REZULTATE COMPARATIVE ASUPRA UNOR PROBLEME LA LIMITĂ POLILOCALE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE

DE

OLEG ARAMĂ

Lucrare prezentată la Colocviul de teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale, organizat de Academia R.P.R. şi de Soc. Ştiinţelor Matematice şi Fizice din R.P.R. între 21 — 26 sept. 1959, Bucureşti.

Fie dată o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0. \tag{1}$$

În memoriul [24], Ch. J. de la Vallée Poussin a stabilit următoarea teoremă:

Presupunînd că funcţiile $a_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *sînt continue într-un interval* $[a, b]$, *fie* $L_i = \max\limits_{x \in [a,b]} |a_i(x)|$ *şi fie* h_0 *rădăcina pozitivă a ecuaţiei*

$$L_n \frac{h^n}{n!} + L_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + L_1 \frac{h}{1} - 1 = 0.$$

Atunci oricum s-ar alege n *puncte* $M_i(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *din planul* xOy, *astfel încît* $a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b$, $x_n - x_1 \leqq h_0$, *pentru alegerea făcută, există o curbă integrală a ecuaţiei* (1) *şi una singură, care să treacă prin punctele* $M_i(x_i, y_i)$.[1)]

După cum se specifică în memoriul citat, această teoremă se extinde şi la cazul cînd unele dintre nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt confundate pe grupe, precum urmează:

Fie dat un sistem de m *numere* $p_1, p_2, \ldots, p_m$, *satisfăcînd condiţia* $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$. *Dacă coeficienţii ecuaţiei diferenţiale* (1) *sînt*

---

1) O alternativă a acestei teoreme a fost stabilită de S. Zaidman în [29].

funcții continue în intervalul $[a, b]$, *atunci oricum s-ar alege m noduri* $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ *din intervalul* $[a, b]$, *astfel ca* $x_m - x_1 \leqq h_0$ *și oricum s-ar alege sistemele de numere reale* $\{y_1^{(0)}, \ldots, y_1^{(p_1-1)}\}$, $\{y_2^{(0)}, \ldots, y_2^{(p_2-1)}\}, \ldots$ $\ldots, \{y_m^{(0)}, \ldots, y_m^{(p_m-1)}\}$, *pentru o astfel de alegere, ecuația diferențială* (1) *admite o integrală și una singură* $y(x)$, *satisfăcînd condițiile*:

$$y(x_k) = y_k, \quad y'(x_k) = y_k^{(1)}, \ldots, y^{(p_k-1)}(x_k) = y_k^{(p_k-1)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \quad (2)$$

În cele ce urmează, vom nota cu $H_{p_1, p_2, \ldots, p_m}$ marginea superioară a numerelor pozitive h, satisfăcînd inegalitatea $h \leqq b - a$ și care au proprietatea că oricum s-ar alege m noduri $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ din intervalul $[a, a + h]$ și oricum s-ar alege sistemele de numere reale $\{y_k^{(0)}, \ldots, y_k^{(p_k-1)}\}$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$, pentru o astfel de alegere, să existe o integrală și una singură a ecuației diferențiale (1), care să satisfacă condițiile (2). Teorema enunțata anterior arată că mulțimea acestor numere h nu este vidă. Se constată cu ușurință că familia integralelor ecuației diferențiale (1) posedă proprietatea de interpolație (2) în intervalul semiînchis $[a, a + H_{p_1, p_2, \ldots, p_m})$, și de asemenea că acest interval are un caracter maximal în $[a, b]$.

În continuare să considerăm toate sistemele posibile de numere naturale $p_1, p_2, \ldots, p_m$ satisfăcînd condiția $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$. Fiecărui astfel de sistem îi va corespunde pentru o aceeași ecuație diferențială, cîte un număr $H_{p_1, p_2, \ldots, p_m}$. În cadrul unei ședințe de lucru a Secției I-a a Institutului de calcul din Cluj, prof. T. Popoviciu a pus problema elaborării unui studiu comparativ al numerelor $H_{p_1, p_2, \ldots, p_m}$ pentru o aceeași ecuație diferențială. Această problemă a fost pusă în scopul obținerii de condiții necesare și suficiente, privind coeficienții ecuației diferențiale — condiții care să asigure existența și unicitatea soluției problemei la limită polilocale cu noduri simple, într-un interval dat.

În cadrul acestei probleme se situează cercetarea de față. Înainte de a trece la expunerea ei, ținem să amintim faptul că teoremele de existență și de unicitate a soluțiilor problemelor la limită polilocale la ecuații diferențiale lineare, au format obiectul multor lucrări, dintre care menționăm în bibliografia de la sfîrșit doar acelea care au o legătură mai strînsă cu cercetarea de față.

Vom presupune întîi că ecuația diferențială dată (1) are coeficienții $a_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ continui într-un interval deschis (a, b). Vom nota cu Y_n mulțimea integralelor acestei ecuații în intervalul (a, b). Începem prin a da cîteva definiții, care vor interveni curent în expunerea ce va urma.

D e f i n i ț i a 1. *Se spune că familia* Y_n *posedă proprietatea* $I_n(a, b)$ (adică este interpolatoare de ordinul n pe noduri simple în intervalul (a, b)), *dacă oricare ar fi n noduri distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *situate in intervalul* (a, b), *și oricare ar fi valorile reale* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *există o integrală și una singură* $y(x) \in Y_n$, *care să satisfacă condițiile* $y(x_i) = y_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

D e f i n i ț i a 2. *Fie dat un sistem de m numere naturale* $p_1, p_2, \ldots, p_m$, *satisfăcînd condiția* $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$. *Spunem că familia* Y_n *posedă proprietatea* $I_{p_1, p_2, \ldots, p_m}(a, b)$, *dacă oricare ar fi m noduri distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *din intervalul* (a, b) *și oricare ar fi sistemele de numere reale*

$$\{y_1^{(0)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_1^{(p_1-1)}\}, \{y_2^{(0)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_2^{(p_2-1)}\}, \ldots\ldots, \{y_m^{(0)}, y_m^{(1)}, \ldots, y_m^{(p_m-1)}\},$$

există o integrală și una singură $y(x) \in Y_n$, *care să satisfacă condițiile*

$$y(x_k) = y_k^{(0)}, \ y'(x_k) = y_k^{(1)}, \ldots, y^{(p_k-1)}(x_k) = y_k^{(p_k-2)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

D e f i n i ț i a 3. *Spunem că familia* Y_n *posedă proprietatea* $I_n^*(a, b)$, *dacă acea familie posedă proprietățile* $I_{p_1, p_2, \ldots, p_m}(a, b)$, *oricare ar fi sistemul de numere naturale* $p_1, p_2, \ldots, p_m$, *satisfăcînd condiția* $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$.

Observație. În notațiile adoptate, proprietățile $I_n(a, b)$ și $I_{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ ori}}}(a, b)$, coincid.

Vom stabili în cele ce urmează, următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *Dacă familia* Y_n *are proprietatea* $I_n(a, b)$, *atunci ea are și proprietatea* $I_n^*(a, b)$.

Pentru a ușura expunerea demonstrației acestei teoreme, vom enunța în prealabil cîteva leme.

L e m a 1. *Fie date m numere naturale*, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *satisfăcînd egalitatea* $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$. *Condiția necesară și suficientă ca familia* Y_n *să aibă proprietatea* $I_{p_1, p_2, \ldots, p_m}(a, b)$, *este ca ecuația diferențială* (1) *să nu admită nici o integrală neidentic nulă, care să aibă în intervalul* (a, b), *m rădăcini distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *avînd ordinele de multiplicitate*[2] *mai mari sau cel puțin egale respectiv cu numerele* $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Demonstrația acestei leme este imediată. Din această lemă rezultă, ca și cazuri particulare, lemele 2 și 3 enunțate mai jos:

L e m a 2. *Condiția necesară și suficientă ca familia* Y_n *să aibă proprietatea* $I_n(a, b)$, *este ca ecuația diferențială* (1) *să nu admită nici o integrală neidentic nulă, care să se anuleze pentru n valori distincte din intervalul* (a, b).

L e m a 3. *Condiția necesară și suficientă ca familia* Y_n *să aibă proprietatea* $I_n^*(a, b)$, *este ca ecuația diferențială* (1) *să nu admită nici o integrală neidentic nulă, care să aibă n rădăcini în intervalul* (a, b), *fiecare rădăcină fiind socotită de atîtea ori cît este ordinul ei de multiplicitate.*

[2]) Prin ordin de multiplicitate al unei rădăcini x_0 a unei funcții $y(x)$ înțelegem ordinul strict de multiplicitate; astfel, x_0 este o rădăcină multiplă de ordinul k pentru funcția $y(x)$, dacă au loc relațiile $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(k-1)}(x_0) = 0$, $y^{(k)}(x_0) \neq 0$.

L e m a 4. *Dacă familia Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$, atunci orice integrală neidentic nulă $y(x) \epsilon Y_n$, care se anulează pentru $n - 1$ valori distincte din intervalul (a, b), are în acest interval toate rădăcinile simple (adică de ordinul 1).*

Demonstrație. Proprietatea formulată în această lemă, este evidentă pentru $n = 2$. Vom considera deci $n \geqq 3$. Presupunem că Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$. Fie $y_0(x)$ o integrală neidentic nulă a ecuației (1), care are $n - 1$ rădăcini distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ în intervalul (a, b). Observăm de la început că integrala $y_0(x)$ nu poate avea alte rădăcini distincte în intervalul (a, b), întrucît în caz contrar s-ar contrazice proprietatea $I_n(a, b)$ a familiei Y_n. Vom arăta întîi că nici una dintre aceste rădăcini nu poate avea un ordin par de multiplicitate. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că printre cele $n - 1$ rădăcini ale integralei $y_0(x)$, s-ar afla o rădăcină x_i, avînd un ordin par de multiplicitate, adică

$$y_0(x_i) = y_0'(x_i) = \ldots = y_0^{(2k-1)}(x_i) = 0; \; y^{(2k)}(x_i) \neq 0, \quad (k \geqq 1).$$

Întrucît rădăcinile unei integrale oarecari, neidentic nule a ecuației (1) sînt puncte izolate, rezultă că va exista o vecinătate suficient de mică $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ a punctului x_i, în care funcția $y_0(x)$ va păstra un semn constant, cu excepția punctului $x = x_i$, în care ea se anulează. Pentru fixarea ideilor, să presupunem că $y_0(x)$ este pozitivă în intervalele $(x_i - \delta, x_i)$ și $(x_i, x_i + \delta)$ (fig. 1). Fie $\eta(x)$ o integrală a ecuației (1), care se anulează pentru toate rădăcinile integralei $y_0(x)$ cu excepția punctului $x = x_i$, în care ia valoarea 1 :

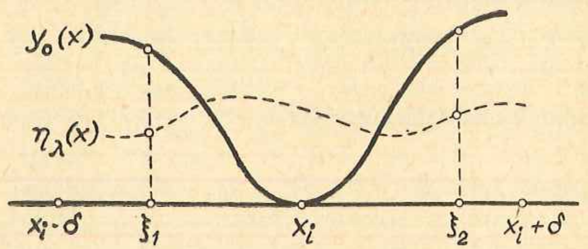

Fig. 1

$$\begin{aligned} &\eta(x_1) = \eta(x_2) = \ldots = \eta(x_{i-1}) = 0 \\ &\eta(x_i) = 1 \\ &\eta(x_{i+1}) = \eta(x_{i+2}) = \ldots = \eta(x_{n-1}) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

