$$

așa că

$$\left.\begin{aligned} f_3(a) &= \frac{(a-b)^2}{e^{(a+b)s}} f_2'(a) = -(1 + b^2)(e^{-bs} - e^{-as}) \sin s + \\ &\quad + (a - b) s [(1 + ab) e^{-bs} \sin s - (a - b)(1 - e^{-bs} \cos s)], \\ \frac{1}{s} f_3'(a) &= -(1 + b^2) e^{-as} \sin s + (1 - b^2) e^{-bs} \sin s + \\ &\quad + 2 b (1 - e^{-bs} \cos s) - 2a [1 - e^{-bs} (\cos s + b \sin s)], \\ \frac{1}{2s} f_3''(a) &= -1 + \frac{s}{2} \sin s \,(1 + b^2) e^{-as} + e^{-bs} (\cos s + b \sin s), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

deci

$$\left.\begin{aligned} & f_3(a)\big|_{a=b} = f_3'(a)\big|_{a=b} = 0, \\ & S(s) = \frac{1}{2s} f_3''(a)\big|_{a=b} = -1 + e^{-bs}\left(\cos s + b \sin s + \frac{1 + b^2}{2} s \sin s\right), \\ & S'(s) = \frac{1 + b^2}{2} e^{-bs} (s \cos s - (1 + bs) \sin s), \\ & \operatorname{sg} f_2(a)\big|_{a=\infty} = \operatorname{sg} f_3(a)\big|_{a=\infty} = \operatorname{sg} f_3'(a)\big|_{a=\infty} = \operatorname{sg} f_3''(a)\big|_{a=\infty} = -\operatorname{sg} f_4(s), \\ & \text{unde} \\ & f_4(s) = 1 - e^{-bs} (\cos s + b \sin s); \\ & f_4(p\pi) = 1 + (-1)^{p-1} e^{-bp\pi},\ (p = 0, 1,) \ldots; \\ & \frac{f_4'(s)}{1 + b^2} = e^{-bs} \sin s \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

Tabela 1

s	0	π	$2\pi \ldots 2p\pi$	$(2p + 1)\pi$	$\ldots$
$f_4'(s)$	$0\,+$	$0\,-$	$0 \ \ldots \ 0 \,+$	0	$\ldots$
$f_4(s)$	$0 \nearrow$	$f_4(\pi) \searrow$	$f_4(2\pi) \ldots f_4(2p\pi) \nearrow$	$f_4((2p + 1)\pi)$	$\ldots$

Dacă $\dfrac{f_4(s)}{\sin s} > 0$, $f_3''(a)$ are o rădăcină $a = a_1$ dată de relația

$$e^{-a_1 s} = \frac{2}{1 + b^2} \cdot \frac{f_4(s)}{s \sin s}, \qquad (3_1)$$

iar

$$e^{-bs} - e^{-a_1 s} = \frac{2}{1 + b^2} \cdot \frac{S(s)}{s \sin s},$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{dacă } 2 p \pi < s < (2p + 1)\pi, && \operatorname{sg}(a_1 - b) = \operatorname{sg} S(s) \\ &\text{dacă } (2 p + 1)\pi < s < (2 p + 2)\pi, && \operatorname{sg}(a_1 - b) = -\operatorname{sg} S(s) \quad (p = 0,1,\ldots) \end{aligned}\right\} \quad (3_2)$$

iar dacă $s \neq p\pi$, atunci $a_1 = b$ cînd $S(s) = 0$ și invers.

Or, din (3) se vede că $S'(s) = 0$ dacă

$$\left.\begin{aligned} s = f_5(s) = \frac{\sin s}{\cos s - b \sin s};\ f_5'(s) = \frac{1}{(\cos s - b \sin s)^2};\ f_5''(s) &= \\ = 2 \frac{\sin s + b \cos s}{(\cos s - b \sin s)^3}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Se vor deosebi mai multe cazuri.

1° $\qquad b < 0$

Avem din (4), însemnînd $0 < \alpha = \operatorname{arc\,tg}(-b) < \dfrac{\pi}{2}$, tabela 2.

Tabela 2

s	0	α	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi \ldots p\pi$	$p\pi+\alpha$	$p\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha$	$(p+1)\pi \ldots$
$f_5''(s)$	$-$	0	$+$	$\ldots$	$-\quad 0 \quad +$		$\ldots$
$f_5'(s)$	1			$\ldots$			
$f_5(s)$	$0 \nearrow f_5(\alpha) \nearrow \pm\infty \nearrow 0 \ldots \nearrow 0 \nearrow f_5(\alpha) \nearrow \pm\infty \nearrow 0 \nearrow \ldots$						

și figura 1 din care se deduce că $S'(s)$ are rădăcinile

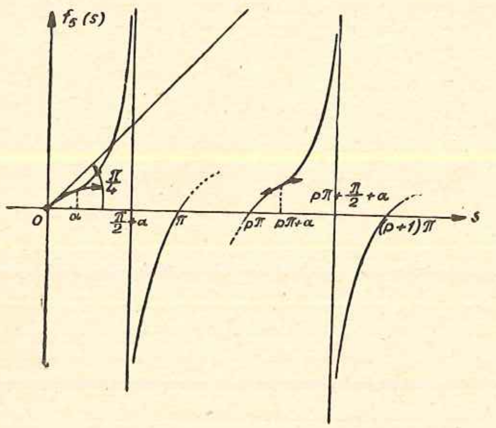

Fig. 1

$$s = \sigma_p^{(1)} (p\,\pi < \sigma_p^{(1)} < (p+1)\,\pi, \quad (p = 0, 1, \ldots). \qquad (4_1)$$

Din tabela 1 se deduce că $f_4(s)$ are rădăcinile

$$s = \sigma_p\,(p\pi < \sigma_p < (p+1)\,\pi, p = 1, 2, \ldots) \qquad (4_1')$$

și cum $S(\sigma_p) = \dfrac{\sigma_p}{2}(1+b^2)\,e^{-b\sigma_p}\sin\sigma_d$.

se deduce din tabela 3 că $\sigma_p < \sigma_p^{(2)}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, $\sigma_p^{(2)} (p = 0, 1, \ldots)$ fiind rădăcinile lui

$$S(s)\ (p\,\pi < \sigma_p^{(2)} < (p+1)\,\pi), \qquad (4_1'')$$

a căror existență se vede din acel tabel. Avem așadar dispoziția

$$\left.\begin{array}{l} 0 \quad \sigma_0^{(2)} \quad \pi\,\sigma_1 \quad \sigma_1^{(2)} \quad 2\pi \quad \sigma_2 \quad \sigma_2^{(3)} \quad \sigma_2^{(2)} \quad 3\pi \quad \ldots \\ 2\,p\,\pi \quad \sigma_{2p} \quad \sigma_{2p}^{(3)} \quad \sigma_{2p}^{(2)} \quad (2\,p+1)\pi \quad \sigma_{2p+1} \quad \sigma_{2p+1}^{(2)} \quad (2\,p+2)\,\pi \ldots \longrightarrow s \end{array}\right\} \qquad (4_2)$$

completată cu valorile $\sigma_{2p}^{(3)}$ din (6), (9) și (11), din care rezultă tabelele 3 — 7 de mai jos.

s	0	$\sigma_0^{(1)}$	$\sigma_0^{(2)}$	π	$\sigma_1^{(1)}$	$\sigma_1^{(2)}$	2π	$\ldots$
$S'(s)$	$+\ 0$		$-$		0	$+$		$\ldots$
$S(s)$	$0 \nearrow S(\sigma_0^{(1)}) \searrow 0 \searrow -(1+e^{-b\pi}) < 0 \nearrow S(\sigma_1^{(1)}) \searrow 0 \searrow -1+e^{-2bp\pi} > 0 \ldots$							

s	$2p\pi$	$\sigma_2^{(1)}$	$\sigma_{2p}^{(2)}$	$(2p+1)\pi$	$\sigma_{2p+1}^{(1)}$	$\sigma_{2p+1}^{(2)}$	$(2p+2)\pi \cdots$
$S'(s)$	$+$	0	$-$		0	$+$	
$S(s)$	$-1+e^{-2bp\pi} > 0 \nearrow S(\sigma_{2p}^{(1)}) \searrow 0 \searrow -(1+e^{-(2p+1)b\pi}) \searrow S(\sigma_{2p+1}^{(1)}) \nearrow 0 \nearrow -1+e^{-(2p+2)b\pi} > 0 \ldots$						

Tabela 3

Pentru $p = 0$

1° $0 < s < \sigma_0^{(2)}$

a	b	a_1	a_2	a_3	∞
$f_3''(a)$	> 0	$+\ 0$	$-$		
$f_3'(a)$	$0 \nearrow$	$f_3'(a_1) \searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f_3(a)$	0	$\nearrow$	$f_3(a_2) \searrow$	$0 \searrow$	$-\infty$
$f_2(a)$	$f_1(s) \nearrow$			$f_2(a_3) \searrow$	$-\infty$

