

METODA LUI NEWTON ȘI REZOLVAREA
APROXIMATIVĂ A SISTEMELOR
DE ECUAȚII ALGEBRICE LINIARE

DE

JANKÓ BÉLA

Comunicare prezentată în ședința din 26 septembrie 1955 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

În lucrarea de față vom expune mai multe categorii de metode pe care le putem folosi la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare finite și la calcularea valorilor proprii.

Înainte de a intra în subiect, credem că este necesar să răspundem la următoarea întrebare: de ce se pun astfel de probleme atunci când sistemele de ecuații liniare (cu determinantul diferit de zero) se pot rezolva cu o metodă clasică bine cunoscută, anume cu regula lui Cramer?

Fără îndoială această metodă este importantă din punct de vedere teoretic, însă ea are neajunsul că nu corespunde cerințelor practice, în special când numărul n al ecuațiilor este mai mare decât zece. Astfel de sisteme de ecuații liniare se întâlnesc des în cele mai variate ramuri ale științelor. Reamintim numai ecuațiile normale de la metoda celor mai mici pătrate, metoda care se folosește la prelucrarea datelor experimentale în fizică, tehnică (în special în statică, tehnologie și electricitate), apoi în astronomie, geodezie și statistică; în afară de acestea putem aminti așa-zisele metode directe, ca de exemplu metoda lui Ritz, metoda lui Galinkin, metoda rețelelor etc., unde rezolvarea aproximativă a unei ecuații diferențiale sau a unei ecuații integrale se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare. În general, în aceste sisteme numărul n al ecuațiilor este mare; poate fi chiar mai mare decât 100 (s-au rezolvat sisteme și pentru $n = 2300$).

La rezolvarea unor astfel de sisteme în practică nu se poate folosi regula lui Cramer. Este suficient să considerăm un exemplu frapant, dat prima dată de Forsythe [1]. Să presupunem că avem un sistem numai cu 26 ecuații liniare, adică $n = 26$. Dacă am încerca să-l rezolvăm cu regula lui Cramer, ar trebui mai întâi să calculăm 27 de determinanți. Să notăm numărul înmulțirilor, am avea nevoie de $(n+1)! = 27!$ înmulțiri. Lucrând cu o mașină electronică ce ar executa circa 2600 înmulțiri pe secundă, ne-ar trebui aproximativ un timp de $2 \cdot 10^{17}$ ani numai pentru efectuarea înmulțirilor ce intervin la calcularea celor 27 determi-

nanți. Însă dacă lucrăm cu o metodă numerică, de exemplu cu metoda de eliminare a lui Gauss, atunci avem de efectuat vreo 6000 de înmulțiri, care se calculează cu mașina electronică într-un timp de 2--3 secunde.

La rezolvarea sistemelor de ecuații liniare se folosesc și metode de aproximații, la care soluția sistemului se obține ca limita unui șir de vectori. Aceste metode au avantajul că algoritmul lor de calcul este oarecum mai simplu. Calculele se pot efectua și fără mașini de calculat, astfel că aceste metode pot fi aplicate și de un calculator cu o calificare mai redusă (de exemplu metoda de relaxare).

La aceste metode se cere mai întâi o soluție aproximativă x^0 . În cazul că sistemul nostru de ecuații liniare provine dintr-o problemă practică, atunci x^0 se poate determina în mod empiric. În decursul aproximațiilor succesive, pentru a obține soluții aproximative mai bune la x^0 se adaugă noi și noi corecții.

Metodele sînt foarte utile, mai ales atunci cînd coeficienții diagonali ai sistemului sînt mai mari în valoare absolută decît coeficienții nediagonali. Astfel de sisteme provin mai ales din problemele de geodezie și statistică și intervin la rezolvarea numerică a anumitor tipuri de ecuații diferențiale ordinare sau la anumite ecuații cu derivate parțiale.