O astfel de integrală $\eta(x)$, care să satisfacă condițiile (3), există, întrucît prin ipoteză familia Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$. Fie apoi ξ_1 și ξ_2 două numere oarecari, satisfăcînd respectiv inegalitățile $x_i - \delta < \xi_1 < x_i < \xi_2 < x_i + \delta$. Evident că vor avea loc inegalitățile $y_0(\xi_1) > 0$ și $y_0(\xi_2) > 0$. Considerăm funcția $\eta_\lambda(x) = \lambda\eta(x)$, unde λ este un factor pozitiv, suficient de mic, ca să aibă loc simultan inegalitățile

$$\eta_\lambda(\xi_1) < y_0(\xi_1) ; \quad \eta_\lambda(\xi_2) < y_0(\xi_2). \tag{4}$$

Cum $\eta(x_i) = 1$, rezultă că $\eta_\lambda(x_i) = \lambda > 0$, și cum $y_0(x_i) = 0$, rezultă inegalitatea $\eta_\lambda(x_i) > y_0(x_i)$. Din această inegalitate, precum și din (4), rezultă că în intervalul $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ curbele de ecuații $y = y_0(x)$ și $y = \eta_\lambda(x)$ se intersectează în cel puțin două puncte distincte. Rezultă de aici și din (3) că integrala $y^*(x) = \eta_\lambda(x) - y_0(x)$ se va anula în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}$ și încă în cel puțin două puncte distincte, situate în intervalul $(x_i - \delta, x_i + \delta)$. Deci $y^*(x)$ se anulează în cel puțin n puncte distincte din intervalul (a, b). Mai observăm că integrala $y^*(x)$ nu poate fi identic nulă în (a, b), întrucît $y^*(x_i) = \lambda > 0$. Deoarece prin ipoteză, familia Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$, rezultă că ecuația diferențială (1) nu poate să admită nici o integrală neidentic nulă, care să se anuleze în n puncte distincte din intervalul (a, b). Am ajuns astfel la o contradicție, care provine din ipoteza absurdă că integrala neidentic nulă $y_0(x)$ ar avea printre cele $n - 1$ rădăcini distincte ale sale din (a, b), cel puțin o rădăcină de ordin par. Rezultă deci că dacă familia Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$, atunci orice integrală neidentic nulă $y_0(x)$, care se anulează pentru $n - 1$ valori distincte din intervalul (a, b), are toate rădăcinile din acest interval impare.

Vom arăta acum mai mult, că toate rădăcinile din intervalul (a, b) ale unei astfel de integrale $y_0(x)$ sînt simple (adică de ordinul 1). Într-adevăr, să presupunem prin absurd că o integrală neidentic nulă $y_0(x) \epsilon Y_n$, care are $n - 1$ rădăcini distincte în intervalul (a, b), ar avea printre acestea cel puțin una de ordin mai mare sau cel puțin egal cu 3. Fie x_i o astfel de rădăcină. Deci

$$y_0(x_i) = y_0'(x_i) = y_0''(x_i) = 0. \tag{5}$$

Fie de asemenea $\eta_\varepsilon(x)$ o integrală a ecuației (1), care verifică în punctul x_i următoarele condiții ale lui Cauchy :

$$\begin{aligned} &\eta_\varepsilon(x_i) = \eta_\varepsilon'(x_i) = 0 \\ &\eta_\varepsilon''(x_i) = \varepsilon, \; (\varepsilon > 0) \\ &\eta_\varepsilon'''(x_i) = y_0'''(x_i) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\eta_\varepsilon^{(n-1)}(x_i) = y_0^{(n-1)}(x_i). \end{aligned} \tag{6}$$

Ținînd seama de (5), rezultă din (6) că în punctul $x = x_i$, funcțiile $y_0(x)$ și $\eta_\varepsilon(x)$ se deosebesc numai prin valorile derivatelor de ordinul al doilea, și că valorile acestor derivate pot fi oricît de apropiate, dacă ε este suficient de mic. Să facem ca ε să tindă către 0^+. Atunci, după cum se știe, $\eta_\varepsilon(x)$ va converge uniform către $y_0(x)$, în orice interval închis $[a_1, b_1]$, conținut în intervalul (a, b). Notînd cu $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ rădăcinile din (a, b) ale funcției $y_0(x)$, vom lua numerale a_1 și b_1 astfel încît $a < a_1 < x_1$ și $x_{n-1} < b_1 < b$, prin această alegere toate cele $n - 1$ rădăcini în cauză ale funcției $y_0(x)$ vor fi situate în subintervalul (a_1, b_1). Întrucît prin ipoteză, fiecare din rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ale integralei $y_0(x)$ are ordin impar, rezultă că în fiecare din aceste rădăcini, curba de ecuație $y = y_0(x)$, traversează axa Ox (fig. 2). Ținînd seama de faptul că funcția $\eta_\varepsilon(x)$ tinde uniform în intervalul $[a_1, b_1]$ către funcția $y_0(x)$, atunci cînd

$\varepsilon \to 0^+$, rezultă că pentru valori pozitive suficient de mici ale parametrului ε, curba de ecuație $y = \eta_\varepsilon(x)$ va traversa și ea axa Ox în cel puțin $n-1$ puncte distincte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ din intervalul (a_1, b_1). Într-adevăr, din faptul că funcția $\eta_\varepsilon(x)$ tinde uniform în intervalul $[a_1, b_1]$ către funcția $y_0(x)$, atunci cînd $\varepsilon \to 0^+$, rezultă că fiind dat un număr pozitiv arbitrar δ,

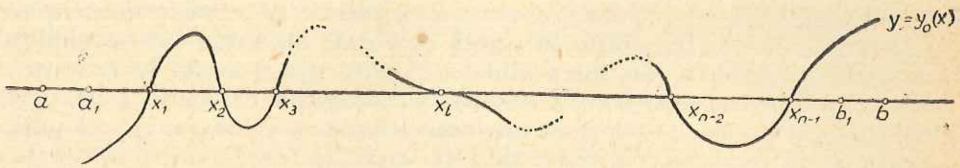

Fig. 2

acestuia îi va corespunde un prag $E(\delta)$, astfel încît pentru orice ε satisfăcînd inegalitatea $0 < \varepsilon < E(\delta)$, să aibă loc relațiile

$$y_0(x) - \delta \leqq \eta_\varepsilon(x) \leqq y_0(x) + \delta, \tag{7}$$

oricare ar fi $x \in [a_1, b_1]$. Fie numerele M_i definite precum urmează:

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |y_0(x)|, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2); \quad M_0 = \max_{x \in [a_1, x_1]} |y_0(x)|;$$

$M_{n-1} = \max\limits_{x \in [x_{n-1}, b]} |y_0(x)|$. Considerăm în (7) numărul δ astfel încît

$$0 < \delta < \min_{i=0,1,\ldots,n-1} \{M_i\} = M. \tag{8}$$

Luînd acum ε astfel încît să satisfacă inegalitatea $0 < \varepsilon < E(M)$ și ținînd seamă de inegalitățile (7), se constată pe figura 2, că în intervalul (a_1, b_1), curba de ecuație $y = \eta_\varepsilon(x)$, corespunzătoare numărului ε ales, va traversa axa Ox, cel puțin de $n-1$ ori, și deci integrala $\eta_\varepsilon(x)$ se va anula în intervalul (a_1, b_1), pentru cel puțin n valori distincte. Dar după cum se constată din (6), oricare ar fi valoarea parametrului ε, integrala $\eta_\varepsilon(x)$ are o rădăcină dublă, anume $x = x_l$. Tot din (6) se vede că integrala $\eta_\varepsilon(x)$ nu poate fi identic nulă, întrucît s-a presupus că $\varepsilon > 0$. Aceste rezultate contrazic însă un fapt stabilit anterior, anume că în ipoteza că Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$, orice integrală neidentic nulă a ecuației (1), care se anulează în $n-1$ puncte distincte din (a, b), are toate rădăcinile din acest interval impare. În concluzie, integrala $y_0(x)$ considerată anterior nu poate avea în intervalul (a, b) nici o rădăcină de ordin mai mare sau cel puțin egal cu trei, și astfel lema este demonstrată.

L e m a 5. *Dacă Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$, atunci Y_n are proprietățile $I_{p_1, p_2, \ldots, p_m}(a, b)$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt numere naturale oarecari, satisfăcînd condițiile* $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$ și $\max\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} = 2$.

Demonstrație. Să presupunem că Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$. Observăm de la început că pentru demonstrarea acestei leme, putem presupune că

cel puțin două dintre numerele $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt mai mari ca numărul 1. Într-adevăr, din ipoteza $\max\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} = 2$, ce intervine în enunțul lemei 5, rezultă că cel puțin unul dintre numerele p_i este egal cu 2. Apoi, dacă numai unul dintre numerele p_i ar fi mai mare ca 1, am avea $m = n - 1$, și proprietatea corespunzătoare $I_{p_1, p_2, \ldots, p_m}(a, b)$ ar rezulta îndată din aplicarea succesivă a lemelor 1 și 4. Într-adevăr, presupunînd prin absurd că Y_n nu ar avea proprietatea respectivă $I_{p_1, p_2, \ldots, p_m}(a, b)$, ar rezulta conform lemei 1 că ecuația diferențială (1) ar admite o integrală neidentic nulă, care să aibă în intervalul (a, b), $n-1$ rădăcini distincte, una cel puțin dintre aceste rădăcini avînd un ordin de multiplicitate mai mare sau cel puțin egal cu 2. Această ciscumstanță ar contrazice însă afirmația lemei 4.

Vom presupune deci pentru demonstrarea lemei 5, că cel puțin două dintre numerele p_i sînt egale cu 2, de unde, ținînd seamă de condiția $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$, rezultă inegalitatea $m < n - 1$.

Fie deci $p_1, p_2, \ldots, p_m$, un sistem oarecare de m numere naturale satisfăcînd condițiile:

$$\begin{gathered} m < n - 1 \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n \\ \max\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} = 2. \end{gathered} \tag{9}$$

Acest sistem de numere este arbitrar, dar o dată ales, îl presupunem fixat pentru cele ce urmează.

Cu aceste precizări, să presupunem contrar afirmației lemei 5, că Y_n nu ar avea proprietatea $I_{p_1, p_2, \ldots, p_m}(a, b)$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt numere naturale alese cu respectarea condițiilor (9). Atunci, conform lemei 1, rezultă că ecuația (1) va admite cel puțin o integrală neidentic nulă $y_0(x)$, care să aibă în intervalul (a, b), m rădăcini distincte $x_1, x_2, \ldots, x_m$, avînd respectiv ordinele de multiplicitate $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$, satisfăcînd inegalitățile

$$\pi_1 \geqq p_1, \quad \pi_2 \geqq p_2, \ldots, \quad \pi_m \geqq p_m. \tag{10}$$

Să notăm cu $i_1, i_2, \ldots, i_\alpha$ indicii i, pentru care π_i reprezintă un număr par și cu $j_1, j_2, \ldots, j_\beta$ indicii j, pentru care π_j este număr impar. Fără a restrînge generalitatea raționamentului, putem presupune că rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$ sînt consecutive și că satisfac inegalitățile

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m. \tag{11}$$

Să considerăm dintre aceste rădăcini, acelea care corespund la indicii $j_1, j_2, \ldots, j_\beta$, adică acelea care reprezintă rădăcini de ordin impar pentru integrala $y_0(x)$. Aceste rădăcini sînt în număr de β și le vom nota respectiv $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$. Vom lua în intervalul (x_m, b) niște noduri distincte $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-\beta-1}$ în număr de $n - \beta - 1$. Se constată, ținînd seama de prima relație din (9), că $n - \beta - 1 > 0$. Alegerea acestor noduri o facem astfel încît nici unul din ele să nu coincidă cu vreo rădăcină a funcției $y_0(x)$, ce s-ar afla eventual în intervalul (x_m, b).