2° $\sigma_0^{(2)} \leqslant s \leqslant \sigma_1$, $s \neq \pi$

a	b		∞
$f_3''(a)$	$\leqslant 0$	$-$	
$f_3'(a)$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f_3(a)$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f_2(a)$	$f_1(s)$	$\searrow$	$-\infty$

Tabela 4

3° $\sigma_1 < s < \sigma_1^{(2)}$

a	b	a_1	a_2	a_3	a_4	∞
$f_3''(a)$	< 0	$-\ 0$		$+$		
$f_3'(a)$	$0 \searrow$	$f_3'(a_1) \nearrow$	0		$\nearrow$	∞
$f_3(a)$	$0 \searrow$		$f_3(a_2) \nearrow$	$0 \nearrow$		∞
$f_2(a)$	$f_1(s) \searrow$			$f_2(a_3) \nearrow$	$0 \nearrow$	∞

Tabela 5

$\sigma_1^{(2)} \leqslant s < 2\pi$

a	b	a_4	∞
$f_3''(a)$	$\geqslant 0$	$+$	
$f_3'(a)$	0	$\nearrow$	∞
$f_3(a)$	0	$\nearrow$	∞
$f_2(a)$	$f_2(s)$	$\nearrow\ 0 \nearrow$	∞

Tabela 6 *Tabela 7*

Pentru $p = 1$

Dacă $2\,p\,\pi < s \leqslant \sigma_{2p}$	avem tabela [1]) 7
Dacă $\sigma_{2p} < s < \sigma_{2p}^{(2)}$	avem tabela 4
Dacă $\sigma_{2p}^{(2)} \leqslant s \leqslant \sigma_{2p+1}$	avem tabela 5
Dacă $\sigma_{2p+1} < s < \sigma_{2p+1}^{(2)}$	avem tabela 6
Dacă $\sigma_{2p+1}^{(2)} \leqslant s < (2\,p+2)\,\pi$	avem tabela 7

În tabelele 4 — 7 s-a însemnat (cu ajutorul lui (2))

$$\left.\begin{aligned} f_1(s) &= \lim_{a \to b} f_2(a) = f_2(a)\big|_{a=b} = \\ &= -1 + e^{bs}[2\cos s + (1+b^2)\,s\sin s] - e^{2bs} \end{aligned}\right\} \qquad (5_1)$$

Avem din (2)

$$f_2(0) = -2\sin\frac{s}{2} f_6(s) \text{ unde } f_6(s) = \frac{1}{b}(1-e^{bs})\cos\frac{s}{2} + (1+e^{bs})\sin\frac{s}{2} \qquad (6)$$

se anulează cînd

$$s = f_7(s) = \frac{1}{b}\log\frac{\cos\frac{s}{2} + b\sin\frac{s}{2}}{\cos\frac{s}{2} - b\sin\frac{s}{2}}$$

[1]) Cu deosebire că: 1° pentru $s = \sigma_{2p}$ sau $s = \sigma_{2p+1}$, $f_3'(a)\big|_{a=\infty} = (1+b^2)\,se^{-bs}\sin s$; 2° nu mai avem neapărat $f_1(s) < 0$ ca pentru $p = 0$ (relația (34)).

deci

$$f_7'(s) = \frac{1}{\cos^2 \frac{s}{2} - b^2 \sin^2 \frac{s}{2}}, \; f_7''(s) = \frac{1+b^2}{2} \frac{\sin s}{\left(\cos^2 \frac{s}{2} - b^2 \sin^2 \frac{s}{2}\right)^2}$$

Dacă se înseamnă $0 < \beta = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{b}\right) < \frac{\pi}{2}$, se deduce din figura 2 că $f_6(s)$ are rădăcinile

$$s = \sigma_{2p}^{(3)} \left(2p\pi < \sigma_{2p}^{(3)} < (2p+1)\pi, p = 1, 2, \ldots\right)^{1)} \qquad (6_0)$$

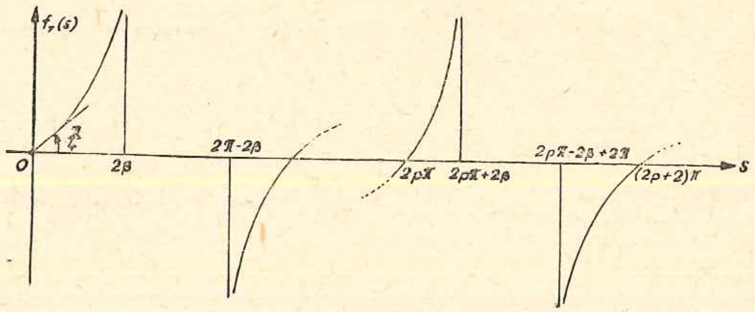

Fig. 2

Deci

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pentru} & 2p\pi \leqslant s < \sigma_{2p}^{(3)}, \quad \operatorname{sg} f_6(s) = \operatorname{sg}(-1)^{p-1}, \\ \text{iar pentru} & \sigma_{2p}^{(3)} < s \leqslant (2p+2)\pi, \operatorname{sg} f_6(s) = \operatorname{sg}(-1)^p \; (p = 1,2,\ldots) \end{array}\right\} \qquad (6_1)$$

De aici și din (6) avem

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pentru} & 2p\pi < s < \sigma_{2p}^{(3)}, f_2(0) > 0 \\ \text{iar pentru} & \sigma_{2p}^{(3)} < s < (2p+2)\pi, f_2(0) < 0 \\ \text{pentru} & s = 2p\pi, \sigma_{2p}^{(3)} \text{ sau } (2p+2)\pi, f_2(0) = 0 \; (p = 1,2,\ldots) \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Cum din figura 2 se deduce că în $(0, 2\pi]$, $f_6(s)$ nu are rădăcini, înseamnă că pentru $0 < s < 2\pi$,

$$f_2(0) < 0. \qquad (8)$$

Ținînd seamă că în (3) și $(4_1')$ $f_4(\sigma_{2p}) = 0$, avem pentru $p \geqslant 1$ în (6)

$$f_6(\sigma_{2p}) = \frac{1+b^2}{b} \sin \frac{\sigma_{2p}}{2} \sin \sigma_{2p}, \text{ deci } \operatorname{sg} f_6(\sigma_{2p}) = \operatorname{sg}(-1)^{p-1}$$

așa că de aici și din (6_1) rezultă

$$\sigma_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)} \qquad (9)$$

---

1) Ecuația $f_6(s) = 0$ se poate scrie sub forma

$$b \operatorname{tg} \frac{s}{2} = \operatorname{th} \frac{bs}{2}, \text{ unde } \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Ținînd seamă că în (3) și $(4_1'')$ $S(\sigma_{2p}^{(2)}) = 0$, avem în (6)

$$f_6(\sigma_{2p}^{(2)}) = \frac{1+b^2}{b} \sin \sigma_{2p}^{(2)} f_8\left(\frac{\sigma_{2p}^{(2)}}{2}\right), \text{ unde } f_8(s) = (1+bs)\sin s - s\cos s \qquad (9_1)$$

se anulează odată cu $S'(s)$ din (3), deci pentru $s = \sigma_p^{(1)}$ din (4_1).

Ținînd seamă că $f_8(\sigma_p^{(1)}) = 0$ avem dar

$$S(2\sigma_p^{(1)}) = -1 + \sigma_p^{(1)} e^{-2b\sigma_p^{(1)}} (b + \operatorname{ctg} \sigma_p^{(1)}) =$$

$$= e^{-2b\sigma_p^{(1)}} \left(1 + 2b\sigma_p^{(1)} - e^{2b\sigma_p^{(1)}}\right) < 0. \qquad (10)$$

Cum din figura 1 avem $p\pi < \sigma_p^{(1)} < p\pi + \frac{\pi}{2}$, se deduce de aici, din (10) și din tabela 3 că

$$2\sigma_{p-1}^{(1)} < 2p\pi < \sigma_{2p}^{(2)} < 2\sigma_p^{(1)}, \text{ așa că } \sigma_{p-1}^{(1)} < p\pi < \frac{\sigma_{2p}^{(2)}}{2} < \sigma_p^{(1)}$$

deci $\operatorname{sg} f_8\left(\frac{\sigma_{2p}^{(2)}}{2}\right) = \operatorname{sg} f_8(p\pi) = \operatorname{sg}(-1)^{p-1}$, așadar în (9_1) avem $\operatorname{sg} f_6(\sigma_{2p}^{(2)}) = \operatorname{sg}(-1)^p$, iar de aici și din (6_1)

$$\sigma_{2p}^{(3)} < \sigma_{2p}^{(2)}. \qquad (11)$$

Avem $\tau_1 > \pi$ (1° p. 2), deci $\tau_1 \overline{\in} (0, \sigma_0^{(2)})$, cum se deduce din $(4_1'')$. Din (8) și din tabela 5 avem $\tau_1 \overline{\in} [\pi, \sigma_1]$, așa că

$$\sigma_1 < \tau_1 < 2\pi \qquad (12)$$

Din (5) și (7) se vede că

$$\tau_{2p} \overline{\in} [2p\pi, \sigma_{2p}], \tau_{2p} \overline{\in} [\sigma_{2p}^{(2)}, (2p+1)\pi], \tau_{2p+1} \overline{\in} [(2p+1)\pi, \sigma_{2p+1}]$$

dat fiind, că din distribuția (4_2) și din tabelele 5 și 7 se deduce că în intervalele considerate $f_2(a) \neq 0$ pentru orice $a > b$, deci în (2) $f(s) \neq 0$. Așadar

$$\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)} \text{ iar } \sigma_{2p+1} < \tau_{2p+1} < (2p+2)\pi \qquad (13)$$
$$(p = 1,2,\ldots) \qquad\qquad (p = 0,1,\ldots)$$

(în inegalitățile pentru τ_{2p+1} s-a ținut seamă de (12), $(p = 0,1,\ldots)$).