Neajunsul acestor metode îl constituie faptul că ele converg cîteodată foarte lent sau de foarte multe ori nici nu converg. Convergența acestor aproximații succesive depinde în mare măsură de elementele matricei sistemului, iar rapiditatea convergenței mai depinde și de alegerea favorabilă a aproximației inițiale x^0 . În ce privește precizia unei soluții aproximative, ea depinde de natura problemei din care provine, depinde de cerințele practice și de sensul în care se măsoară. Cu toate acestea, trebuie să recunoaștem că metodele de aproximații s-au dovedit aplicabile, în special în practica inginerescă.

Considerăm acum sistemul de ecuații liniare avînd coeficienții și termenii liberi reali

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 &= 0 \\ a_{21}x_1 + x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 &= 0 \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + x_n - b_n &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

sau, scriind sub forma matricială,

$$Ax - b = 0, \text{ unde } A = (a_{ij}), a_{ii} = 1, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Metodele de aproximație în rezolvarea sistemului $Ax - b = 0$ se prezintă sub forma generală

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - D(Ax^{(k)} - b)$$

unde pentru $D = E$, E fiind matricea unitate, obținem metoda iterațiilor obișnuite (metoda lui Geiringer), sau pentru

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

regăsim metoda lui Seidel, ș.a.m.d. În aceste cazuri matricea D depinde de k , de aceea se zice că aceste metode sînt staționare. În cazul contrar obținem metodele nestaționare, ca exemplu metoda cu diferențe minime [2], metoda pantei maxime [3].

În cele ce urmează vom da mai multe categorii de metode de tip nestaționar, generate de metoda lui Newton. Metoda lui Newton s-a aplicat mai întâi pentru ecuații reale cu o singură variabilă [5], apoi s-a generalizat și pentru sisteme de ecuații neliniare [6]. Aceste probleme au fost reluate și generalizate de L. V. Kantorovici [4].

Trecem acum la aplicarea metodei lui Newton în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. În acest scop considerăm sistemul (1) sub forma

$$\begin{aligned} x_1 + A_1 &= 0 \\ x_2 + A_2 &= 0 \\ \dots & \dots \\ x_n + A_n &= 0 \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_i' a_{1i}x_i - b_1, \quad i \neq 1 \\ A_2 &= \sum_i' a_{2i}x_i - b_2, \quad i \neq 2 \\ \dots & \dots \\ A_n &= \sum_i' a_{ni}x_i - b_n, \quad i \neq n. \end{aligned}$$

Construim sistemul neliniar

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_1; A_1) &\equiv \varphi(x_1)(x_1 + A_1) = 0 \\ f^{(2)}(x_2; A_2) &\equiv \varphi(x_2)(x_2 + A_2) = 0 \\ \dots & \dots \\ f^{(n)}(x_n; A_n) &\equiv \varphi(x_n)(x_n + A_n) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

echivalent cu (1), unde presupunem că $\varphi(x_i)$ este o funcție de formă simplă ce nu are rădăcini reale. Metoda lui Newton se prezintă sub forma următoare:

$$\xi_{k+1} = \xi_k - [P'(\xi_k)]^{-1} P(\xi_k) \quad (3)$$

$\xi_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ fiind aproximația de ordinul k ; operația neliniară are următoarea expresie:

$$P(\xi_k) \equiv \begin{pmatrix} f_k^{(1)} \\ \vdots \\ f_k^{(n)} \end{pmatrix};$$

Indicele k arată că în funcțiile $f^{(i)}(x_i; A_i)$ de mai sus am înlocuit aproximația $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$; $P'(\xi_k)$ este derivata în sensul lui Fréchet a operației P , avînd forma

$$P'(\xi_k) \equiv \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1}\right)_k & \cdots & \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_n}\right)_k \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial f^{(n)}}{\partial x_1}\right)_k & \cdots & \left(\frac{\partial f^{(n)}}{\partial x_n}\right)_k \end{pmatrix} \quad (4)$$

unde indicele k arată, ca și mai înainte, că derivata operației P s-a luat pentru aproximația

$$x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}.$$

Privind sistemele (1) și (2) și formula de aproximație (3), putem face anumite observații. În primul rând se observă că metoda lui Newton nu poate fi aplicată direct pentru sistemul (1), deoarece în acest caz am obține matricea $P'(\xi_k) = (a_{ij})$ (independent de k) și am regăsi însuși sistemul (1); iar dacă am aplica metoda lui Newton pentru sistemul (2), atunci ar trebui să inversăm matricea din formula (4) pentru fiecare valoare a lui k ($k = 0, 1, \dots$). Trebuie accentuat însă faptul că în practica ingierească (considerând cazul $n > 10$) inversarea unei singure matrici reprezintă dificultăți considerabile din punctul de vedere al efectuării operațiilor ce intervin în aceste calcule [11].