Fie acum $\eta(x)$ o integrală neidentic nulă a ecuației (1), care să verifice condițiile :

$$\begin{aligned} &\eta(x_{j_1}) = \eta(x_{j_2}) = \ldots = \eta(x_{j_\beta}) = 0 \\ &\eta(\xi_1) = \eta(\xi_2) = \ldots = \eta(\xi_{n-\beta-1}) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Existența unei astfel de integrale $\eta(x)$, neidentic nulă în intervalul (a, b), rezultă din ipoteza că familia Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$, ținînd seama de faptul că numărul condițiilor de anulare din (12) este $n - 1$. Vom arăta în cele ce urmează că în ipotezele adoptate, pentru valori pozitive suficient de mici ale parametrului ε, cel puțin una dintre integralele $\varepsilon\eta(x)$, sau $-\varepsilon\eta(x)$, va lua în cel puțin n puncte distincte din intervalul (a, b), valori comune cu integrala $y_0(x)$, fără să coincidă identic cu $y_0(x)$, ceea ce va aduce o contrazicere a proprietății $I_n(a, b)$ a familiei Y_n.

Într-adevăr, deoarece cele $n - 1$ condiții din (12) se referă la $n - 1$ noduri distincte din intervalul (a, b) și deoarece prin ipoteză integrala $\eta(x)$ nu este identic nulă în (a, b), rezultă conform proprietății $I_n(a, b)$ a familiei Y_n, că integrala $\eta(x)$ nu poate avea în intervalul (a, b) alte rădăcini decît $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$ și $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\beta-1}$. Apoi mai rezultă conform lemei 4, că toate aceste rădăcini din intervalul (a, b) ale integralei $\eta(x)$ sînt simple (de ordinul 1), și deci, dacă variabila x crește în mod continuu de la valoarea a la valoare b, atunci integrala $\eta(x)$ schimbă alternativ semnul în dreptul fiecărei valori din șirul :

$$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta};\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\beta-1}. \tag{13}$$

Ținînd seama de faptul că în intervalul $[x_1, x_m]$, toate rădăcinile impare ale integrale $y_0(x)$ sînt rădăcini impare și pentru $\eta(x)$ — și invers — rezultă că dacă variabila x crește de la x_1 la x_m, atunci pentru una din integralele $\eta(x)$ sau $-\eta(x)$, sensul de schimbare al semnului ei în dreptul fiecărei dintre aceste rădăcini impare $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, va coincide cu sensul de schimbare al semnului integralei $y_0(x)$. Să notăm cu $\overline{\eta}(x)$ aceea dintre integralele $\eta(x)$ și $-\eta(x)$, pentru care se realizează acest deziderat, adică acea integrală, pentru care în vecinătăți suficient de mici ale numerelor $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, au loc egalitățile :

$$\operatorname{sgn}\{\overline{\eta}(x)\} = \operatorname{sgn}\{y_0(x)\}, \quad \begin{cases} x \in [x_{j_1} - \varepsilon_1, x_{j_1} + \varepsilon_1], \text{ sau} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x \in [x_{j_\beta} - \varepsilon_\beta, x_{j_\beta} + \varepsilon_\beta] \end{cases} \tag{14}$$

Aici intervalele $[x_{j_1} - \varepsilon_1, x_{j_1} + \varepsilon_1], \ldots, [x_{j_\beta} - \varepsilon_\beta, x_{j_\beta} + \varepsilon_\beta]$ sînt alese suficient de mici, astfel încît să fie cuprinse în intervalul (a, b) și să nu conțină alte rădăcini ale integralei $y_0(x)$, decît respectiv $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$. Pentru integrala $\overline{\eta}(x)$, relația (14) va avea loc și în vecinătăți suficient de mici ale numerelor $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$, cu excepția însă a mijloacelor acestor vecinătăți, întrucît în aceste puncte integrala $y_0(x)$ se anulează, pe cînd $\overline{\eta}(x)$ nu se poate anula.

Să notăm cu (Γ) curba de ecuație $y = y_0(x)$ și cu (Γ_ε) curba de ecuație $y = \varepsilon\overline{\eta}(x)$, unde ε este un parametru pozitiv. Vom examina acum modul în care se situează curbele (Γ) și (Γ_ε) între ele, atunci cînd parametrul ε este mic. Observăm întîi că aceste curbe nu pot să coincidă identic în intervalul (a, b), întrucît în nodurile suplimentare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\beta-1}$ (al căror număr este mai mare ca zero, după cum s-a specificat anterior), integrala $\overline{\eta}(x)$ se anulează, pe cînd $y_0(x)$ este diferită de zero.

Să considerăm din nou mulțimea formată din indicii $j_1, j_2, \ldots, j_\beta$, pentru care π_j este un număr impar. Această mulțime o vom împărți în două submulțimi precum urmează : vom nota cu $j_{k_1}, j_{k_2}, \ldots, j_{k_\gamma}$ acei indici j_k, pentru care $\pi_{j_k} = 1$, și cu $j_{l_1}, j_{l_2}, \ldots, j_{l_\delta}$, indicii j_l, pentru care $\pi_{j_l} \geqq 3$.

Referitor la punctele $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \ldots, x_{j_{k_\gamma}}$ constatăm că ele sînt (prin ipoteză) rădăcini simple pentru funcția $y_0(x)$, adică

$$\begin{aligned} &y_0(x_{j_{k_1}}) = y_0(x_{j_{k_2}}) = \ldots = y_0(x_{j_{k_\gamma}}) = 0 \\ &y_0'(x_{j_{k_1}}) \neq 0,\ y_0'(x_{j_{k_2}}) \neq 0, \ldots, y_0'(x_{j_{k_\gamma}}) \neq 0. \end{aligned}$$

Dar după cum s-a arătat anterior, numerele $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \ldots, x_{j_{k_\gamma}}$ reprezintă rădăcini simple și pentru integrala $\overline{\eta}(x)$, și deci și pentru $\varepsilon\overline{\eta}(x)$, oricare ar fi valoarea parametrului $\varepsilon > 0$;

$$\begin{aligned} &\overline{\eta}(x_{j_{k_1}}) = \overline{\eta}(x_{j_{k_2}}) = \ldots = \overline{\eta}(x_{j_{k_\gamma}}) = 0 \\ &\overline{\eta}'(x_{j_{k_1}}) \neq 0,\ \overline{\eta}'(x_{j_{k_2}}) \neq 0, \ldots, \overline{\eta}'(x_{j_{k_\gamma}}) \neq 0. \end{aligned}$$

Ținînd seamă de faptul că funcțiile $y_0'(x)$ și $\overline{\eta}'(x)$ nu se anulează pentru valorile $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \ldots, x_{j_{k_\gamma}}$, rezultă că dacă parametrul ε ia valori pozitive, inferioare unui anumit prag, atunci vor avea loc relațiile

$$y_0'(x_{j_{k_1}}) \neq \varepsilon\overline{\eta}'(x_{j_{k_1}}), \ \ldots, \ y_0'(x_{j_{k_\gamma}}) \neq \varepsilon\overline{\eta}'(x_{j_{k_\gamma}}).$$

Rezultă de aici că pentru astfel de valori ale parametrului ε, curbele (Γ) și (Γ_ε) se intersectează în punctele $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \ldots, x_{j_{k_\lambda}}$, traversîndu-se reciproc în aceste puncte.

Apoi, referitor la punctele $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \ldots, x_{j_{l_\delta}}$, are loc următoarea proprietate: Dacă parametrul ε ia valori pozitive, inferioare unui anumit prag, atunci în fiecare din veciniătățile suficient de mici, date :

$$(x_{j_{l_1}} - \varepsilon_{l_1}, x_{j_{l_1}} + \varepsilon_{l_1}),\ (x_{j_{l_2}} - \varepsilon_{l_2}, x_{j_{l_2}} + \varepsilon_{l_2}), \ldots, (x_{j_{l_\delta}} - \varepsilon_{l_\delta}, x_{j_{l_\delta}} + \varepsilon_{l_\delta}),$$

curbele (Γ) şi (Γ_ε) se vor intersecta cel puţin în cîte trei puncte distincte. Într-adevăr, numerele $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \ldots, x_{j_{l_\delta}}$ reprezintă rădăcini simple pentru integrala $\bar{\eta}(x)$ (după cum s-a arătat anterior), şi rădăcini multiple de ordin impar mai mare sau cel puţin egal cu 3, pentru integrala $y_0(x)$ (aceasta prin ipoteză). Fie $x_{j_{l_1}}$ unul dintre aceste puncte. Să presupunem pentru fixarea ideilor că într-o vecinătate a acestui punct, funcţia $y_0(x)$ este crescătoare (fig. 3). Fie apoi ζ_1 şi ζ_2 două numere, satisfăcînd inegalităţile:

$$x_{j_{l_1}} - \varepsilon_{l_1} < \zeta_1 < x_{j_{l_1}} < \zeta_2 < x_{j_{l_1}} + \varepsilon_{l_1}.$$

Întrucît au loc egalităţile (14), rezultă că există un prag E_1, astfel încît pentru $\varepsilon < E_1$ să aibă loc inegalităţile:

$$\begin{aligned} y_0(\zeta_1) &\leqq \varepsilon\bar{\eta}(\zeta_1) \\ y_0(\zeta_2) &\geqq \varepsilon\bar{\eta}(\zeta_2). \end{aligned} \tag{15}$$

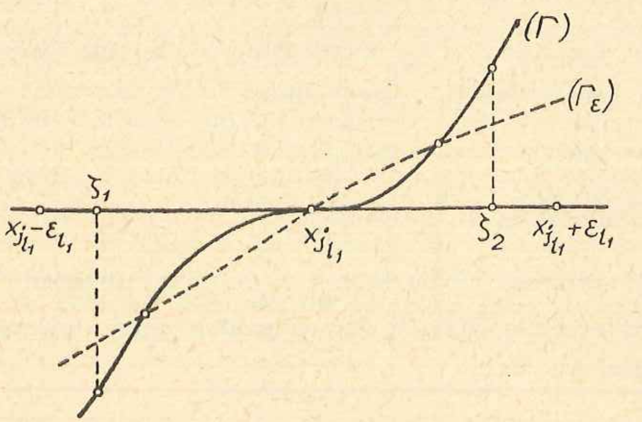

Fig. 3

Pe de altă parte, ţinînd seamă de faptul că $x_{j_{l_1}}$ este o rădăcină comună pentru $y_0(x)$ şi $\bar{\eta}(x)$, rezultă că curbele (Γ) şi (Γ_ε) se intersectează în punctul $x_{j_{l_1}}$, oricare ar fi valoarea parametrului ε. Apoi, dezvoltînd funcţiile $y_0(x)$ şi $\varepsilon\bar{\eta}(x)$ după formula lui Taylor în punctul $x_{j_{l_1}}$ şi ţinînd seamă de ordinele de multiplicitate ale rădăcinii $x_{j_{l_1}}$ relativ la cele două funcţii, se constată că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, pentru acesta există o subvecinătate suficient de mică a punctului $x_{j_{l_1}}$, astfel încît curba (Γ) să se situeze dedesubtul curbei (Γ_ε), pentru valorile $x > x_{j_{l_1}}$ din aceea subvecinătate, şi deasupra curbei (Γ_ε) pentru $x < x_{j_{l_1}}$ (fig. 3). De aici şi din (15), se deduce că oricare ar fi ε satisfăcînd inegalităţile $0 < \varepsilon < E_1$, curbele (Γ) şi (Γ_ε) se intersectează în intervalul $(x_{j_{l_1}} - \varepsilon_{l_1}, x_{j_{l_1}} + \varepsilon_{l_1})$ în cel puţin trei puncte distincte, traversîndu-se reciproc în aceste puncte.

Concluzii analoage se formulează pentru fiecare din rădăcinile $x_{j_{l_2}}, x_{j_{l_3}}, \ldots, x_{j_{l_\delta}}$.