Ținînd seamă că $f(s)$ este continuă în raport cu a, deci că și τ_n au aceeași proprietate, se deduce dar din (6) și (6_0) că

$$\lim_{a \to 0} \tau_{2p} = \sigma_{2p}^{(3)}, \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Evident că pentru anumite intervale de variație ale lui s, putem avea cu ajutorul relațiilor (5) și al tabelelor 4 — 7 delimitări mai precise pentru rădăcinile τ_n ale funcției $f(s)$, decît cele din (13). Se va da un exemplu simplu de asemenea delimitare. Avem din (3)

$$f_3(a)\,/_{a=0} = (1+b^2)(1-e^{-bs})\sin s - bs(e^{-bs}\sin s + b - be^{-bs}\cos s). \qquad (14)$$

Însemnînd

$$f_9(s) = b + e^{-bs}(\sin s - b\cos s) \qquad (14_1)$$

Tabela 8

s	$2p\pi$		$2p\pi + \frac{\pi}{2}$		$\sigma_{2p}^{(4)}$		$(2p+1)\pi$
$f_9'(s)$		$+$	0	$-$			
$f_9(s)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\searrow$	$b(1+e^{-b\pi})<0$

avem $\frac{f_9'(s)}{1+b^2} = e^{-bs}\cos s$, deci $f_9(s)$ are în $[2p\pi, (2p+1)\pi]$ rădăcina

$$s = \sigma_{2p}^{(4)}. \tag{14_2}$$

Or, $f_9(\sigma_{2p}^{(2)}) = (1+b^2)\, e^{-b\sigma_{2p}^{(2)}} \sin\sigma_{2p}^{(2)}\left(1 + \frac{b}{2}\sigma_{2p}^{(2)}\right)$ (cum rezultă din (14_1) și $(4_1'')$)

Pentru

$$1 \leqslant p < -\frac{1}{2} - \frac{1}{b\pi} \tag{15}$$

(dacă sînt asemenea valori ale lui p, adică dacă $|b|$ este destul de mic), $1 + \frac{b}{2}\sigma_{2p}^{(2)} > 0$ deci $f_9(\sigma_{2p}^{(2)}) > 0$ în care caz tabelul 8 ne spune că

$$\sigma_{sp}^{(2)} \leqslant \sigma_{sp}^{(4)} \tag{15_1}$$

Se mai deduce din (14_1) și (6_0)

$$f_9(\sigma_{2p}^{(3)}) = (1+b^2)\frac{1+\cos\sigma_{2p}^{(3)}}{b + \operatorname{ctg}\frac{\sigma_{2p}^{(3)}}{2}}. \tag{15_2}$$

Or, în figura 2 avem $2p\pi < \sigma_{sp}^{(3)} < 2p\pi + 2\beta$ deci

$$p\pi < \frac{1}{2}\sigma_{2p}^{(3)} < p\pi + \beta, \text{ așa că } \operatorname{tg}\frac{1}{2}\sigma_{2p}^{(3)} < \operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{b},$$

deci $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\sigma_{2p}^{(3)} > -b$, așa că în (15_2) $f_9(\sigma_{2p}^{(3)}) > 0$ în care caz tabela 8 ne spune că

$$\sigma_{2p}^{(3)} < \sigma_{2p}^{(4)} \qquad (p = 1,2,\ldots) \tag{16}$$

(relație care rezultă de altfel îndată din (11) și (15_1), însă pentru valorile (15) ale lui p). Pentru valorile (15) ale lui p avem dar pentru $\sigma_{2p}^{(3)} < s < \sigma_{2p}^{(4)}$ că $f_9(s) > 0$, deci în (14) $f_3(a)\,/_{a=0} < 0$, în care caz tabela 4 ne spune că $a_3 < 0$, deci $f_2(a)$ scade cînd a crește de la 0 la ∞. Cum $f_2(0) < 0$, înseamnă că $f_2(a) < 0$, deci $\tau_{2p} \mathrel{\bar\in} [\sigma_{2p}^{(3)}, \sigma_{2p}^{(2)}]$, așa că în (13) avem

$$\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)} \tag{17}$$

delimitare mai bună pentru valorile (15) ale lui p. Folosind relația (16), se ajunge și la concluzia $\tau_{2p} \mathrel{\bar\in} (\sigma_{2p}^{(3)}, \sigma_{2p}^{(4)})$. Dacă $\sigma_{2p}^{(4)} < \sigma_{2p}^{(2)}$, înseamnă dar sau că $\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)}$, sau că $\sigma_{2p}^{(4)} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)}$, delimitare iarăși mai bună decît cea din (13), și care are loc pentru orice $p \geqslant -\frac{1}{b\pi}$. Evident că printr-o cercetare mai amănunțită a

semnului lui $f_3(a)\,/_{a=0}$ din (14) cînd $\sigma_{2p} < s < \sigma_{2p}^{(2)}$, s-ar ajunge la delimitări mai bune pentru τ_{2p}. Tabela 4 ne arată de altfel că dîndu-se un $s = \sigma$ din intervalul (17), există o singură valoare a lui a pentru care $\tau_{2p} = \sigma$, iar tabelele 6 și 7 că pentru $s = \sigma$ din intervalul (13) pentru τ_{2p+1} există o singură valoare a lui a pentru care $\tau_{2p+1} = \sigma$ (bineînțeles dacă b are o valoare dată).

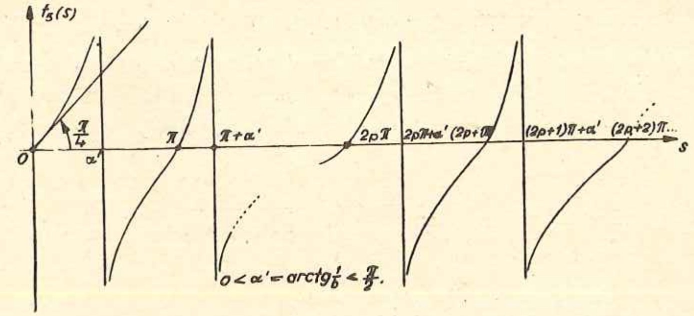

Fig. 3

2^0 $\qquad b > 0.$

Figura 1 se înlocuiește cu figura 3, deci în relația (4_1) se va lua $p = 1,2,\ldots$ Suprimînd dar în tabela 3 pe $\sigma_0^{(1)}$ și ținînd seamă că pentru $s > 0$ destul de mic $S'(s) < 0$ se deduce că

$$\left.\begin{array}{l}\text{și pentru } b > 0, \text{ maximele lui } S(s) \text{ au loc pentru } s = \sigma_{2p}^{(1)} \\ \text{iar minimele pentru } s = \sigma_{2p+1}^{(1)} \text{ (bineînțeles că } S(2p\pi) < 0).\end{array}\right\} \tag{17_0}$$

Or, ținînd seamă că în figura 3 avem $2p\pi < \sigma_{2p}^{(1)} < 2p\pi + \frac{\pi}{2}$, se deduce din (3) și (4_1)

$$\left.\begin{array}{l} S(\sigma_{2p}^{(1)}) = f_{10}(\sigma_{2p}^{(1)}) \\ \text{unde} \\ f_{10}(s) = -1 + e^{-bs}\dfrac{1 + 2bs + \dfrac{1+b^2}{2}s^2}{\sqrt{1 + 2bs + (1+b^2)s^2}} \\ \text{așa că} \\ f_{10}'(s) = -e^{-bs}\dfrac{bs\left(b + \frac{1}{2}(1+b^2)s\right)\left[2 + \frac{1}{b}(-1+3b^2)s + (1+b^2)s^2\right]}{[1+2bs+(1+b^2)s^2]\sqrt{1+2bs+(1+b^2)s^2}} \end{array}\right\} \tag{18}$$

se anulează pentru

$$s = -\frac{2b}{1+b^2}, \quad s = 0$$

$$\left.\begin{aligned} s &= \bar{s}_1 = \bar{s}_1(b) = \frac{1}{2b(1+b^2)}\left(1 - 3b^2 - \sqrt{1 - 14b^2 + b^4}\right) \\ &\text{și} \\ s &= \bar{s}_2 = \bar{s}_2(b) = \frac{1}{2b(1+b^2)}\left(1 - 3b^2 + \sqrt{1 - 14b + b^4}\right) \end{aligned}\right\} \quad (18_1)$$