Pentru a putea învinge această dificultate, în loc de formula (3) vom folosi metoda modificată a lui Newton

$$X_{k+1} = X_k - [P'(X_0)]^{-1} P(X_k) \quad (5)$$

unde $P'(X_0)$ rămâne fix în decursul aproximațiilor. Însă aici se mai cere inversarea matricii $P'(X_0)$. Această dificultate o putem înlătura în mai multe moduri. Ideea pe care ne bazăm în cele ce urmează este: să se transforme sistemul (2) într-un alt sistem neliniar, echivalent cu el, în așa fel ca $P'(X_0)$ să fie o matrice de formă simplă, de exemplu de formă diagonală, triunghiulară, cuasi-diagonală etc., a cărei inversă o putem calcula repede, fără multe operații.

1. Reducerea matricii $P'(X_0)$ la o matrice diagonală

Pentru a putea realiza forma diagonală a matricii $P'(X_0)$, procedăm în felul următor: transformăm sistemul (2) în sistemul

$$P^{(i)}(x_i; A_i) \equiv \Phi(A_i; C_i) f^{(i)}(x_i; A_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

unde $\Phi(A_i; C_i)$ este o funcție de forma simplă, care nu are rădăcini reale finite, de exemplu $e^{-C_i A_i}$ sau $[1 + C_i(A_i - A_i^0)]^2 + 1$ etc., iar coeficientul C_i se determină din condiția ca $\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial x_i}\right)_0 = 0$, pentru $i \neq j$. Acest lucru este echivalent cu condiția

$$\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial A_i}\right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Notînd

$$P(X) \equiv \begin{pmatrix} P^{(1)}(x_1; A_1) \\ \vdots \\ P^{(n)}(x_n; A_n) \end{pmatrix} \text{ obținem } P'(X_0) \equiv \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x_1}\right)_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial P^{(2)}}{\partial x_2}\right)_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\partial P^{(n)}}{\partial x_n}\right)_0 \end{pmatrix}$$

Astfel formula de aproximație (5) se poate pune sub formă explicită; scriind pe componente, avem

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{P^{(i)}(x_i^{(k)}; A_i^{(k)})}{\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial x_i}\right)_0} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

În ce privește convergența metodelor de această categorie, ne putem olosi de o teoremă a lui Kantorovici [4], pe care o formulăm astfel:

TEOREMA 1: — Fie $P(X)$ o operație derivabilă de două ori, care transformă spațiul \mathcal{X} în \mathcal{Y} (\mathcal{X} și \mathcal{Y} fiind spații liniare normate) și care satisface următoarele ipoteze:

1°. Pentru elementul X_0 , al aproximației inițiale, operatorul $P'(X_0)$ ce transformă spațiul \mathcal{X} în \mathcal{Y} admite inversa $\Gamma_0 = [P'(X_0)]^{-1}$ și este cunoscută evaluarea normei ei $\|\Gamma_0\| \leq B_0$.

2°. Elementul X_0 satisface aproximativ sistemul (6) și se cunoaște evaluarea expresiei $\Gamma_0 P(X_0)$

$$\|\Gamma_0 P(X_0)\| \leq \eta_0$$

3°. Derivata a doua $P''(X)$ este mărginită în domeniul $\|X - X_0\| \leq 2\eta_0$:

$$\|P''(X)\| \leq K$$

4°. Constantele B_0, η_0, K satisfac inegalitatea

$$h_0 = B_0 \eta_0 K < \frac{1}{2}.$$

Atunci sistemul (1) are soluția X^* și aproximațiile succesive X_k definite de formulele (7) converg spre X^* , iar ordinea convergenței este cea a unei progresii geometrice

$$\|X^* - X_k\| \leq q^{k-1} \|X^* - X_1\|, \quad q = 1 - \sqrt{1 - 2h_0} < 1.$$

Observații. I. Aplicarea condiției 4° (adică $h_0 < \frac{1}{2}$), cere calcule laborioase. De aceea credem că este necesar să menționăm că în cazul cînd