În sfîrşit, se mai observă că în vecinătăţi suficient de mici ale punctelor $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\delta}$, pentru valori pozitive suficient de mici ale parametrului ε, curbele (Γ) şi (Γ_ε) se intersectează în cîte două puncte cel puţin, traversîndu-se reciproc în aceste puncte (fig. 4).

Obţinem în definitiv următorul rezultat:

Dacă parametrul ε ia valori pozitive suficient de mici, atunci curbele (Γ) şi (Γ_ε) se vor intersecta precum urmează: în cel puţin 2α puncte distincte, care se formează în vecinătăţi ale rădăcinilor $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$, apoi în 3δ puncte distincte, care se formează în vecinătăţi ale rădăcinilor $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \ldots x_{j_{l_\delta}}$ şi se vor mai intersecta în punctele $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \ldots, x_{j_{k_\gamma}}$ în număr de γ. Deci pentru valori pozitive şi suficient de mici, ale parametrului ε, numărul

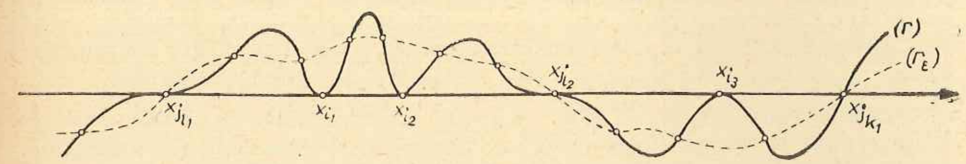

Fig. 4

punctelor de intersecţie ale curbelor (Γ) şi (Γ_ε) va fi mai mare sau cel puţin egal cu $N = 2\alpha + \gamma + 3\delta$. Ţinînd seama de a 2-a şi a 3-a relaţie din (9), precum şi de inegalităţile (10), deducem că

$$2\alpha + \gamma + 3\delta \geqq p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n.$$

De aici rezultă că numărul N al punctelor distincte de intersecţie ale curbelor (Γ) şi (Γ_ε) din intervalul (a, b), satisface inegalitatea $N \geqq n$ şi de aici că, pentru valori pozitive şi suficient de mici ale parametrului ε, integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\bar{\eta}(x)$ a ecuaţiei (1), se anulează pentru $N \geqq n$ valori distincte din intervalul (a, b). Dar $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ nu poate fi identic nulă în intervalul (a, b) întrucît în nodurile suplimentare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\beta-1}$, al căror număr este mai mare ca zero, după cum rezultă din prima relaţie (9), integrala $\bar{\eta}(x)$ se anulează, pe cînd $y_0(x)$ este diferită de zero.

În concluzie, integrala particulară $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ a ecuaţiei (1) nu este identic nulă şi cînd $\varepsilon > 0$ este suficient de mic, se anulează pentru $N \geqq n$ valori distincte din intervalul (a, b). Conform lemei 2, acest rezultat contrazice proprietatea $I_n(a, b)$ a familiei Y_n şi de aici rezultă afirmaţia lemei 5.

L e m a 6. *Dacă* $y_0(x)$ *este o integrală neidentic nulă a ecuaţiei* (1), *care în* m *puncte distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *din* (a, b), *satisface condiţiile*

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y'(x_1) = \ldots = y^{(p_1-1)}(x_1) = 0 \\ y(x_2) &= y'(x_2) = \ldots = y^{(p_2-1)}(x_2) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(x_m) &= y'(x_m) = \ldots = y^{(p_m-1)}(x_m) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *sînt numere naturale, satisfăcînd condiţiile*:

$$\begin{aligned} &p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n - 1 \\ &\max\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} = 2, \end{aligned} \tag{17}$$

atunci, în ipoteza că familia Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$, rezultă relațiile:

$$y^{(p_1)}(x_1) \neq 0, \quad y^{(p_2)}(x_2) \neq 0, \quad \ldots, y^{(p_m)}(x_m) \neq 0. \tag{18}$$

Demonstrație. Fie $y_0(x)$ o integrală neidentic nulă a ecuației diferențiale (1), care în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ satisface condițiile (16) și (17). Să notăm cu $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$, ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$. Vom demonstra că în ipotezele lemei 6, au loc egalitățile : $\pi_1 = p_1, \pi_2 = p_2, \ldots, \pi_m = p_m$. În acest scop, observăm de la început că integrala $y_0(x)$ considerată, nu poate avea în intervalul (a, b) alte rădăcini decît $x_1, x_2, \ldots, x_m$, întrucît în caz contrar s-ar contrazice afirmației lemei 5. Cu această precizare, vom arăta întîi că numerele $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ și $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt respectiv de aceeași paritate.

Considerăm funcția $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\overline{\eta}(x)$, unde $y_0(x)$ este integrala ce intervine în enunțul lemei 6, iar $\overline{\eta}(x)$ este de asemenea o integrală a ecuației diferențiale (1), construită după procedeul indicat în demonstrația lemei 5, relativ la rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$.[3] Întocmai ca acolo, se arată că dacă o rădăcină oarecare x_i din gruparea $x_1, x_2, \ldots, x_m$ are ordinul de multiplicitate față de $y_0(x)$, par, atunci oricît de mică ar fi o vecinătate a acestei rădăcini x_i, pentru valori pozitive suficient de mici ale parametrului ε, integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ va avea în vecinătatea considerată cel puțin două rădăcini distincte ; apoi, dacă x_j este o rădăcină de ordin impar față de $y_0(x)$, atunci oricît de mică ar fi o vecinătate a acestei rădăcini pentru valori pozitive și suficient de mici ale parametrului ε, integrala $\tilde{y}(x)$ va avea în aceea vecinătate o rădăcină sau cel puțin trei rădăcini distincte, după cum $\pi_j = 1$ sau $\pi_j > 1$. De aici rezultă că dacă o rădăcină oarecare x_j din intervalul (a, b), a integralei $y_0(x)$, are ordin impar de multiplicitate, atunci acest ordin este neapărat egal cu 1. În caz contrar, în vecinătatea acestei rădăcini x_j, integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ va avea trei rădăcini distincte, și ținînd seama de relațiile (17), va rezulta că în intervalul (a, b) integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ are cel puțin $(n - 1) + 2 = n + 1$ rădăcini distincte (dacă parametrul ε ia valori pozitive, suficient de mici). Aceasta ar contrazice proprietatea $I_n(a, b)$ a familiei Y_n, dat fiind că integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ nu este identic nulă în intervalul (a, b).[4] Rezultă în definitiv următoarea proprietate :

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Dacă în condițiile lemei 6, } \pi_j \textit{ este impar, atunci } \pi_j = 1,\\ \textit{și deci } \pi_j = p_j.\end{array}\right\} \tag{19}$$

[3]) Spre deosebire însă de cele expuse cu ocazia demonstrației lemei 5, inegalitatea $n - \beta - 1 > 0$ rezultă în cazul de față precum urmează: Se constată întîi că în ipotezele lemei 6, nu poate avea loc inegalitatea $m \geqq n - 1$, întrucît o astfel de inegalitate împreună cu relațiile (16) și (17) ar contrazice afirmația lemei 4. Deci neapărat $m < n - 1$. De aici, ținînd seamă de inegalitatea evidentă $\beta \leqq m$, rezultă inegalitatea $n - \beta - 1 > 0$. Reamintim că numărul $n - \beta - 1$ reprezintă numărul nodurilor auxiliare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\beta-1}$, care intervin prin formulele (12) în definiția integralei $\overline{\eta}(x)$.

[4]) Demonstrația proprietății că integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ nu este identic nulă în intervalul (a, b), se face întocmai ca în cazul lemei 5.

Fie acuma x_i o rădăcină a integralei $y_0(x)$, din intervalul (a, b), avînd un ordin par de multiplicitate, π_i. Vom demonstra întîi că are loc următoarea proprietate :

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Dacă în condițiile lemei 6, } \pi_i \textit{ este par, atunci și numărul}\\ p_i \textit{ este de asemenea par.}\end{array}\right\} \tag{20}$$

Într-adevăr, presupunînd prin absurd că numărul p_i este impar, atunci ținînd seamă de a doua egalitate din (17), ar rezulta că $p_i = 1$. Pe de altă parte, rădăcina x_i avînd un ordin par de multiplicitate față de integrala $y_0(x)$, rezultă că acestei rădăcini îi va corespunde pentru integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ două rădăcini distincte, situate în vecinătăți oricît de mici ale punctului x_i, dacă bineînțeles parametrul ia valori pozitive suficient de mici. S-ar obține astfel rezultatul : Pentru valori pozitive și suficient de mici ale parametrului ε, integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ are în intervalul (a, b) cel puțin $(n - 1) + 1 = n$ rădăcini distincte. Acest rezultat ar contrazice proprietatea $I_n(a, b)$ a familiei y_n, dat fiind că integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ nu este identic nulă în intervalul (a, b).[4] Rezultă în definitiv proprietatea (20).

Vom arăta acum mai mult, anume că în ipotezele lemei 6, oricare ar fi rădăcina pară x_i din intervalul (a, b), a integralei $y_0(x)$, pentru această rădăcină are loc egalitatea $\pi_i = p_i$. Într-adevăr, este evidentă inegalitatea $\pi_i \geqq p_i$. Să presupunem prin absurd că ar exista în intervalul (a, b), cel puțin o rădăcină pară x_{i_0} a integralei $y_0(x)$, al cărei ordin π_{i_0} satisface inegalitatea strictă $\pi_{i_0} > p_{i_0}$. Vom arăta că o astfel de ipoteză conduce la o absurditate. Într-adevăr, observăm întîi că din inegalitatea $\pi_{i_0} > p_{i_0}$, ținînd seamă de faptul că numerele π_{i_0} și p_{i_0} au aceeași paritate, rezultă relația

$$\pi_{i_0} \geqq p_{i_0} + 2 = 4. \tag{21}$$

O astfel de relație pentru cazul cînd $n \leqq 4$, este absurdă. În continuare presupunem că $n \geqq 5$.

Vom împărți mulțimea rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ a integralei $y_0(x)$, din intervalul (a, b), în două submulțimi. În prima submulțime vom considera rădăcinile de ordin par, pe care le vom nota cu $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$, iar în a doua submulțime vom considera rădăcinile de ordin impar, și acestea le vom nota cu $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$. Evident că $\alpha + \beta = m$. Vom distinge două cazuri :

Cazul 1 : $\alpha = 1, \quad \beta = m - 1, \quad (n \geqq 5)$.

Presupunem că ecuația diferențială (1) are în intervalul (a, b) o singură rădăcină de ordin par, x_{i_0}, și că ordinul π_{i_0} al acestei rădăcini satisface inegalitatea (21). Toate celelalte rădăcini din intervalul (a, b), ale integralei $y_0(x)$, fiind presupuse impare, ele vor fi neapărat simple, conform proprietății (19), stabilite anterior. Ținînd seamă de proprietatea (19), precum și de egalitățile (17), deducem că în cazul considerat, numărul acestor rădăcini este $\beta = n - 3$. În fiecare din ele, curba de ecuație $y = y_0(x)$ va traversa axa Ox.

Fie ε un număr pozitiv și fie $\mu_\varepsilon(x)$ integrala ecuației diferențiale (1), care satisface în punctul x_{i_0} următoarele condiții ale lui Cauchy :

$$\begin{aligned}&\mu_\varepsilon(x_{i_0}) = y_0(x_{i_0}) = 0, \quad \mu'_\varepsilon(x_{i_0}) = y'_0(x_{i_0}) = 0, \quad \mu''_\varepsilon(x_{i_0}) = y''_0(x_{i_0}) = 0\\ &\mu'''_\varepsilon(x_{i_0}) = \varepsilon,\\ &\mu_\varepsilon^{(IV)}(x_{i_0}) = y_0^{(IV)}(x_{i_0}), \ldots, \mu_\varepsilon^{(n-1)}(x_{i_0}) = y_0^{(n-1)}(x_{i_0}).\end{aligned} \tag{22}$$

Din aceste formule se vede că integrala $\mu_\varepsilon(x)$ satisface în punctul x_{i_0} aceleași condiții ale lui Cauchy, ca și $y_0(x)$, cu excepția derivatei de ordinul 3, care în acest punct ia valoareă ε.