Rădăcinile $\bar{s}_1$ și $\bar{s}_2$ sînt reale și distincte pentru $0 < b < 2 - \sqrt{3}$ sau $b > 2 + \sqrt{3}$. In cazul din urmă se vede din (18) că $f_{10}(s) < 0$ pentru orice $s > 0$ (dat fiind că atunci $\bar{s}_1 < 0$, $\bar{s}_2 < 0$). Dacă $2 - \sqrt{3} \leqslant b \leqslant 2 + \sqrt{3}$ avem de asemenea în (18) $f_{10}(s) < 0$ pentru orice $s > 0$ (dat fiindcă $f'_{10}(s) \leqslant 0$). $\quad (18_2)$

Așadar

$$f_{11}(b) = f_{10}(\bar{s}_2) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2}\,b}\sqrt{(1+b^2)\left(1 + b^2 + \sqrt{1 - 14b^2 + b^4}\right)}\; e^{-\frac{1 - 3b^2 + \sqrt{1 - 14b^2 + b^4}}{2(1+b^2)^2}} \qquad (19)$$

Însemnînd pentru comoditate

$$x = \frac{1 - 3b^2 + \sqrt{1 - 14b^2 + b^4}}{2(1+b^2)}, \qquad (20)$$

avem de aici

$$b^2 = \frac{x(1-x)}{(1+x)(2+x)}, \qquad (20_1)$$

valoare pe care înlocuind-o în (19) obținem

$$f_{11}(b) = f_{12}(x) = -1 + \sqrt{\frac{1+2x}{1-x^2}}\, e^{-x}. \qquad (21)$$

Or, se deduce din (20)

$$\frac{dx}{db} = -4b\,\frac{2(1-b^2) + \sqrt{1 - 14b^2 + b^4}}{(1+b^2)^2\sqrt{1 - 14b^2 + b^4}} < 0 \qquad (21_1)$$

așa că atunci cînd b crește de la 0 la $2 - \sqrt{3}$, x scade de la 1 la $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ deci $2x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$ (relație care se prezintă în cursul verificării faptului că b^2 dat de (20_1) verifică relația (20)), deci

$$f'_{12}(x) = x\,\frac{-1 + 2x + 2x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{\frac{1+2x}{1-x^2}}}\, e^{-x} \geqslant 0.$$

Așadar

$$f'_{11}(b) = f'_{12}(x)\frac{dx}{db} \leqslant 0$$

Tabela 9

x	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		x_0		1
$f_{12}(x)$	$-1 + \sqrt{2}\,e^{-\frac{\sqrt{3}-1}{2}} < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

Tabela 10

b	0		b_0		$2 - \sqrt{3}$
$f_{11}(b)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1 + \sqrt{2}\,e^{-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

(Se vede ușor că $-1 + \sqrt{2}\,e^{-\frac{\sqrt{3}-1}{2}} < 0$, deoarece inegalitatea în chestiune se scrie $\sqrt{3} - 1 = 0{,}7\ldots > \log 2 = 0{,}6\ldots$).

Se vede din (20_1) că, în tabela 10, x_0 este rădăcina pozitivă a funcției $f_{12}(x)$ din (21), iar

$$b_0 = \sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{(1+x_0)(2+x_0)}}. \qquad (22)$$

Pentru $0 < b < b_0$ avem dar din (18) tabela 11.

s	0		$\bar{s}_1$		$\bar{s}_3 = \bar{s}_3(b)$		$\bar{s}_2$		$\bar{s}_4 = \bar{s}_4(b)$		∞
$f'_{10}(s)$	0	$-$	0		$+$		0	$-$			
$f_{10}(s)$	0	$\searrow$	$f_{10}(\bar{s}_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f_{11}(b)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Tabela 11

Or, însemnînd în (18) $f_{10}(s) = f_{13}(b)$, avem

$$f'_{13}(b) = -s^2 e^{-bs}\,\frac{4b + 8b^2 s + 5b(1+b^2)s^2 + (1+b^2)s^3}{2(1 + 2bs + (1+b^2)s^2)\sqrt{1 + 2bs + (1+b^2)s^2}} < 0 \qquad (23)$$

așa că dacă $0 < b_1 < b_2 < b_0$, avem, însemnînd în (18) $f_{10}(s) = f_{10}(s, b)$:

$$f_{10}(\bar{s}_4(b_2), b_2) = 0 < f_{10}(\bar{s}_4(b_2), b_1)$$

$$f_{10}(\bar{s}_3(b_2), b_2) = 0 < f_{10}(\bar{s}_3(b_2), b_1)$$

ceea ce ne spune, împreună cu tabela 11 construită pentru $b = b_1$, că $\bar{s}_4(b_2) < \bar{s}_4(b_1)$, iar $\bar{s}_3(b_2) > \bar{s}_3(b_1)$, deci

$$\bar{s}_3(b) \text{ crește cu } b, \text{ iar } \bar{s}(b) \text{ scade cînd } b \text{ crește.} \qquad (24)$$

În figura 4 s-au construit — cu ajutorul tabelei 11 și a relației (23) — curbele de ecuații respectiv $y = f_{10}(s)$ pentru un $b < b_0$ (plin) și $y = f_{10}(s)$ pentru $b = b_0$ (punctat).

Se deduce dar din acea figură că

$$\bar{s}_3(b_0) = \bar{s}_4(b_0) = \bar{s}_2(b_0). \tag{24$_1$}$$

Or, se deduce din (18_1), (20) și (20_1) că

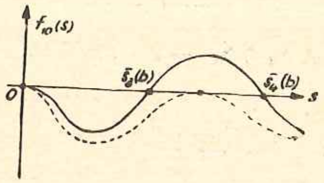

Fig. 4

$$\bar{s}_2(b) = \frac{x}{b} = f_{14}(x) = \sqrt{\frac{x(1+x)(2+x)}{1-x}},$$

deci

$$f'_{14}(x) = \frac{1 + 3x - x^3}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{x(x+1)(2+x)}{1-x}}} > 0 \tag{25}$$

$$\left(\text{pentru } \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right)$$

Dar

$$f_{14}\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{1}{8}\sqrt{2415} < 2\pi \tag{26}$$

(fiindcă inegalitatea în chestiune se scrie $\sqrt{2415} < 50 < 50{,}24 < 16\pi$).

Se mai deduce din (21)

$$f_{12}\left(\frac{7}{8}\right) = e^{-\frac{7}{8}}\left(-e^{\frac{7}{8}} + 4\sqrt{\frac{11}{15}}\right) > e^{-\frac{7}{8}}\left(4\sqrt{\frac{11}{15}} - 3\right) > 0,$$

deci din tabela 9 se deduce $x_0 < \dfrac{7}{8}$, iar de aici și din (25) și (26)

$f_{14}(x_0) = \bar{s}_2(b_0) < f_{14}\left(\dfrac{7}{8}\right) < 2\pi$, relație care împreună cu (24_1) ne dă

$$\bar{s}_3(b_0) < 2\pi. \tag{26$_1$}$$

De aici și din (24) se deduce dar că $\bar{s}_3(b) < 2\pi$ pentru orice

$$0 < b \leqslant b_0 \tag{27}$$

Avem din (18_1) $\lim\limits_{b\to 0} \bar{s}_2(b) = \infty$. Cum $\bar{s}_4 > \bar{s}_2$, cu atît mai mult

$$\lim_{b\to 0} \bar{s}_4(b) = \infty \tag{27$_1$}$$

așa că cu ajutorul lui (24) și (24_1) se deduce că dacă b crește de la 0 la b_0 $\bar{s}_4(b)$, scade de la ∞ la $\bar{s}_4(b_0) = f_{14}(x_0) < 2\pi$. (28).

Dacă se dă așadar un număr p_1 întreg și pozitiv oarecare, se poate găsi un $\eta = \eta(p_1)$ astfel încît pentru orice $b < \eta$ (bineînțeles pozitiv), să avem $s_4(\bar{b}) > 2p_1\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

Fie dar

$$\sigma^{(1)}_{2p_2} < \bar{s}_4 \leqslant \sigma^{(1)}_{2(p_2+1)}. \tag{28*}$$

Se deduce din (17_1), (27) și tabela 11 că $S(\sigma^{(1)}_{2p}) > 0$ $(p = 1,2, \ldots, p_2)$ și $S(\sigma^{(1)}_{2p}) \leqslant 0$ $(p = p_2 + 1,\ p_2 + 2, \ldots)$.