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial x_i}\right)_0}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ și } \frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x_j \partial x_l} \quad (i, j, l = 1, 2, \dots, n)$$

sînt funcții mărginite (de ex. $\varphi \equiv 1$ și $\Phi_i = e^{-C_i A_i}$) și în afară de aceasta în decursul aproximațiilor succesive constatăm că corecțiile

$$\left| \frac{P^{(i)}(x_i^{(k)}; A_i^{(k)})}{\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial x_i}\right)_0} \right|$$

se micșorează din ce în ce mai mult, atunci de obicei condiția 4^o va fi îndeplinită.

II. Remarcăm că funcțiile $\varphi(x_i)$ se pot alege astfel ca ele să contribuie la îmbunătățirea convergenței. De data aceasta însă nu ne vom ocupa de această chestiune.

III. Se observă că convergența procedurii (7) depinde și de ordinea în care se iau ecuațiile. Se pune și problema influenței erorilor de rotunjire asupra convergenței [12], [15].

IV. Privind structura formulelor (7) se observă că la determinarea componentelor $x_i^{(k+1)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) se folosesc numai componentele $x_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$); aici putem indica un procedeu puțin modificat, anume folosind formulele

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{\varphi(x_i^{(k)})\Phi(A_i^{(k,k+1)}; C_i)(x_i^{(k)} + A_i^{(k,k+1)})}{\left(\frac{\partial P^{(i)}}{\partial x_i}\right)_0} \quad (i = 1, 2, \dots, n), (7')$$

unde am notat

$$A_i^{(k,k+1)} = a_{i1} x_1^{(k+1)} + a_{i2} x_2^{(k+1)} + \dots + a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} + a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} + \dots + a_{in} x_n^{(k)} - b_i.$$

Aici, pentru calcularea componentei $x_i^{(k+1)}$ am folosit

$$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)},$$

oarecum analog ca și la metoda lui Seidel.

V. Procedeu (7) poate fi adaptat și pentru calcularea valorilor proprii și vectorilor proprii. Într-adevăr, ținînd seama de faptul că dacă λ este o valoare proprie a matricei simetrice A , iar $x = (x_1, \dots, x_n)'$ elementul propriu corespunzător, atunci x_1, \dots, x_n, λ se pot considera ca soluția următorului sistem

$$\begin{aligned} (x, x) &= 1 \\ Ax - \lambda x &= 0 \end{aligned}$$

sau mai detaliat

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 &= 0 \\ (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0. \end{aligned}$$

Dacă punem acest sistem de exemplu sub forma

$$\begin{aligned} x_1^2 + A_1 &= 0 \\ a_{12}x_2 + A_2 &= 0 \\ \dots & \\ a_{n-1,n}x_n + A_n &= 0 \\ \lambda + A_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

unde presupunem $x_n \neq 0$, $a_{i-1,i} \neq 0$ ($i = 2, \dots, n$), atunci se pot construi formule analoage cu (7). Pentru convergența și precizia soluției se folosește de asemenea Teorema 1.

VI. Menționăm că nu e necesar ca elementele matricei A din sistemul (1) să fie constante. În cazul cînd

$$a_{ii} = a_{ii}(x_i) \quad \text{și} \quad a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

sau în general cînd sistemul neliniar este de forma

$$f_i(x_i) + g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

atunci formulele (7) se pot generaliza și pentru acest caz.

VII. În mod analog în anumite condiții procedeu (7) poate fi aplicat la rezolvarea sistemelor infinite¹⁾. Teorema 1 poate servi nu numai pentru obținerea unor rezultate numerice, dar și la studiul teoretic al existenței și unicității soluției.