Dacă parametrul ε ia valori pozitive suficient de mici, atunci condițiile lui Cauchy, pe care le satisface integrala $\mu_\varepsilon(x)$, sînt apropiate de condițiile lui Cauchy pe care le satisface integrala $y_0(x)$, și dacă ε tinde către zero, atunci funcția $\mu_\varepsilon(x)$ va tinde uniform către $y_0(x)$, în orice subinterval închis $[a_1, b_1]$ conținut în (a, b).

Întrucît curba de ecuație $y = y_0(x)$ traversează axa Ox în fiecare din punctele $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, rezultă că oricît de mici s-ar alege niște vecinătăți ale acestor puncte, există pentru ele un prag E, astfel încît oricare ar fi numărul pozitiv $\varepsilon < E$, curba integrală corespunzătoare $y = \mu_\varepsilon(x)$ să traverseze axa Ox în fiecare din vecinătățile alese, în cîte un punct. Vom nota abscisele acestor puncte de traversare respectiv cu $\overline{x}_{j_1}, \overline{x}_{j_2}, \ldots, \overline{x}_{j_\beta}$. În afară de aceste rădăcini, integrala $\mu_\varepsilon(x)$ mai admite rădăcina x_{i_0}, cu ordinul de multiplicitate 3, ceea ce se constată din formulele (22). Rezultă în definitiv că integrala $\mu_\varepsilon(x)$ are în intervalul (a, b), rădăcina triplă x_{i_0}, și în plus alte β rădăcini distincte $\overline{x}_{j_1}, \overline{x}_{j_2}, \ldots, \overline{x}_{j_\beta}$, diferite de x_{i_0} și avînd ordine impare de multiplicitate. Pentru aceste $\beta + 1$ rădăcini, ale integralei $\mu_\varepsilon(x)$, sînt satisfăcute condițiile (16) și (17) dacă se alege $\overline{p}_{i_0} = 2$ și $\overline{p}_{j_1} = \overline{p}_{j_2} = \ldots = \overline{p}_{j_\beta} = 1$, și dacă se ține seamă că în cazul 1 considerat, $\beta = n - 3$. Se mai constată că integrala $\mu_\varepsilon(x)$ nu poate să aibă în intervalul (a, b) alte rădăcini distincte, decît $\overline{x}_{j_1}, \overline{x}_{j_2}, \ldots, \overline{x}_{j_\beta}$ și x_{i_0}. Într-adevăr, În caz contrar, numărul total al rădăcinilor distincte pe care le-ar avea în intervalul (a, b) integrala neidentic nulă $\mu_\varepsilon(x)$, ar fi mai mare sau cel puțin egal cu $n - 1$, și conform lemei 4 ar rezulta că toate rădăcinile ei sînt simple. Aceasta ar contrazice faptul că rădăcina x_{i_0} a integralei $\mu_\varepsilon(x)$, este triplă. În aceste condiții, este valabilă pentru integrala $\mu_\varepsilon(x)$ proprietatea (19), care afirmă că toate rădăcinile de ordin impar ale unei astfel de integrale neidentic nule, trebuie să fie simple. Această proprietate este însă în contradicție cu existența pentru integrala $\mu_\varepsilon(x)$ a rădăcinii triple x_{i_0}. Rezultă în definitiv că rădăcina x_{i_0}, a integralei $y_0(x)$, nu poate să aibă ordinul de multiplicitate mai mare ca 2, și de aici că $\pi_i = p_i$, *q. e. d.*

Cazul 2 : $\alpha \geqq 2$, $(n \geqq 5)$.

În acest caz, ținînd seamă de egalitățile (17), precum și de proprietățile (19) și (20), rezultă că $\beta \leqq n - 5$. Fie acum numărul $\nu = (n - 1) - \beta - 2$. Ținînd seamă că $\beta \leqq n - 5$, rezultă inegalitatea $\nu \geqq 2$. Vom presupune că

rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt scrise în ordine crescătoare; $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Alegem în intervalul (x_m, b), ν noduri distincte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$. Întrucît integrala $y_0(x)$ nu are în intervalul (a, b) alte rădăcini decît $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (fapt stabilit anterior), rezultă că nici unul din nodurile alese $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ nu poate reprezenta vreo rădăcină a integralei $y_0(x)$.

Fie $\mu(x)$ o integrală neidentic nulă a ecuației (1), care satisface condițiile :

$$\begin{aligned}\mu(x_{i_0}) &= \mu(x_{i_0}) = 0\\ \mu(x_{j_1}) &= \mu(x_{j_2}) = \ldots = \mu(x_{j_\beta}) = 0\\ \mu(\xi_1) &= \mu(\xi_2) = \ldots = \mu(\xi_\nu) = 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Numărul acestor condiții de anulare fiind $2 + \beta + \nu = n - 1$, rezultă în baza lemei 5 existența unei astfel de integrale neidentic nule, satisfăcînd condițiile (23). Această integrală nu poate să aibă în intervalul (a, b) alte rădăcini distincte decît $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$, și x_{i_0}. Într-adevăr, în caz contrar numărul total al rădăcinilor distincte pe care le-ar avea în acest interval integrala neidentic nulă $\mu(x)$, ar fi mai mare sau cel puțin egal cu $n - 1$, și conform lemei 4 ar rezulta că toate rădăcinile ei sînt simple. Aceasta ar contrazice primul șir de egalități din (23). Pe de altă parte, observăm că condițiile (23), pe care le satisface integrala neidentic nulă $\mu(x)$, au forma condițiilor (16) și (17) pe care le satisface integrala $y_0(x)$. În aceste circumstanțe sînt valabile pentru integrala $\mu(x)$ proprietățile (19) și (20), în baza cărora toate rădăcinile integralei $\mu(x)$, cu excepția rădăcinii x_{i_0}, sînt simple, iar rădăcina x_{i_0} are un ordin par de multiplicitate. Astfel ajungem la constatarea că integrala $\mu(x)$ satisface condiții analoage condițiilor pe care le satisfăcea integrala $y_0(x)$ în cazul 1 tratat anterior. În baza rezultatelor obținute cu ocazia tratării cazului 1, se poate afirma că rădăcina pară x_{i_0}, a integralei $\mu(x)$, trebuie să aibă neapărat ordinul 2 :

$$\mu(x_{i_0}) = \mu'(x_{i_0}) = 0, \quad \mu''(x_{i_0}) \neq 0. \tag{24}$$

Din cele de mai sus rezultă că curba integrală de ecuație $y = \mu(x)$ traversează axa Ox în fiecare din rădăcinile $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$, și se situează de aceeași parte a axei Ox într-o vecinătate suficient de mică a rădăcinii x_{i_0}.

Pe de altă parte, referindu-ne la integrala $y_0(x)$, tot în baza proprietății (19) putem afirma că rădăcinile impare $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$ trebuie să fie neapărat simple pentru $y_0(x)$. Celelalte rădăcini $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$, au ordine pare de multiplicitate și printre aceste rădăcini se află și rădăcina x_{i_0}, care are ordinul π_{i_0} satisfăcînd inegalitatea (21). De aici rezultă că și curba integrală de ecuație $y = y_0(x)$, traversează axa Ox în fiecare din rădăcinile $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$ și se situează de aceeași parte a axei Ox în vecinătatea fiecărei din rădăcinile $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$. Ținînd seamă de aceste proprietăți stabilite pentru integralele $\mu(x)$ și $y_0(x)$, precum și de faptul că toate rădăcinile $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ ale integralei $\mu(x)$ sînt situate în afara intervalului $[x_1, x_m]$, rezultă ca dacă variabila x crește de la valoarea a

la valoarea b, atunci cel puţin pentru una din integralele $\mu(x)$ sau $-\mu(x)$, sensul de schimbare al semnului ei, în dreptul fiecăreia din rădăcinile $y_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, va coincide cu sensul de schimbare al semnului integralei $y_0(x)$ în dreptul fiecărei dintre aceste rădăcini. Să notăm cu $\bar{\mu}(x)$ acea dintre integralele $\mu(x)$ şi $-\mu(x)$ pentru care se realizează acest deziderat, adică pentru care — în vecinătăţi suficient de mici ale numerelor $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$ — au loc egalităţile :

$$\operatorname{sgn}\{\bar{\mu}(x)\} = \operatorname{sgn}\{y_0(x)\}, \quad \begin{cases} x \in [x_{j_1}-\varepsilon_1,\ x_{j_1}+\varepsilon_1], \text{ sau} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x \in [x_{j_\beta}-\varepsilon_\beta,\ x_{j_\beta}+\varepsilon_\beta] \end{cases} \tag{25}$$

Aici intervalele $[x_{j_1}-\varepsilon_1, x_{j_1}+\varepsilon_1], \ldots, [x_{j_\beta}-\varepsilon_\beta, x_{j_\beta}+\varepsilon_\beta]$ sînt alese suficient de mici astfel încît să fie conţinute în (a, b) şi în interiorul lor să nu existe alte rădăcini ale integralei $y_0(x)$, decît respectiv $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$.

Ţinînd seamă de faptul stabilit anterior, că integrala $\bar{\mu}(x)$ nu are în intervalul (a, b) alte rădăcini distincte decît $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ (de ordinul 1), precum şi rădăcina pară x_{i_0}, rezultă că egalitatea (25) va avea loc şi în vecinătăţi suficient de mici ale rădăcinilor pare $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$ ale integralei $y_0(x)$, cu excepţia eventual a centrelor acestor vecinătăţi. Să notăm cu (Γ) curba de ecuaţie $y = y_0(x)$ şi cu (Γ_ε) curba de ecuaţie $y = \varepsilon\,\bar{\mu}(x)$, unde ε este un parametru luînd valori pozitive.

Se constată uşor că există un prag E_1, astfel încît dacă $\varepsilon < E_1$ atunci în fiecare din punctele $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, curbele (Γ) şi (Γ_ε) să se intersecteze, traversîndu-se reciproc. (Această afirmaţie rezultă din faptul că numerele $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$ sînt rădăcini simple pentru fiecare din integralele $y_0(x)$ şi $\bar{\mu}(x)$).

Apoi, alegîndu-se nişte vecinătăţi suficient de mici ale rădăcinilor pare $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$, cu excepţia rădăcinii x_{i_0}, există pentru ele un prag E_2 astfel încît oricare ar fi ε satisfăcînd inegalităţile $0 < \varepsilon < E_2$, curbele (Γ) şi (Γ_i) să se intersecteze în fiecare din vecinătăţile considerate, în cîte două puncte distincte, traversîndu-se reciproc în aceste puncte.