Rezultă dar pentru $S(s)$ tabela 12 (construită cu ajutorul lui (17_0), în locul tabelei 3) din care se deduce că $S(\bar{\sigma}_{2p}) = S(\bar{\bar{\sigma}}_{2p}) = 0$ $(p = 1,2, \ldots, p_2)$; eventual $S(\sigma^{(1)}_{2(p_2+1)}) = 0$ (dacă $s_4 = \sigma^{(1)}_{2(p_2+1)}$); $S(s) > 0$ pentru $\bar{\sigma}_{2p} < s < \bar{\bar{\sigma}}_{2p}$ $(p = 1,2, \ldots, p_2)$; $S(s) < 0$ pentru toate celelalte valori pozitive ale lui s

Tabela 12

s	0	π	$\sigma^{(1)}_1$	2π	$\bar{\sigma}_2$		$\sigma^{(1)}_2$		$\bar{\bar{\sigma}}_2$	3π	$\sigma^{(1)}_3$	4π	$\bar{\sigma}_4$		$\cdots$
$S'(s)$	0	$-$	0	$+$			0		$-$		0	$+$			$\cdots$
$S(s)$	0	$\searrow$	$S(\sigma^{(1)}_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$S(\sigma^{(1)}_2)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$S(\sigma^{(1)}_3)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\cdots$

s	$2p_2\pi$		$\bar{\sigma}_{2p_2}$		$\sigma^{(1)}_{2p_2}$		$\bar{\bar{\sigma}}_{2p_2}$		$(2p_2+1)\pi$	$\sigma^{(1)}_{2p_2+1}$		$(2p_2+2)\pi$
$S'(s)$		$+$			0	$-$				0	$+$	
$S(s)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$S(\sigma^{(1)}_{2p_2})$	$\searrow$	0	$\searrow$		$S(\sigma^{(1)}_{2p_2+1})$	$\nearrow$	

s	$(2p_2+2)\pi$	$\sigma^{(1)}_{2(p_2+1)}$	$(2p_2+3)\pi$	$\sigma^{(1)}_{2p_2+3}$	$2(p_2+2)\pi$	$\sigma^{(1)}_{2(p_2+2)}$	$\cdots$
$S'(s)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$
$S(s)$	$\nearrow$	$S(\sigma^{(1)}_{2(p_2+1)}) \leqslant 0$	$\searrow$	$S(\sigma^{(1)}_{2p_2+3})$	$\nearrow$	$S(\sigma^{(1)}_{2(p_2+2)}) < 0$	$\searrow \cdots$

Se deduce din tabela 1 că

$$f_4(s) > 0 \text{ pentru orice } s > 0 \tag{28$_0$}$$

deci rădăcina a_1 din (3_1) există pentru orice

$$s \in (2p\pi, (2p+1)\pi) \tag{28$_1$}$$

(interval deschis, $p = 0,1 \ldots$).

Ținînd seamă că $\sigma^{(1)}_2 = \sigma^{(1)}_2(b)$ verifică identic relația $b = -\dfrac{1}{\sigma^{(1)}_2} + \operatorname{ctg}\sigma^{(1)}_2$ (căpătată din expresia din (3) a lui $S'(s)$), avem prin derivarea relației căpătate în raport cu b

$$\frac{d}{db}\sigma^{(1)}_2 = \frac{(\sigma^{(1)}_2)^2}{1 - \left(\dfrac{\sigma^{(1)}_2}{\sin\sigma^{(1)}_2}\right)^2} < 0. \tag{29}$$

Cu ajutorul lui (28) și (29) se poate construi figura 5, unde s-a trasat plin curba de ecuație $y = \bar{s}_4(b)$ și punctat cea de ecuație $y = \sigma^{(1)}_2 b$.

S-a ținut seamă că din (24_1) și (26_1) rezultă $\bar{s}_4(b_0) < 2\pi$; s-a mai dedus din expresia lui $\bar{S}'(s)$ din (3) că

$$\sigma_2^{(1)}(0) = \sigma = \text{rădăcina din } \left(2\pi,\ 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ a ecuației } s = \operatorname{tg} s \qquad (29_1)$$

Deci, în $(0, b_0)$ se află o singură valoare a lui b $(b = b_1)$ pentru care

$$\bar{s}_4(b) = \sigma_2^{(1)}(b). \qquad (29_2)$$

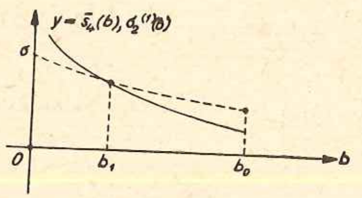

Fig. 5

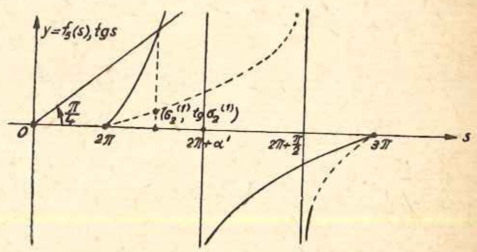

Fig. 6

Se poate arăta ușor că nu pot fi mai multe asemenea valori, dat fiind că se deduce din (3) și (17_1)

$$f_{15}(b) = S(\sigma_2^{(1)}) = f_{10}(\sigma_2^{(1)}) = -1 + e^{-b\sigma_2^{(1)}} \frac{\sigma_2^{(1)}}{\sin \sigma_2^{(1)}} \left(1 - \frac{1+b^2}{2} \sin^2 \sigma_2^{(1)}\right) \qquad (29_3)$$

deci cu ajutorul lui (29)

$$f'_{15}(b) = \frac{(\sigma_2^{(1)})\, e^{-b\sigma_2^{(1)}}}{(\sigma_2^{(1)})^2 - \sin^2 \sigma_2^{(1)}} \left\{ -\frac{\sigma_2^{(1)}}{\sin \sigma_2^{(1)}} \left[1 - \frac{1+b^2}{2} \sin^2 \sigma_2^{(1)}\right] \left[\sigma_2^{(1)} - b \sin^2 \sigma_2^{(1)}\right] + \right.$$

$$\left. + \sin \sigma_2^{(1)} \left[-\frac{b}{\sigma_2^{(1)}} \left((\sigma_2^{(1)})^2 - \sin^2 \sigma_2^{(1)}\right) + \sigma_2^{(1)} \cos \sigma_2^{(1)} \left(\frac{1}{\sin \sigma_2^{(1)}} + \frac{1+b^2}{2} \sin \sigma_2^{(1)}\right)\right]\right\} \qquad (30)$$

Însă avem în figura 3

$$2\pi < \sigma_2^{(1)} < 2\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{b} < 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

deci

$$\sin^2 \sigma_2^{(1)} < \sin^2 \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{1+b^2} \qquad (31)$$

Reprezentînd în figura 6 curbele de ecuații respectiv $y = f_5(s)$ (plin) și $y = \operatorname{tg} s$ (punctat), se vede că $\sigma_2^{(1)} > \operatorname{tg} \sigma_2^{(1)}$, deci cum $0 < b < b_0 < 1$, se deduce

$$\sigma_2^{(1)} > \operatorname{tg} \sigma_2^{(1)} > b \operatorname{tg} \sigma_2^{(1)} > b \sin^2 \sigma_2^{(1)} \qquad (32)$$

Avem dar în (30) cu ajutorul lui (31) și (32)

$$f'_{15}(b) < \frac{(\sigma_2^{(1)})^3\, e^{-b\sigma_2^{(1)}}}{2[(\sigma_2^{(1)})^2 - \sin^2 \sigma_2^{(1)})]} \left[2 - \frac{\sigma_2^{(1)} - b \sin^2 \sigma_2^{(1)}}{\sin \sigma_2^{(1)}} + (1+b^2) \sin^2 \sigma_2^{(1)}\right] <$$

$$< \frac{(\sigma_2^{(1)})^3\, e^{-b\sigma_2^{(1)}}}{2[(\sigma_2^{(1)})^2 - \sin \sigma_2^{(1)}]} \left[2 - \sigma_2^{(1)} + 1 + b + b^2\right] < 0 \qquad (32_0)$$

dat fiind că $2 - \sigma_2^{(1)} < -4$, iar pentru $0 < b < b_0 < 2 - \sqrt{3}$ avem $1 + b + b^2 < 4$. Mai avem în (29_3) cu ajutorul lui (29_1) $f_{15}(0) = \dfrac{(1-\cos\sigma)^2}{2\cos\sigma} < 0$; cum în figura 5 se deduce $\sigma_2^{(1)}(b_0) > \bar{s}_4(b_0)$, rezultă din tabela 11 că $f_{15}(b_0) < 0$. Cum $f_{15}(b)$ este descrescătoare (relația (32_0)) înseamnă că în intervalul $(0, b_0)$ se află o singură valoare a lui b, $b = b_1$, pentru care $f_{15}(b_1) = f_{10}(\sigma_2^{(1)}(b_1)) = 0$ adică pentru care $\sigma_2^{(1)}(b_1) = \bar{s}_4(b_1)$, deci curbele din figura 5 se taie o singură dată (evident că din relația $f_{10}(\sigma_2^{(1)}(b_1)) = 0$ nu se poate deduce că $\sigma_2^{(1)}(b_1) = \bar{s}_3(b_1)$, dat fiind că din (27) și figura 5, avem pentru $0 \leqslant b \leqslant b_0$: $\sigma_2^{(1)}(b) > 2\pi > \bar{s}_3(b)$.