2. Reducerea matricei $P'(X_0)$ la forme triunghiulare și la alte matrice de formă simplă

Trecem la transformarea sistemului (1) într-un sistem echivalent, în așa fel ca matricea $P'(X_0)$ din formula (5) să fie de formă triunghiulară. În acest scop transcriem sistemul (1) dîndu-i forma

$$\begin{aligned} x_1 + B_1 &= 0 \\ a_{21}x_1 + x_2 + B_2 &= 0 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + x_n + B_n &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

unde

$$B_i = \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j - b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \quad B_n = -b_n.$$

Construim apoi sistemul neliniar, echivalent cu (8)

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x_1; B_1) &\equiv \psi(x_1)(x_1 + B_1) = 0 \\ F^{(2)}(x_1, x_2; B_2) &\equiv \psi(x_2)(a_{21}x_1 + x_2 + B_2) = 0 \\ \dots & \\ F^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; B_n) &\equiv \psi(x_n)(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + x_n + B_n) = 0, \end{aligned}$$

unde am presupus că $\psi(x)$ este de formă simplă și nu are rădăcini reale.

¹⁾ Rezultatele referitoare la această problemă au fost prezentate la al IV-lea Congres al matematicienilor români din 1956 și sînt în curs de publicare.

Transformăm acest sistem într-unul echivalent cu (8), de forma $\phi^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_i; B_i) = \Psi(B_i; k_i) F^{(i)}(x_1, \dots, x_i; B_i) = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$), unde se presupune de asemenea că funcția $\Psi(B_i; k_i)$ are o formă simplă și nu are rădăcini reale finite, de ex. funcția $e^{-k_i B_i}$ sau $[1 + k_i(B_i - B_i^0)]^2 + 1$ etc.; coeficientul k_i se determină din condiția ca $\left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial x_j}\right)_0 = 0$ pentru $j = i + 1, \dots, n$. Aceste condiții sînt echivalente cu

$$\left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial B_i}\right)_0 = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Notînd

$$P(X) = \begin{pmatrix} \phi^{(1)}(x_1; B_1) \\ \vdots \\ \phi^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; B_n) \end{pmatrix} \text{ obținem } P'(X_0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x_1}\right)_0 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x_2}\right)_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x_n}\right)_0 \end{pmatrix}$$

În cazul de față formula (5) se aplică sub forma

$$P(X_0) X_{k+1} = P'(X_0) X_k - P(X_k). \quad (9)$$

Se observă că matricea $P'(X_0)$ o putem scrie astfel:

$$P'(X_0) = \Delta(\phi_{ij}),$$

unde elementele matricei (ϕ_{ij}) sînt

$$\phi_{ii} = \psi'(x_i^0)(a_{i1}x_1^0 + \dots + x_i^0 + B_i^0) + \psi(x_i^0) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

$$\phi_{ij} = a_{ij}\psi(x_i^0) \quad \text{pentru } j < i,$$

ar $\Delta = (\delta_{ii})$ este o matrice diagonală

$$\delta_{ii} = \Psi(B_i^0; k_i). \quad (11)$$

Sistemul (9) devine

$$(\phi_{ij}) X_{k+1} = (\phi_{ij}) X_k - \Delta^{-1} P(X_k) \quad (12)$$

Calculînd pentru X_k componentele lui $P(X_k)$ și determinînd numeric matricele (ϕ_{ij}) și Δ după formulele (10) și (11), vom putea scrie ecuația (12) pe componente. Calcularea aproximației X_{k+1} se face în mod analog, ca și la metoda lui S e i d e l.

Observații. 1. Pentru a micșora numărul operațiilor elementare ce intervin în aceste calcule, dăm matricii $P'(X_0)$ o formă mai simplă. În acest scop scriem sistemul (1) astfel

$$a_{i,i-1}x_{i-1} + x_i + \beta_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

și construim sistemul neliniar echivalent cu el

$$\bar{\phi}^{(i)}(x_{i-1}, x_i; \beta_i) \equiv \bar{\Psi}(x_i) \bar{\Psi}'(\beta_i; k_i) (a_{i,i-1}x_{i-1} + x_i + \beta_i) = 0.$$