Referitor la punctul x_{i_0}, ţinînd seamă de relaţiile (24) şi (21), constatăm următoarele : Curba de ecuaţie $y = \bar{\mu}(x)$ are în x_{i_0} un contact de ordinul 1 cu axa Ox,

$$\bar{\mu}(x_{i_0}) = \mu'(x_{i_0}) = 0, \quad \bar{\mu}''(x_{i_0}) \neq 0, \tag{24'}$$

pe cînd curba de ecuaţie $y = y_0(x)$ are în x_{i_0} un contact de un ordin impar $\geqq 3$ cu axa Ox.

$$\begin{aligned} &y_0(x_{i_0}) = y_0'(x_{i_0}) = y_0''(x_{i_0}) = y_0'''(x_{i_0}) = \ldots = y_0^{(\pi_{i_0}-1)}(x_{i_0}) = 0 \\ &y_0^{(\pi_{i_0})}(x_{i_0}) \neq 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Fie un interval închis $[x_{i_0}-\varepsilon_{i_0}, x_{i_0}+\varepsilon_{i_0}]$, ales suficient de mic încît să fie conţinut în (a, b) şi să nu conţină nici o altă rădăcină a integralei $y_0(x)$, sau a integralei $\bar{\mu}(x)$. Prin felul în care a fost aleasă integrala $\bar{\mu}(x)$ dintre integralele $\bar{\mu}(x)$ şi $-\mu(x)$, rezultă că dacă vecinătatea $[x_{i_0}-\varepsilon_{i_0}, x_{i_0}+\varepsilon_{i_0}]$ a punctului x_{i_0} este suficient de mică, atunci curbele de ecuaţii $y = y_0(x)$ şi $y = \bar{\mu}(x)$ se vor situa de aceeaşi parte a axei Ox, adică va avea loc egalitatea

$$\operatorname{sgn}\{y_0(x)\} = \operatorname{sgn}\{\bar{\mu}(x)\}, \quad x \in [x_{i_0}-\varepsilon_{i_0},\ x_{i_0}+\varepsilon_{i_0}]. \tag{25'}$$

Să presupunem pentru fixarea ideilor, că $\bar{\mu}''(x_{i_0}) > 0$. De aici, în baza relaţiilor (24') şi (25') rezultă că $\operatorname{sgn}\{y_0(x)\} = \operatorname{sgn}\{\bar{\mu}(x)\} = 1$, cînd $x \in [x_{i_0}-\varepsilon_{i_0}, x_{i_0})$ şi cînd $x \in (x_{i_0}, x_{i_0}+\varepsilon_{i_0}]$ (fig. 5). Vom demonstra în cele ce urmează că există un prag E_3, astfel încît dacă ε satisface inegalităţile $0<\varepsilon<E_3$, atunci în vecinătatea $[x_{i_0}-\varepsilon_{i_0}, x_{i_0}+\varepsilon_{i_0}]$ curbele de ecuaţii $y = y_0(x)$ şi $y = \varepsilon\bar{\mu}(x)$, în afară de punctul x_{i_0} în care ele prezintă un contact de ordinul 1, se mai intersectează în încă două puncte distincte, traversîndu-se reciproc în acestea din urmă. Într-adevăr, fie $\bar{\xi}_1$ şi $\bar{\xi}_2$ numere reale, satisfăcînd inegalităţile :

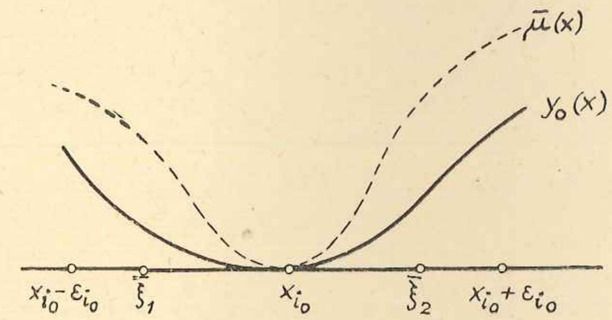

Fig. 5

$$x_{i_0}-\varepsilon_{i_0} < \bar{\xi}_1 < x_{i_0} < \bar{\xi}_2 < x_{i_0}+\varepsilon_{i_0}.$$

Fie $\bar{\varepsilon}$ un număr pozitiv suficient de mic, astfel încît să fie satisfăcute inegalităţile (fig. 6) :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}\,\bar{\mu}(\bar{\xi}_1) &< y_0(\bar{\xi}_1) \\ \bar{\varepsilon}\,\bar{\mu}(\bar{\xi}_2) &< y_0(\bar{\xi}_2) \end{aligned} \tag{27}$$

Dezvoltînd funcţiile $y_0(x)$ şi $\varepsilon\,\bar{\mu}(x)$ după formula lui Taylor în punctul x_{i_0} şi ţinînd seamă de relaţiile (24'), (26), (25') precum şi de faptul că $\pi_{i_0} > 2$, se constată că oricare ar fi ε pozitiv, într-o subvecinătate suficient de mică a punctului x_{i_0}, curba $y = y_0(x)$ se va situa dedesubtul curbei $y = \varepsilon\bar{\mu}(x)$ (fig. 6). Ţinînd seamă de această constatare, precum şi de inegalităţile (27), rezultă că pentru orice ε pozitiv, satisfăcînd inegalitatea $\varepsilon < \bar{\varepsilon} = E_3$, curbele de ecuaţii $y = y_0(x)$ şi $y = \varepsilon\bar{\mu}(x)$ se vor tăia în două puncte distincte din $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$, traversîndu-se reciproc în aceste puncte şi prezentînd totodată în punctul x_{i_0} un contact de ordinul 1 (fig. 6). În concluzie, ţinînd seama de cele arătate anterior, rezultă că dacă ε satisface inegalitatea

$$0 < \varepsilon < \min\{E_1, E_2, E_3\},$$

atunci integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\bar{\mu}(x)$ va avea în intervalul (a, b) rădăcini, care provin precum urmează :

Fiecărei rădăcini x_i de ordin par, a integralei $y_0(x)$, cu excepţia rădăcinii x_{i_0}, îi vor corespunde pentru integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ cîte două rădăcini distincte $\bar{x}_i$ şi $\bar{\bar{x}}_i$.

Rădăcinii x_{i_0}, multiplă de ordin par $\geqq 4$ a integralei $y_0(x)$, îi va corespunde pentru integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ o rădăcină dublă x_{i_0} şi alte două rădăcini simple $\bar{x}_{i_0}$, $\bar{\bar{x}}_{i_0}$.

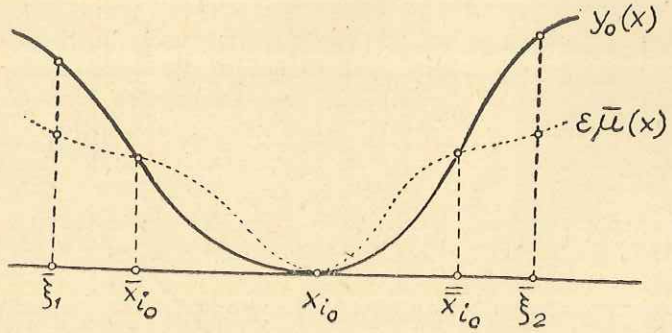

Fig. 6

În sfîrşit, rădăcinile x_j de ordin impar (simple) ale integralei $y_0(x)$ sînt rădăcini simple şi pentru $\tilde{y}_\varepsilon(x)$.

Rezultă în definitiv că integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ va avea în intervalul (a, b) o rădăcină de ordinul 2 şi alte $2(\alpha - 1) + 2 + \beta = 2\alpha + \beta$ rădăcini simple. Dar întrucît $2\alpha + \beta = n - 1$, ceea ce se deduce din (16) şi (17), ţinînd seamă de proprietăţile (19) şi (20) rezultă, că $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ are în intervalul (a, b) cel puţin $(n - 1) + 1 = n$ rădăcini distincte (dintre care una este dublă). Atunci, întrucît prin ipoteză familia Y_n are proprietatea $I_n(a, b)$, rezultă în baza lemei 2 că $\tilde{y}_\varepsilon(x) \equiv 0$ în intervalul (a, b). Această identitate contrazice însă faptul că $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\bar{\mu}(x)$ nu se anulează în nodurile suplimentare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$, al căror număr ν, după cum s-a arătat anterior, satisface inegalitatea $\nu \geqq 2$.

Rezultă în definitiv că inegalitatea (21) nu poate avea loc şi conform proprietăţii (20), trebuie să aibă loc egalitatea $\pi_{i_0} = p_{i_0}$, q. e. d.

*

Vom trece acum la demonstrarea efectivă a teoremei 1.

Demonstraţia teoremei 1.

Pentru simplificarea expunerii, dăm întîi următoarele definiţii :

Definiţia 4. *Spunem că familia Y_n are proprietatea $I_n^{(k)}(a, b)$ (unde k este un număr natural satisfăcînd inegalitatea $k \leqq n$), dacă acea familie Y_n are proprietăţile $I_{p_1, p_2, \ldots, p_m}(a, b)$ referitoare la toate sistemele de numere naturale $m, p_1, p_2, \ldots, p_m$, care satisfac condiţiile :*

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \ldots + p_m &= n \\ \max(p_1, p_2, \ldots, p_m) &= k. \end{aligned} \tag{28}$$

Definiţia 5. *Spunem că familia Y_n posedă proprietatea $P_n^{(k)}(a, b)$ (unde k este un număr natural satisfăcînd inegalitatea $k \leqq n - 1$), dacă oricare ar fi integrala neidentic nulă a ecuaţiei, care în m puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ din (a, b) satisface condiţiile :*

$$\begin{aligned} y(x_1) = y'(x_1) = \ldots &= y^{(p_1-1)}(x_1) = 0 \\ y(x_2) = y'(x_2) = \ldots &= y^{(p_2-1)}(x_2) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y(x_m) = y'(x_m) = \ldots &= y^{(p_m-1)}(x_m) = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt numere naturale oarecari, satisfăcînd condiţiile

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \ldots + p_m &= n - 1 \\ \max\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} &= k \end{aligned} \tag{30}$$

atunci din realizarea condiţiilor (29) şi (30) să rezulte

$$y^{(p_1)}(x_1) \neq 0, \quad y^{(p_2)}(x_2) \neq 0, \ldots, y^{(p_m)}(x_m) \neq 0. \tag{31}$$

*

Pentru a demonstra teorema 1, vom arăta din aproape în aproape că în ipotezele acestei teoreme, familia Y_n are proprietăţile

$$\{I_n^{(1)}(a, b),\ P_n^{(1)}(a, b)\},\ \{I_n^{(2)}(a, b),\ P_n^{(2)}(a, b)\}, \ldots, \{I_n^{(k)}(a, b),\ P_n^{(k)}(a, b)\} \ldots\ldots, \{I_n^{(n-1)}(a, b),\ P_n^{(n-1)}(a, b)\},\ I_n^{(n)}(a, b). \tag{32}$$

În acest scop, utilizăm principiul inducţiei relativ la indicele superior k. În primul rînd observăm că pentru familia Y_n, proprietăţile $\{I_n^{(1)}(a, b), P_n^{(1)}(a, b)\}$, $\{I_n^{(2)}(a, b), P_n^{(2)}(a, b)\}$, care corespunde valorilor $k = 1$ şi $k = 2$, sînt adevărate în baza afirmaţiilor lemelor 4, 5 şi 6. Presupunem acum că pentru familia Y_n au loc proprietăţile :

$$\{I_n^{(1)}(a, b),\ P_n^{(1)}(a, b)\},\ \{I_n^{(2)}(a, b),\ P_n^{(2)}(a, b)\}, \ldots, \{I_n^{(k-1)}(a, b),\ P_n^{(k-1)}(a, b)\} \tag{33}$$

care corespund respectiv valorilor $1, 2, \ldots, k - 1$ ale indicelui superior. Să demonstrăm că în această ipoteză, familia Y_n are şi proprietăţile $I_n^{(k)}(a, b)$ şi $P_n^{(k)}(a, b)$. Vom presupune, în cele ce urmează, $k > 2$. Începem prin a stabili următoarea lemă :

Lema 7. *Dacă familia Y_n are toate proprietăţile indicate în (33), atunci acea familie are şi proprietatea $I_n^{(k)}(a, b)$.*

Demonstraţie. Pentru stabilirea proprietăţii $I_n^{(k)}(a, b)$, vom folosi procedeul de demonstraţie indicat cu ocazia stabilirii lemei 5.