Așadar, dacă $0 < b < b_1$ (b_1 fiind definit în (29_2)) avem în figura 5 $\bar{s}_4(b) > \sigma_2^{(1)}(b)$, deci relațiile (28^*) cu $p_2 \geqslant 1$. Ținînd seamă de cele scrise deasupra tabelei 12 se deduce că

pentru $\bar{\sigma}_{2p} < s < \bar{\bar{\sigma}}_{2p}$ $(p = 1, 2, \ldots, p_2)$ avînd $S(s) > 0$ se deduce din (3_2) $a_1 > b$ $\qquad (32_1)$

deci cu ajutorul lui (3) și (28_0), tabela 4.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pentru } 0 < s \leqslant \bar{\sigma}_2,\ \bar{\bar{\sigma}}_{2p} \leqslant s \leqslant \bar{\sigma}_{2(p+1)}\ (p = 1, 2, \ldots p_2 - 1)\ (\text{dacă } p_2 \geqslant 2), \\ \text{sau } s \geqslant \bar{\bar{\sigma}}_{2p_2}, \text{ avînd în } (17_0) \max\limits_s S(s) \leqslant 0 \text{ rezultă } S(s) \leqslant 0 \text{ pentru orice } s > 0. \end{array}\right\} \qquad (33)$$

Dacă $b_1 \leqslant b < b_0$, avînd în figura 5 $\bar{s}_4(b) \leqslant \sigma_2^{(1)}(b)$, avem în tabela 11 $f_{10}(\sigma_{2p}^{(1)}) \leqslant 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$ deci din (17_1) și (17_0) $\max\limits_s S(s) \leqslant 0$ deci iarăși $S(s) \leqslant 0$ pentru orice $s > 0$. Dacă $b_0 \leqslant b < 2 - \sqrt{3}$ avem, din tabela 10, $f_{11}(b) \leqslant 0$, deci în tabela 11 $f_{10}(s) \leqslant 0$, deci din (17_0) și (17_1) $S(s) \leqslant 0$ pentru orice $s > 0$. Dacă $b \geqslant 2 - \sqrt{3}$ avem din (18_2), (17_0) și (17_1) că $S(s) < 0$ pentru orice $s > 0$. Deci

$$\text{pentru } b \geqslant b_1 \text{ avem } S(s) \leqslant 0 \text{ pentru orice } s > 0 \qquad (33_1)$$

Aceeași relație există și pentru $0 < b < b_1$, pentru valorile (33), (33_1) ale lui s. În cazul acesta, se deduce din (28_1) și (3_2) $a_1 \leqslant b$. Se deduce dar cu ajutorul lui (28_0) și (3) tabela 5 pentru variația lui $f_2(a)$. Deci

$$\left.\begin{array}{l} \text{pentru } b \geqslant b_1 \text{ și orice } s > 0, \text{ sau pentru } 0 < b < b_1 \text{ și valorile (33)} \\ \text{ale lui } s, \text{ este valabil tabela 5 pentru variația lui } f_2(a). \end{array}\right\} \qquad (33_2)$$

Or, din (5_1) rezultă

$$\left.\begin{array}{l} f_{16}(s) = e^{-2bs} f'_1(s) = -2b + e^{-bs}[(-1+b^2)\sin s + 2b\cos s + (1+b^2)\, s\,(\cos s + \\ + b \sin s)], \text{ așa că } f'_{16}(s) = -(1+b^2)^2 s e^{-bs} \sin s \text{ iar } f_{16}((2p+1)\pi) = -2b - \\ -[2b + (2p+1)(1+b^2)\pi]\, e^{-(2p+1)b\pi} < 0\ (p = 0, 1, \ldots);\ f_{16}(2p\pi) = \\ = f_{17}(p) = -2b + e^{-2bp\pi}[2b + 2(1+b^2)\, p\pi]\ (p = 0, 1, \ldots) \end{array}\right| \qquad (34)$$

Deci

$$f'_{17}(p) = 2\pi\,[1 - b^2 - 2p\,\pi b\,(1 + b^2)]\, e^{-2bp\pi} < 0 \text{ pentru } p > p_0 = f_{18}(b) = \frac{1 - b^2}{2\pi b\,(1 + b^2)}$$

Cum $f_{17}(0) = 0$, înseamnă că dacă $f_{18}(b) \leqslant 0$ (deci $b \geqslant 1$), $f_{17}(p) < 0$, ceea ce împreună cu (34) ne dă $f_{16}(s) < 0$, deci $f_1'(s) < 0$ pentru $s > 0$. Cum $f_1(0) = 0$,

se deduce din tabela 5 că pentru $b \geqslant 1$ avem $f(s) < 0$ pentru $s > 0$. (34_0)

Se regăsește astfel din nou o parte din concluzia 2° (p.2).

Tabela 13

s	0		π		2π	$\dots$	$2p\pi$		$(2p+1)\pi$		$(2p+2)\pi$	$\dots$
$f'_{16}(s)$	0	$-$	0	$+$	0	$\dots$	0	$-$	0	$+$	$0\ -$	$\dots$
$f_{16}(s)$	0	$\searrow$	$f_{16}(\pi)$	$\nearrow$	$f_{16}(2\pi)$	$\dots$	$f_{16}(2p\pi)$	$\searrow$	$f_{16}((2p+1)\pi)$	$\nearrow$	$f_{16}((2p+2)\pi)$	$\dots$
$f_1(s)$	0	$\searrow$	$\underset{<0}{f_1(\pi)}$		$\underset{<0}{f_1(2\pi)}$	$\dots$	$\underset{<0}{f_1(2p\pi)}$		$\underset{<0}{f_1((2p+1)\pi)}$		$\underset{<0}{f_1((2p+2)\pi)}$	$\dots$

Se deduce din (34) tabela 13 (care are loc și pentru $b < 0$ și pentru $b > 0$,) în care s-au folosit relațiile

$$f_1(2p\,\pi) = -(1 - e^{-2bp\pi})^2 < 0,\ f_1[(2p + 1)\pi] = -[1 + e^{-((2p+1)b\pi)}]^2 < 0 \qquad (34_1)$$

din care se deduce pe de o parte că

$$\text{pentru } 0 < s \leqslant 2\pi \text{ avem } f_1(s) < 0 \qquad (34_2)$$

și pentru $b < 0$ și pentru $b > 0$ ceea ce împreună cu (33) și tabela 5 ne dă din nou, pentru orice $b > 0$, concluzia (1_1), iar pe de altă parte, că

$$\text{pentru } (2p + 1)\,\pi \leqslant s \leqslant (2p + 2)\,\pi \text{ avem } f(s) < 0\ (p = 0, 1, \dots). \qquad (35)$$

Concluzia (35) are loc pentru orice $b > 0$, pentru că din (33) se deduce $S(s) \leqslant 0$ pentru $(2p + 1)\,\pi \leqslant s \leqslant (2p + 2)\,\pi$ și se găsește și în lucrarea [2].

Dacă $b < 1$, se deduce din (34) tabela 14.

Tabela 14

p	0		$p_0 = f_{18}(b)$		$p_1 = f_{19}(b)$		∞
$f'_{17}(p)$		$+$	0	$-$			
$f_{17}(p)$	0	$\nearrow$	$f_{17}(p_0)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dacă se înseamnă

$$f_{20}(b) = \begin{cases} f_{19}(b). \text{ Dacă } f_{19}(b) \text{ este un număr întreg;} \\ 1 + [f_{19}(b)]. \text{ Dacă } f_{19}(b) \text{ nu este un număr întreg} \end{cases} \qquad (35_1)$$

(înțelegînd prin $[x]$ partea întreagă a lui x), se vede din tabela 14 că pentru $p \geqslant f_{20}(b)$ avem $f_{17}(p) \leqslant 0$, iar pentru $p \leqslant f_{20}(b) - 1 < f_{19}(b)$ avem $f_{17}(p) > 0$. Așadar extremele lui $f_{16}(s)$ din (34) atinse pentru $s \geqslant 2\pi\, f_{20}(b)$ sînt $\leqslant 0$, așa că $f_{16}(s)$ este ea însăși $\leqslant 0$ pentru $s \geqslant 2\pi\, f_{20}(b)$, dat fiind că $f_{16}[2\pi\, f_{20}(b)] = f_{17}[f_{20}(b)] \leqslant 0$. Deci

$$\text{pentru } s \geqslant 2\pi f_{20}(b) \text{ avem } f_1'(s) \leqslant 0. \qquad (35_2)$$