Impunînd condiția $\left(\frac{\partial \bar{\phi}^{(i)}}{\partial \beta_i}\right)_0 = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) obținem, $P'(X_0) = \bar{\Delta}(\bar{\phi}_{ij})$, unde $\bar{\delta}_{ij} = \bar{\Psi}'(\beta_i^0; k_i)$ și matricea

$$(\bar{\phi}_{ij}) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{\phi}_{21} & \bar{\phi}_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\phi}_{32} & \bar{\phi}_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{\phi}_{n,n-1} & \bar{\phi}_{nn} \end{pmatrix}$$

Bine înțeles, în afară de matricile simple considerate mai sus se pot folosi și alte tipuri de matrici, ale căror inverse se calculează ușor, ca de ex. matricea

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_{11} & \bar{\phi}_{12} & 0 & 0 & \dots \\ \bar{\phi}_{21} & \bar{\phi}_{22} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \bar{\phi}_{33} & \bar{\phi}_{34} & \dots \\ 0 & 0 & \bar{\phi}_{43} & \bar{\phi}_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

2. Se pot face observații anologice ca și la § 1. În ceea ce privește convergența metodelor care aparțin acestei categorii, putem să ne folosim de asemenea de teorema lui K a n t o r o v i c i, enunțată în § 1.

3. Noi categorii de metode

În paragrafele precedente am folosit metoda modificată a lui N e w t o n. Folosind acum formula de aproximație (3), putem obține noi formule de rezolvare a sistemelor ca și în § 1. Astfel, folosind funcțiile $\Psi_i(A_i; C_i^{(k)})$, se poate face — la fiecare aproximație ($k = 0, 1, \dots$) — ca derivata în sensul lui F r é c h e t să fie o matrice de formă diagonală

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{f_k^{(i)}}{\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_i}\right)_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

unde s-a notat

$$f^{(i)}(x_i; A_i) \equiv \varphi(x_i)(x_i + A_i),$$

$\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_i}\right)_k$ după cum se vede depinde de soluția aproximativă de ordinul k : $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$. Se observă că formulele (7) pot fi considerate ca un caz particular al formulilor de mai sus. Putem remarca de asemenea că pentru $\varphi(x_i) = \text{const.}$ regăsim metoda iterațiilor obișnuite. În ce privește convergența, în general nu ne putem folosi de teorema respectivă a lui K a n t o r o v i c i [4], deoarece derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcțiilor

$\varphi(x_i) \Psi_i(A_i; C_i^{(k)})(x_i + A_i)$ (pentru orice k) s-ar putea să nu fie mărginite. Însă faptul că soluția aproximativă $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ se apropie de soluția exactă se verifică prin calculele efective, anume dacă se constată că corecțiile

$$\frac{f_k^{(i)}}{\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_i}\right)_k}$$

devin din ce în ce mai mici²⁾.

Menționăm totodată că funcția $\varphi(x_i)$ poate contribui la rapiditatea convergenței, iar în loc de produsul $\varphi(x_i) \Phi(A_i; C_i)$ putem lua o funcție $Q(x_i, A_i; C_i)$, de exemplu de forma $e^{\sum c_i x_i}$.

În sfârșit facem observația că, folosind tot formula (3) și procedînd analog ca la § 2, se pot da formule asemănătoare cu (12) dar în acest caz matricele Δ și (ϕ_{ij}) depind de k . Din această categorie face parte și metoda cunoscută a lui Seidel.

În legătură cu convergența și evaluarea erorii, putem spune același lucru ca și în cazul formulilor (13).

Ca aplicație, considerăm [14] următorul exemplu simplu (pentru a putea urmări ușor calculele, am luat numai $n=4$):

$$\begin{aligned} 0,78 x_1 - 0,02 x_2 - 0,12 x_3 - 0,14 x_4 &= 0,76 \\ -0,02 x_1 + 0,86 x_2 - 0,04 x_3 + 0,06 x_4 &= 0,08 \\ -0,12 x_1 - 0,04 x_2 + 0,72 x_3 - 0,08 x_4 &= 1,12 \\ -0,14 x_1 + 0,06 x_2 - 0,08 x_3 + 0,74 x_4 &= 0,68 \end{aligned} \quad (14)$$