Să presupunem prin absurd că în ipotezele lemei 7, familia Y_n nu ar avea proprietatea $I_n^{(k)}(a, b)$. Atunci, conform lemei 1, ar rezulta că ecuaţia diferenţială (1) admite cel puţin o integrală neidentic nulă $y_0(x)$, care să aibă în intervalul (a, b), m rădăcini distincte $x_1, x_2, \ldots, x_m$, avînd ordine de multiplicitate $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$, astfel încît

$$\pi_1 \geqq p_1, \quad \pi_2 \geqq p_2, \ldots, \pi_m \geqq p_m, \tag{34}$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ reprezintă numere naturale, satisfăcînd condiţiile (28).

Observăm de la început că pentru demonstrarea proprietății $I_n^{(k)}(a, b)$, putem presupune că cel puțin două dintre numerele $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt egale cu numărul k. Într-adevăr, din ipoteza $\max\{p_1, p_2, \ldots, p_m\} = k$, ce intervine în definirea proprietății $I_n^{(k)}(a, b)$, rezultă că cel puțin unul din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_m$ este egal cu k. Apoi dacă numai unul din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ar fi egal cu k, iar toate celelalte ar fi mai mici decît k, atunci existența unei integrale $y_0(x)$ neidentic nule, satisfăcînd condițiile (29), este în contradicție cu proprietatea $P_n^{(k-1)}(a, b)$, presupusă de asemenea adevărată prin ipoteză. În concluzie, pentru demonstrarea proprietății $I_n^{(k)}(a, b)$, putem deci presupune că cel puțin două dintre numerele $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt egale cu k.

Vom asocia numerelor $p_1, p_2, \ldots, p_m$ respectiv numerele $p_1^*, p_2^*, \ldots p_m^*$ precum urmează:

$$p_i^* = \begin{cases} p_i, & \text{dacă } \pi_i \text{ și } p_i \text{ sînt de aceeași paritate} \\ p_i + 1, & \text{dacă } \pi_i \text{ și } p_i \text{ nu sînt de aceeași paritate} \end{cases} \tag{35}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Considerăm mai departe șirul de numere $p_1^{**}, p_2^{**}, \ldots, p_m^{**}$, precum urmează:

$$p_i^{**} = \begin{cases} p_i^* - 2, & \text{dacă } p_i^* > 1 \\ p_i^*, & \text{dacă } p_i^* = 1 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{36}$$

Evident că șirurile de numere $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$, $\{p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*\}$, $\{p_1^{**}, p_2^{**}, \ldots, p_m^{**}\}$ sînt astfel, încît termenii lor de același rang au aceeași paritate, în ultimul șir putînd să figreze și numărul zero.

Întrucît, prin ipoteză, cel puțin două dintre numerele $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt egale cu k, și întrucît tot prin ipoteză $k > 2$, rezultă, ținînd seamă de (35) și (36) că cel puțin pentru doi indici i are loc inegalitatea strictă $p_i^{**} < p_i$. De aici, ținînd seamă de inegalitățile $p_i^{**} \leqq p_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, care rezultă tot din (35) și (36), și apoi de prima relație din (28), rezultă inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^{**} \leqq n - 2. \tag{37}$$

Vom împărți mulțimea numerelor $p_1^{**}, p_2^{**}, \ldots, p_m^{**}$ în două submulțimi precum urmează: vom nota cu $i_1, i_2, \ldots, i_\alpha$ acei indici i pentru care p_i^{**} ia valoarea zero, și cu $j_1, j_2, \ldots, j_\beta$, indicii j pentru care p_j^{**} ia valori mai mari ca zero (dacă bineînțeles există astfel de indici).

Să notăm cu ν, suma acestor numere p_j^{**}. Ținînd seamă de (37), rezultă în mod evident inegalitatea

$$\nu = p_{j_1}^{**} + p_{j_2}^{**} + \ldots + p_{j_\beta}^{**} \leqq n - 2. \tag{37'}$$

Fără a restrînge generalitatea demonstrației, putem presupune că rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$, sînt consecutive și satisfac inegalitățile $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ (aceasta întrucît numărul natural m poate fi oarecare).

Vom alege în intervalul (x_m, b), $n - \nu - 1$ noduri distincte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\nu-1}$, astfel încît nici unul dintre aceste noduri să nu coincidă cu vreo rădăcină a integralei $y_0(x)$, ce s-ar afla eventual în intervalul (x_m, b). Ținînd seamă de (37'), se constată că numărul $n - \nu - 1$ care reprezintă numărul nodurilor suplimentare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\nu-1}$, este mai mare sau cel puțin egal cu 1, astfel că mulțimea acestor noduri nu este vidă.

Să considerăm acum rădăcinile $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, corespunzătoare numerelor $p_{j_1}^{**}, p_{j_2}^{**}, \ldots, p_{j_\beta}^{**}$ puse în evidență anterior, și fie $\eta(x)$ o integrală neidentic nulă a ecuației (1), care verifică condițiile:

$$\left.\begin{aligned} &\eta(x_{j_1}) = \eta'(x_{j_1}) = \ldots\ldots = \eta^{(p_{j_1}^{**}-1)}(x_{j_1}) = 0 \\ &\eta(x_{j_2}) = \eta'(x_{j_2}) = \ldots\ldots = \eta^{(p_{j_2}^{**}-1)}(x_{j_2}) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\eta(x_{j_\beta}) = \eta'(x_{j_\beta}) = \ldots\ldots = \eta^{(p_{j_\beta}^{**}-1)}(x_{j_\beta}) = 0 \end{aligned}\right\} \nu \text{ condiții} \tag{38}$$
$$\eta(\xi_1) = \eta(\xi_2) = \ldots\ldots = \eta(\xi_{n-\nu-1}) = 0$$

în număr de $n - 1$. Existența unei astfel de integrale neidentic nule, rezultă din ipoteza că Y_n are toate proprietățile $I_n^{(1)}(a, b), I_n^{(2)}(a, b), \ldots, I_n^{(k-1)}(a, b)$ ce figurează în (33) și din faptul că ordinele de multiplicitate $p_{j_1}^{**}, p_{j_2}^{**}, \ldots, p_{j_\beta}^{**}$ care intervin în condițiile (38), satisfac inegalitatea

$$\max\{p_{j_1}^{**}, p_{j_2}^{**}, \ldots, p_{j_m}^{**}\} \leqq k - 1 \tag{39}$$

care rezultă din (35), (36) și (28).

Întrucît prin ipoteză sînt adevărate proprietățile $P_n^{(1)}(a, b)$, $P_n^{(2)}(a, b), \ldots, P_n^{(k-1)}(a, b)$, din relația (39) rezultă că integrala $\eta(x)$, presupusă neidentic nulă, satisface relațiile:

$$\begin{aligned} &\eta^{(p_{j_1}^{**})}(x_{j_1}) \neq 0, \quad \eta^{(p_{j_2}^{**})}(x_{j_2}) \neq 0, \ldots, \eta^{(p_{j_\beta}^{**})}(x_{j_\beta}) \neq 0 \\ &\eta'(\xi_1) \neq 0, \quad \eta'(\xi_2) \neq 0, \ldots, \eta'(\xi_{n-\nu-1}) \neq 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Mai rezultă că singurele rădăcini distincte din (a, b) ale integralei $\eta(x)$ sînt numere $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\nu-1}$.[5] Ținînd seamă de această ultimă constatare, apoi de relațiile (38), considerate împreună cu (40), precum și de constatarea făcută anterior că numerele $p_1^{**}, p_2^{**}, \ldots, p_m^{**}$

[5]) Această afirmație rezultă și din ipoteza că familia Y_n are proprietățile $I_n^{(1)}(a, b), \ldots, I_n^{(k-1)}(a, b)$.

sînt respectiv de aceeași paritate cu numerele $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$, rezultă că cel puțin una dintre integralele $\eta(x)$ sau $-\eta(x)$, va avea același semn ca și $y_0(x)$, în vecinătăți suficient de mici ale punctelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$, eventual cu excepția mijloacelor acestor vecinătăți. Vom nota cu $\overline{\eta}(x)$ acea dintre integralele $\eta(x)$ și $-\eta(x)$, care satisface la acest deziderat.

În continuare, vom nota cu (Γ) curba de ecuație $y = y_0(x)$ și cu (Γ_ε) curba de ecuație $y = \varepsilon\overline{\eta}(x)$, unde ε este un parametru. Ne propunem să examinăm felul în care se situează între ele curbele (Γ) și (Γ_ε), atunci cînd ε tinde către zero prin valori pozitive.

Observăm de la început că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, curbele integrale (Γ) și (Γ_ε) nu pot să coincidă identic în intervalul (a, b), întrucît în nodurile suplimentare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\nu-1}$ (al căror număr este mai mare sau egal cu 1, după cum s-a arătat anterior) integrala $\overline{\eta}(x)$ se anulează, pe cînd $y_0(x)$ ia valori diferite de zero.

Referindu-ne întîi la numerele $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$, constatăm că ele reprezintă pentru funcția $y_0(x)$ rădăcini de ordin par. Această afirmație se justifică îndată, ținînd seamă ca $p_{i_1}^{**} = p_{i_2}^{**} = \ldots = p_{i_\alpha}^{**} = 0$, precum și de (35) și (36). Din contră, funcția $\overline{\eta}(x)$ nu se anulează în nici unul din punctele $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$. Prin felul cum a fost aleasă integrala $\overline{\eta}(x)$ dintre integralele $\eta(x)$ și $-\eta(x)$, rezultă că în vecinătăți suficient de mici ale punctelor $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$, cu excepția însă a mijloacelor acestor vecinătăți, are loc relația

$$\operatorname{sgn}\{\overline{\eta}(x)\} = \operatorname{sgn}\{y_0(x)\}.$$

Din aceste constatări rezultă că dacă parametrul ε este pozitiv și inferior unui anumit prag, atunci în fiecare din vecinătățile respective ale numerelor $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$, curbele (Γ) și (Γ_ε) se vor intersecta în cîte două puncte distincte. Vom nota abscisele acestor puncte de intersecție, respectiv cu $\overline{x}_{i_1}, \overline{\overline{x}}_{i_1}, \overline{x}_{i_2}, \overline{\overline{x}}_{i_2}, \ldots, \overline{x}_{i_\alpha}, \overline{\overline{x}}_{i_\alpha}$.

Apoi, referindu-ne la rădăcinile $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, le vom împărți în două submulțimi precum urmează. Vom nota cu $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \ldots, x_{j_{k_\gamma}}$ acele rădăcini x_j, pentru care numărul π_j corespunzător este egal cu 1, și cu $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \ldots, x_{j_{l_\delta}}$ acelea, pentru care numărul π_j corespunzător este mai mare ca 1.

Observăm, ținînd seamă de (35) și (36), că au loc egalitățile:

$$\begin{array}{c} \pi_{j_{k_1}} = p_{j_{k_1}} = p_{j_{k_1}}^{*} = p_{j_{k_1}}^{**} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi_{j_{k_\gamma}} = p_{j_{k_\gamma}} = p_{j_{k_\gamma}}^{*} = p_{j_{k_\gamma}}^{**} = 1. \end{array} \tag{41}$$

De aici și din (40), rezultă că numerele $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \ldots, x_{j_{k_\gamma}}$ reprezintă pentru $y_0(x)$ și $\overline{\eta}(x)$ rădăcini simple, și deci că $y_0'(x)$ și $\overline{\eta}'(x)$ iau valori diferite de zero pentru fiecare din ele. Rezultă de aici că dacă parametrul $\varepsilon > 0$ este inferior unui anumit prag, atunci curbele (Γ) și (Γ_ε) se vor intersecta în punctele $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \ldots, x_{j_{k_\delta}}$, traversîndu-se reciproc în aceste puncte.