Cum se deduce din (34) $\frac{1}{2}\frac{d}{db} f_{17}(p) = -1 + e^{-2bp\pi}\,[1 - 2\,(1 + b^2)\,p^2\,\pi^2] < 0$ luînd două valori oarecare $0 < b' < b'' < 1$ rezultă $f_{17}(p, b') > f_{17}(p, b'')$ (însemnînd $f_{17}(b) = f_{17}(p, b)$) așa că $f_{17}(f_{19}(b'), b'') = 0 > f_{17}(f_{19}(b'), b'')$, ceea ce împreună cu tabela 14 construită pentru $b = b''$ ne arată că $f_{19}(b') > f_{19}(b'')$, cu alte cuvinte că

$$f_{19}(b) \text{ este o funcție descrescătoare} \qquad (36)$$

Or, pentru $p = 1$ și $b = 2 - \sqrt{3}$ avem în (34) $f_{17}(p) > 0$ dat fiind că inegalitatea în chestiune se scrie $1 + 4\pi > e^{2(2-\sqrt{3})\pi}$ și este evidentă, avînd $2\,(2 - \sqrt{3})\pi < 2$. Deci rezultă în tabela 14 $f_{19}(2 - \sqrt{3}) > 1$ și cum $b_1 < 2 - \sqrt{3}$ se deduce din (36) că $f_{19}(b_1) > 1$. Pentru $b = 1$, avem în (34) $\frac{1}{2} f_{17}(p) = -1 + e^{-2p\pi}\,(1 + 2p\,\pi) = 0$ pentru $p = 0$ și < 0 pentru $p > 0$, deci $f_{19}(1) = 0$. Numărul b_2 din tabela 15 pentru care $f_{19}(b) = 1$ este rădăcina ecuației $f_{17}(1) = 0$ adică a ecuației

$$f_{21}(b) = \left(1 + \pi\,\frac{1 + b^2}{b}\right) e^{-2\pi b} - 1 = 0 \qquad (37)$$

Cum

$$f'_{21}(b) = -\frac{\pi}{b^2}\,(1 + b^2)\,(1 + 2\pi\, b)\, e^{-2\pi b} < 0,\ f_{21}(0) = \infty,\ f_{21}(1) = (1 + 2\pi)\, e^{-2\pi} - 1 < 0, \qquad (37_1)$$

$f_{21}(b)$ are o singură rădăcină > 0.

Pentru $1 > b \geqslant b_2$, se vede dar din tabela 15 că în (35_1) $f_{20}(b) \leqslant 1$, deci din

Tabela 15

b	b_1	$2 - \sqrt{3}$	b_2		1
$f_{19}(b)$	$f_{19}(b_1)$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

(35_2) se deduce $f_1'(s) \leqslant 0$ pentru $s \geqslant 2\pi$. Deci de aici și din (34_1), se mai deduce $f_1(s) < 0$, pentru $s \geqslant 2\pi$, deci în tabela 5, $f_2(a) < 0$, deci $f(s) < 0$, ceea ce, împreună cu (1_1), ne arată că $f(s) < 0$ pentru $s > 0$.

De aici și din (34_0) se deduce dar că
dacă $b \geqslant b_2$ (rădăcina ecuației (37)) atunci $f(s) < 0$ pentru orice $s > 0$
și orice $a > b$. $\Big\}$ (38)

Dacă $b_1 \leqslant b < b_2$, avem în (35_1) $f_{20}(b) \geqslant 2$ deci cum $f_1(\infty) = -\infty$, se deduce din (35_2) că
însemnînd cu $\sigma = \sigma(b)$ cea mai mică valoare a lui $s \geqslant 2\pi f_{20}(b)$ pentru
care $f_1(\sigma) \leqslant 0$, atunci pentru orice $s \geqslant \sigma$ avem $f_1(s) \leqslant 0$ $\Big\}$ (39)

în care caz se deduce din tabela 5 că
dacă $b_1 \leqslant b < b_2$, atunci $f(s) < 0$ pentru orice $s \geqslant \sigma$ (σ fiind definit în
(39)) și orice $a > b$. $\Big\}$ (40)

De altfel, avem din (1) $f(\infty) = -\infty$ (pentru $b > 0$), însă (40) ne dă o margine superioară ($= \sigma$) a rădăcinilor funcției $f(s)$.

Dacă $0 < b < b_1$,

$$\text{atunci } f(s) \text{ poate avea rădăcini pozitive ori cît de mari} \tag{41}$$

pentru că dîndu-se un $p = p_2$ întreg și pozitiv oarecare și un $s = \bar{s}\,(2p_2\,\pi < \bar{s} < (2p_2 + 1)\,\pi)$ tot oarecare, se deduce din (5_1) de pildă pentru $s = 2p\,\pi + \frac{\pi}{2}$

$$f_{22}(b) = f_1\left(2p\,\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1 + (1 + b^2)\left((2p\,\pi + \frac{\pi}{2}\right)e^{\left(2p\pi + \frac{\pi}{2}\right)b} - e^{2b\left(2p\pi + \frac{\pi}{2}\right)} \tag{42}$$

așa că $f_{22}(0) > 0\,(p \geqslant 1)$, $f_{22}(\infty) = -\infty$. Dacă $b = f_{23}(p)$ este cea mai mică rădăcină pozitivă a lui $f_{22}(b)$, luînd $b = \bar{b} < f_{23}(p_2)$, avem $f_1\left(2p_2\,\pi + \frac{\pi}{2}\right) > 0$ (este de altfel evident pe expresia (42) a lui $f_{22}(b)$ că $\lim\limits_{p\to\infty} f_{23}(p) = 0$), în care caz tabelele 4 sau 5 (după cum pentru $b = \bar{b}$ avem în (3) $S(\bar{s}) > 0$ sau $S(\bar{s}) \leqslant 0$) ne arată că $f_2(a)$ are o rădăcină $a = a_4 = a_4(\bar{b})$, așa că $f(\bar{s}) = 0$ pentru $a = a_4(\bar{b})$, $b = \bar{b}$. Se pot alege așadar o infinitate de perechi de valori pentru a și b astfel încît $f(s)$ să aibă rădăcina $s = \bar{s}$ oricît de mare.

Se vede îndată că

$$\left.\begin{array}{l}\text{dacă } f(s) \text{ are rădăcini în } (2p\,\pi, (2p + 1)\,\pi), \text{ atunci acele rădăcini sînt} \\ \text{neapărat în număr de două}\end{array}\right\} \tag{42_1}$$

pentru că se vede din tabela 16([2], unde $\overline{f_1}(s) = e^{-(a+b)}f'(s)$) că pentru ca $f(s)$ să aibă rădăcini în $(2p\pi, (2p + 1)\,\pi)$ se cere ca $\overline{f_1}(2p\,\pi) > 0$ în care caz tabela ne spune că $f(s)$ are în $(2p\,\pi, (2p + 1)\,\pi)$ rădăcinile $\tau_{2p}^{(1)}$ și $\tau_{2p}^{(2)}$ $(\tau_{2p}^{(1)} \leqslant \tau_{2p}^{(2)})$.

Se deduce din (37) $f_{21}\left(\frac{1}{2}\right) = f_{24}(\pi)$, unde $f_{24}(x) = -1 + \left(1 + \frac{5}{2}x\right)e^{-x}$ deci $f'_{24}(x) = \frac{1}{2}(3 - 5x)\,e^{-x}$. Or, $f_{24}(3) = e^{-3}\left(\frac{17}{2} - e^3\right) < 0$ așa că în tabela 17 avem

Tabela 16

s	$2p\,\pi$		$\tau_{2p}^{(1)}$		s_{2p}		$\tau_{2p}^{(2)}$		$(2p + 1)\,\pi$
$\overline{f}'_1(s)$	0				—				0
$\overline{f_1}(s)$	$\overline{f_1}(2p\pi) > 0$	↘			0	↘			$\overline{f_1}[(2p + 1)\,\pi] < 0$
$f(s)$	$f(2p\,\pi)$	↗	0	↗	$f(s_{2p})$	↘	0	↘	$f[(2p + 1)\,\pi]$

$x_1 < 3 < \pi$, deci $f_{24}(\pi) = f_{21}\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ceea ce ne arată cu ajutorul lui (37_1) că $b_2 < \frac{1}{2}$. Tot așa $f_{21}\left(\frac{1}{3}\right) = f_{25}(\pi)$ unde $f_{25}(x) = -1 + \left(1 + \frac{10}{3}x\right)e^{-\frac{2}{3}x}$ așa că

$f'_{25}(x) = \frac{4}{9}(6 - 5x)\,e^{-\frac{2}{3}x}$. Or, $f_{25}\left(\frac{16}{5}\right) = e^{-\frac{32}{15}}\left(\frac{35}{3} - e^{\frac{32}{15}}\right) > 0$ deci avem în tabela 18, $\pi < \frac{16}{5} < x_2$ așa că $f_{21}\left(\frac{1}{3}\right) = f_{25}(\pi) > 0$, ceea ce împreună cu (37_1) ne dă $b_2 > \frac{1}{3}$.