Aplicăm o formulă de aproximație din categoria formulilor (13)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{(x_i^{(k)^2} + 1) \left(x_i^{(k)} + \frac{A_i^{(k)}}{a_{ii}} \right)}{3 x_i^{(k)^2} + 2 \frac{A_i^{(k)}}{a_{ii}} x_i^{(k)} + 1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

unde am luat $\varphi(x_i) = x_i^2 + 1$. Iuăm pentru aproximația inițială

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = 0.$$

După cum se observă în tabelul de mai jos, calculele au fost făcute simultan cu metoda lui Geiringer (metoda iterațiilor obișnuite), cu metoda lui Seidel și cu a lui Newton (dată sub forma (15)). Făcînd aproximațiile pentru $k=1, 2, 3, 4$ și comparînd cu soluția exactă a sistemului (14)

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,534965 \\ x_2 &= 0,112010 \\ x_3 &= 1,975156 \\ x_4 &= 1,412955 \end{aligned}$$

²⁾ În ce privește evaluarea erorii a se consulta lucrarea citată mai înainte, prezentată de noi la Congresul matematicienilor romîni.

Cînd $k=4$ găsim eroarea maximă 0,1 pentru primele două metode, iar pentru metoda de aproximație (15) obținem eroarea maximă 0,01.

Pentru $k=1$, metoda	Geiringer	0,76	0,08	1,12	0,68
	Seidel	0,76	0,08	1,12	0,68
	Newton	0,974359	0,093023	1,555556	0,918919
$k=2$	Geiringer	1,1584	0,1104	1,5824	1,0480
	Seidel	1,1584	0,1184	1,6317	1,1424
	Newton	1,659507	0,124101	1,912880	1,444566
$k=3$	Geiringer	1,3537	0,1190	1,7903	1,2346
	Seidel	1,3730	0,1208	1,8379	1,3090
	Newton	1,544201	0,119809	2,006181	1,429821
$k=4$	Geiringer	1,4479	0,1213	1,8873	1,3266
	Seidel	1,4683	0,1213	1,9204	1,3723
	Newton	1,542711	0,122492	1,979048	1,418360

Folosind în loc de metoda (15) formulele analoage cu (7)

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{(x_i^{(k)^2} + 1) (x_i^{(k)} + A_i^{(k, k+1)})}{3 x_i^{(k)^2} + 2 A_i^{(k, k+1)} x_i^{(k)} + 1}$$

unde

$$A_i^{(k, k+1)} = (a_{i1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{i, i-1} x_{i-1}^{(k+1)} + a_{i, i+1} x_{i+1}^{(k)} + \dots + a_{in} x_n^{(k)} - b_i) / a_{ii}$$

și comparînd cu exemplul de mai sus, obținem aceeași precizie ca și mai înainte:

$k=0$	0	0	0	0
$k=1$	0,974359	0,115638	1,724376	1,280296
$k=2$	1,966262	0,129676	2,154782	1,581443
$k=3$	1,679504	0,121986	2,030909	1,461029
$k=4$	1,564990	0,121947	1,987077	1,421447
$k=5$	1,538951	0,122064	1,976852	1,413941

Academia R.P.R. — Filiala Cluj.
Institutul de calcul

BIBLIOGRAFIE

1. G. E. Forsythe, *Solving linear algebraic equations can be interesting*. Bull. Amer. Math. Soc., 1953, t. LIX, nr. 4, p. 299—329.
2. M. A. Krasnoselski și M. G. Krain, *Iteraționii proțess s minimalnîmi nevezkami*. Mat. Sb., 1952, t. XXXI (73); 2, p. 315—334.
3. L. V. Kantorovici, *Funkționalnîi analiz i prikladnaia matematika*. U.M.N., 1948, t. III, nr. 6, p. 153.
4. L. V. Kantorovici, *O metoda Niutona*. Tr. Inst. Steklova, 1949, t. XXVIII, p. 127.
5. A. Cauchy, *Oeuvres*, t. II, cap. IV, p. 573.
6. A. Willers, *Methoden der praktischen Analysis*, p. 128.
7. A. Ostrowski, *Comm. Math. Helv.*, t. IX, 1937.