Deci

$$\frac{1}{3} < b_2 < \frac{1}{2} \tag{43}$$

Tabela 17

x	0		$\frac{3}{5}$		x_1		∞
$f'_{24}(x)$	+		0		—		
$f_{24}(x)$	0	↗	$f_{24}\left(\frac{3}{5}\right)$	↘	0	↘	-1

Tabela 18

x	0		$\frac{6}{5}$		x_2		∞
$f'_{25}(x)$	+		0		—		
$f_{25}(x)$	0	↗	$f_{25}\left(\frac{6}{5}\right)$	↘	0	↘	-1

§ **3.** Se va încerca să se adune informațiile ce s-au putut căpăta în această notă asupra rădăcinilor τ_n ale funcției $f(s)$, completîndu-le cu o parte din informațiile căpătate în [2].

1° Dacă $b < 0$, $f(s)$ are o infinitate de rădăcini pozitive

$$s = \tau_n\,(n\,\pi < \tau_n < (n + 1)\,\pi)\ (1, \text{p. } 2),$$

avînd

$$\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)}\,(p = 1, 2, \ldots),\ \sigma_{2p+1} < \tau_{2p+1} < (2p + 2)\,\pi\,(p = 0, 1, \ldots), \tag{13}$$

unde $\sigma_p\,(p\,\pi < \sigma_p < (p + 1)\,\pi)$ sînt rădăcinile ecuației $e^{bs} = \cos s + b \sin s\,(p = 1, 2, \ldots)$ ((4_1) și (3)), iar $\sigma_p^{(2)}\,(p\,\pi < \sigma_p^{(2)} < (p + 1)\,\pi)$ rădăcinile ecuației $e^{bs} = \cos s + b \sin s + \frac{1 + b^2}{2}\,s \sin s$ ($(4''_1)$ și 3).

Dacă $1 \leqslant p < -\frac{1}{2} - \frac{1}{b\pi}$ (dacă există asemenea valori ale lui p), avem $\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)}$ (17) $\sigma_{2p}^{(3)}\,(2p\,\pi < \sigma_{2p}^{(3)} < (2p + 1)\,\pi)$, fiind rădăcinile ecuației

$$b \operatorname{tg}\frac{s}{2} = \operatorname{th}\frac{bs}{2}\ ((6_0) \text{ și } (6)), \text{ avînd } \sigma_{2p}^{(3)} < \sigma_{2p}^{(2)}\ (11).$$

Dacă $p > -\frac{1}{b\,\pi}$ avem sau $\sigma_{2p} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(3)}$, sau $\sigma_{2p}^{(4)} < \tau_{2p} < \sigma_{2p}^{(2)}\,(p = 1, 2, \ldots)$ (17), $\sigma_{2p}^{(4)}\,(2p\pi < \sigma_{2p}^{(4)} < (2p + 1)\,\pi)$ fiind rădăcinile ecuației

$$e^{bs} = \cos s - \frac{1}{b} \sin s \qquad ((14_2) \text{ și } 14_1).$$

2° Dacă $b = 0$, $f(s)$ are rădăcinile $s = 2n\,\pi$ și $s = \tau_{2n}$, $(2n\,\pi < \tau_{2n} < (2n + 1)\,\pi$, $n = 1, 2, \ldots)$ (1°, p. 2)

3° Dacă $b > 0$, $f(s) < 0$ pentru $0 < s \leqslant 2\pi$ (1_1)

Dacă a $b \geqslant 1$, $f(s) < 0$ pentru orice $s > 0$ (2°, p. 2).

Dacă a $b < 1$, intervalul $(0, 2\pi]$ în care $f(s) < 0$ nu se poate prelungi la dreapta (2°, p. 2).

Dacă $(2p + 1)\pi \leqslant s \leqslant (2p + 2)\pi$, $f(s) < 0$ $(p = 0, 1, \ldots)$. (35)

Dacă $b \geqslant b_2$, atunci $f(s) < 0$ pentru orice $s > 0$ (38), b_2 fiind rădăcina (cuprinsă între $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{2}$, cum arată (43)), a ecuației

$$e^{2\pi b} = 1 + \pi \frac{1 + b^2}{b}. \tag{37}$$

Dacă $b_1 \leqslant b < b_2$, atunci $f(s) < 0$ pentru orice $s \geqslant \sigma$. (39)

Aici b_1 este valoarea lui b pentru care cea mai mare dintre rădăcinile ecuației $e^{bs} = \dfrac{1 + 2bs + \dfrac{1 + b^2}{2} s^2}{\sqrt{1 + 2bs + (1 + b^2)s^2}}$ (18) este egală cu rădăcina cuprinsă între 2π și 3π a ecuației $s = (1 + bs)\operatorname{tg} s$ (29_2) (tabela 11, (4_1) și (3)). Avem $b_1 < 2 - \sqrt{3}$ (fig. 5 și tabela 10). Mai precis, $b_1 < \sqrt{\dfrac{x_0(1 - x_0)}{(1 + x_0)(2 + x_0)}} < 2 - \sqrt{3}$, x_0 fiind rădăcina pozitivă a ecuației $e^{2x} = \dfrac{1 + 2x}{1 - x^2}$ ((22) și (21)). Valoarea $\sigma = \sigma(b)$ se definește astfel: fie $f_{19}(b)$ rădăcina > 0 a ecuației în p: $e^{2bp\pi} = 1 + \dfrac{1 + b^2}{b} p\pi$ (tabela 14 și (34).

Atunci σ este cea mai mică valoare a lui s, mai mare sau egală cu $2\pi f_{19}(b)$, respectiv cu $2\pi(1 + [f_{19}(b)])$ după cum $f_{19}(b)$ este sau nu un număr întreg (35_1) pentru care $-1 + e^{bs}[2\cos s + (1 + b^2)s \sin s] - e^{2bs} \leqslant 0$, (40), (39), (5_1).

Dacă b este destul de mic, atunci $f(s)$ poate avea rădăcini pozitive ori cît de mari (41).

Dacă $f(s)$ are rădăcini într-un interval $(2p\pi, (2p + 1)\pi)$, atunci ele sînt neapărat în număr de două (42).

§ 4. Se poate vedea ușor că cea mai mare rădăcină a ecuației (18) care intervine în determinarea numărului σ din (39) este $\bar{s}_4(b)$ din tabela 11, fiindcă din acea tabelă și din tabela 10 se deduce că $\bar{s}_3(b)$ și $\bar{s}_4(b)$ există pentru $0 < b < b_0$, iar cu ajutorul lui (24′), (27_1), și (24_1) se poate construi tabelul de mai jos, din care se deduce că rădăcina (funcție de b) care pentru o valoare oarecare a lui b este mai mică decît cealaltă (funcție de b), rămîne mai mică decît a doua rădăcină pentru orice $0 < b < b_0$, așa că fiecare din cele două rădăcini are — teoretic — o expresie în b aceeași pentru toate valorile lui $b \in (0, b)$

b	0	b_0
$\bar{s}_3(b)$	$\nearrow$	$\bar{s}_2(b_0)$
$\bar{s}_4(b)$	$\infty \searrow$	$\bar{s}_2(b_0)$

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем сообщении даются дополнительные сведения о распределении корней трансцендентного уравнения (1), которое вводится для определения интервала максимальной длины, в котором общий интервал линейного и с постоянными коэффициентами дифференциального уравнения четвертого порядка является интерполирующим четвертого порядка (в случае, когда характеристический полином уравнения имеет два вещественных и два мнимых корня). Указываются интервалы, заключающие корни уравнения, (1) и верхняя их грань в том случае, когда она существует.

Полученные результаты вместе с некоторыми результатами из работы [2] приведены в § 3 настоящего сообщения.

SUR LE PROBLÈME PLURILOCAL POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES AUX COEFFICIENTS CONSTANTS

RÉSUMÉ

Cette Note apporte des informations complémentaires sur la distribution des racines de l'équation transcendante (1) qui intervient dans la détermination de l'intervalle de longueur maximum dans lequel l'intégrale générale d'une équation différentielle du 4e ordre, linéaire et aux coefficients constants, est interpolatrice du 4e ordre (au cas où le polynôme caractéristique de l'équation possède deux racines réelles et deux imaginaires). On indique les intervalles qui comprennent les racines de l'équation (1), ainsi q'une limite supérieure au cas où elle existe.

Les résultats obtenus — ainsi que quelques résultats du travail [2] — sont donnés dans le § 3 de cette Note.

BIBLIOGRAFIE

1. O. Aramă și D. Ripianu, *Asupra problemei polilocale pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți*, Studii și cercet. de mat. — Acad. R.P.R. Fil. Cluj, **8** (1957), nr. 1—2 și 3—4.
2. — *Asupra problemei polilocale cu noduri confundate pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți* (sub tipar).