În sfîrșit, referindu-ne la rădăcinile rămase $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \ldots, x_{j_{l_\delta}}$, observăm, ținînd seamă de (35) și (36), că pentru ele au loc relațiile:

$$0 < p_{j_{l_1}}^{**} \leqq \pi_{j_{l_1}} - 2; \quad 0 < p_{j_{l_2}}^{**} \leqq \pi_{j_{j_2}} - 2; \ldots, 0 < p_{j_{l_\delta}}^{**} \leqq \pi_{j_{l_\delta}} - 2.$$

care ne arată (ținînd seamă de (38)), că fiecare din numerele $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \ldots, x_{j_{l_\delta}}$ reprezintă rădăcină atît pentru funcția $\overline{\eta}(x)$ cît și pentru $y_0(x)$ — și că ordinul uneia oarecare dintre aceste rădăcini, referitor la funcția $\overline{\eta}(x)$, este mai mic cu cel puțin două unități decît ordinul aceleiași rădăcini relativ la funcția $y_0(x)$. Pe de altă parte, după cum s-a specificat anterior, numerele $p_{j_{l_1}}^{**}, p_{j_{l_2}}^{**}, \ldots, p_{j_{l_\delta}}^{**}$ sînt respectiv de aceeași paritate cu numerele $\pi_{j_{l_1}}, \pi_{j_{l_2}}, \ldots, \pi_{j_{l_\delta}}$.

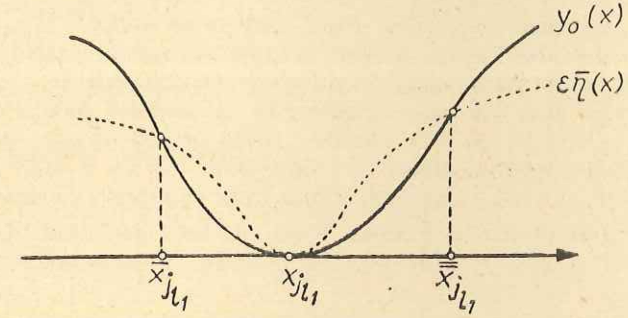

Fig. 7

Din aceste constatări, rezultă următoarele:

1°. Oricare ar fi valoarea parametrului ε, funcțiile $y_0(x)$ și $\varepsilon\overline{\eta}(x)$ iau valori egale în punctele $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \ldots, x_{j_{l_\delta}}$, coincidența avînd loc respectiv pînă la derivatele lor de ordin $p_{j_{l_1}}^{**} - 1, p_{j_{l_2}}^{**} - 1, \ldots$ $\ldots, p_{j_{l_\delta}}^{**} - 1$. Deci curbele (Γ) și (Γ_ε) vor prezenta în aceste puncte, contacte de tangență respectiv de ordine $p_{j_{l_1}}^{**} - 1,\ p_{j_{l_2}}^{**} - 1, \ldots, p_{j_{l_\delta}}^{**} - 1$.

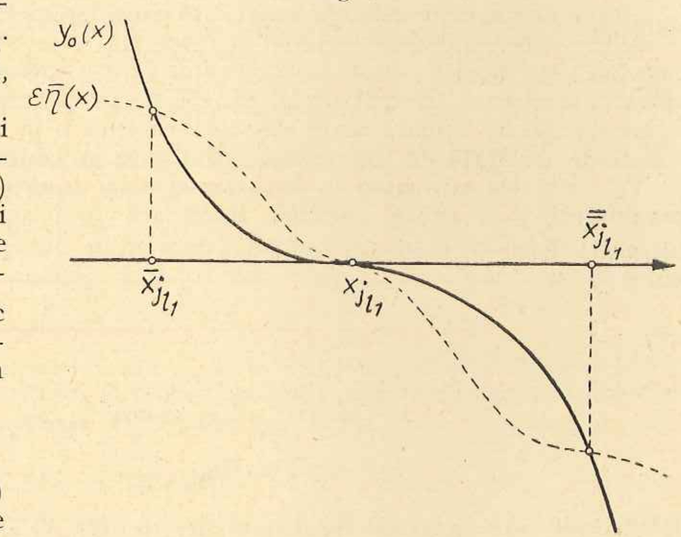

Fig. 8

2°. Dacă parametrul $\varepsilon > 0$ este suficient de mic, atunci funcțiile $y_0(x)$ și $\varepsilon\overline{\eta}(x)$ vor mai lua valori egale în încă 2δ puncte, situate cîte două în vecinătăți suficient de mici ale numerelor $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \ldots, x_{j_{l_\delta}}$. Vom nota abscisele acestor puncte de intersecție, respectiv cu $\overline{x}_{j_{l_1}}, \overline{\overline{x}}_{j_{l_1}}, \overline{x}_{j_{l_2}}, \overline{\overline{x}}_{j_{l_2}}, \ldots, \overline{x}_{j_\delta}, \overline{\overline{x}}_{j_\delta}$ (fig. 7 sau 8). Această afirmație se bazează pe următoarea lemă:

L e m a 8. *Dacă două funcții* $f(x)$ *și* $g(x)$ *definite într-un interval* (a, b), *au următoarele proprietăți :*

1°. *admit în* (a, b) *derivate continue de ordinul* p *respectiv* $p + 2k$, *unde* $k \geqq 1$,

2°. *posedă în intervalul* (a, b) *o rădăcină comună* x_0, *care pentru* $f(x)$ *este multiplă de ordinul* p, *iar pentru* $g(x)$ *este multiplă de ordinul* $p + 2k$,

3°. $\operatorname{sgn}\{f^{(p)}(x_0)\} = \operatorname{sgn}\{g^{(p+2k)}(x_0)\} \neq 0$.

În aceste condiții, fiind dată o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *conținută în intervalul* (a, b), *pentru această vecinătate există un prag* $E > 0$, *astfel încît dacă parametrul* ε *satisface inegalitățile* $0 < \varepsilon < E$, *atunci funcțiile* $\varepsilon f(x)$ *și* $g(x)$ *iau valori comune în cel puțin 3 puncte distincte din vecinătatea* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *considerată. Unul dintre aceste puncte este* x_0, *în care curbele corespunzătoare prezintă între ele un contact de tangență de ordinul* $p - 1$, *iar în celelalte două puncte de intersecție curbele se traversează reciproc.*

Demonstrația acestei leme se face cu ușurință, dezvoltînd funcțiile $\varepsilon f(x)$ și $g(x)$ cu formula lui Taylor în punctul x_0.

*

* *

Revenind la demonstrația lemei 7, să considerăm funcția $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\bar{\eta}(x)$, care reprezintă evident o integrală a ecuației diferențiale (1) și care nu este identic nulă în intervalul (a, b), întrucît — după cum s-a arătat anterior — funcțiile $y_0(x)$ și $\varepsilon\bar{\eta}(x)$ nu pot să coincidă identic în intervalul (a, b), oricare ar fi valoarea pe care o ia parametrul ε. Ținînd seamă de constatările anterioare, privitoare la comportarea curbelor (Γ) și (Γ_ε) între ele, ajungem în baza lemei 8 la următoarea concluzie. Dacă parametrul ε ia valori pozitive, inferioare unui anumit prag E, atunci integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ se anulează pentru următoarele valori distincte[6]) din intervalul (a, b) :

$$\begin{array}{l} \bar{x}_{i_1},\ \bar{\bar{x}}_{i_1},\ \bar{x}_{i_2},\ \bar{\bar{x}}_{i_2},\ \ldots\ldots,\ \bar{x}_{i_\alpha},\ \bar{\bar{x}}_{i_\alpha} \\ x_{j_{k_1}},\ x_{j_{k_2}},\ \ldots,\ x_{j_{k_\gamma}} \\ \bar{x}_{j_{l_1}},\ \bar{\bar{x}}_{j_{l_1}},\ \bar{x}_{j_{l_2}},\ \bar{\bar{x}}_{j_{l_2}},\ \ldots\ldots,\ \bar{x}_{j_{l_\delta}},\ \bar{\bar{x}}_{j_{l_\delta}} \\ x_{j_{l_1}},\ x_{j_{l_2}},\ \ldots,\ x_{j_{l_\delta}}. \end{array} \tag{42}$$

Rădăcinile care figurează în ultimul șir din (42), au relativ la funcția $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, respectiv ordinele $p^{**}_{j_{l_1}}, p^{**}_{j_{l_2}}, \ldots, p^{**}_{j_{l_\delta}}$. Ținînd seamă de (39), rezultă că aceste ordine sînt cel mult egale cu numărul $k - 1$.

Se constată apoi că numărul total al condițiilor de anulare a integralei $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, corespunzătoare rădăcinilor din (42), este mai mare sau cel puțin egal cu suma :

$$N = 2\alpha + \gamma + 2\delta + p^{**}_{j_{l_1}} + p^{**}_{j_{l_2}} + \ldots + p^{**}_{j_{l_\delta}}. \tag{43}$$

[6]) Valorile scrise în primul și al treilea șir depind de ε.

Vom arăta că această sumă este mai mare sau cel puțin egală cu n. Într-adevăr, ținînd seamă de faptul că numerele $p^{**}_{i_1}, p^{**}_{i_2}, \ldots, p^{**}_{i_\alpha}$ sînt toate egale cu zero (prin ipoteză), rezultă din (36) că numerele $p^{*}_{i_1}, p^{*}_{i_2}, \ldots, p^{*}_{i_\alpha}$ sînt toate egale cu 2, și apoi din (35) — că numerele $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_\alpha}$ sînt mai mici sau cel mult egale cu 2. Din această ultimă afirmație rezultă inegalitatea

$$2\alpha \geqq p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_\alpha}. \tag{44}$$

În continuare, din (41) rezultă egalitatea :

$$\gamma = p_{j_{k_1}} + p_{j_{k_2}} + \ldots + p_{j_{k_\gamma}}, \tag{45}$$

și în sfîrșit, din (36) rezultă inegalitățile :

$$p^{**}_{j_{l_1}} \geqq p^{*}_{j_{l_1}} - 2,\quad p^{**}_{j_{l_2}} \geqq p^{*}_{j_{l_2}} - 2,\ \ldots,\ p^{**}_{j_{l_\delta}} \geqq p^{*}_{j_{l_\delta}} - 2. \tag{46}$$

Adunînd membru cu membru inegalitățile (46), obținem :

$$2\delta + p^{**}_{j_{l_1}} + p^{**}_{j_{l_2}} + \ldots + p^{**}_{j_{l_\delta}} \geqq p^{*}_{j_{l_1}} + p^{*}_{j_{l_2}} + \ldots + p^{*}_{j_{l_\delta}}. \tag{47}$$

Apoi, ținînd seamă de inegalitățile $p^*_i \geqq p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, care rezultă din (35), se deduce din (47) inegalitatea :

$$2\delta + p^{**}_{j_{l_1}} + p^{**}_{j_{l_2}} + \ldots + p^{**}_{j_{l_\delta}} \geqq p_{j_{l_1}} + p_{j_{l_2}} + \ldots + p_{j_{l_\delta}}. \tag{48}$$

Adunînd membru cu membru inegalitățile (44), (45), (48) obținem inegalitatea :

$$N \geqq (p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_\alpha}) + (p_{j_{k_1}} + p_{j_{k_2}} + \ldots + p_{j_{k_\gamma}}) + \\ + (p_{j_{l_1}} + p_{j_{l_2}} + \ldots + p_{j_{l_\delta}}). \tag{49}$$

Cum însă printre indicii $i_1, i_2, \ldots, i_\alpha$; $j_{k_1}, j_{k_2}, \ldots, j_{k_\gamma}$; $j_{l_1}, j_{l_2}, \ldots, j_{l_\delta}$, figurează fiecare din indicii $1, 2, \ldots, m$, o dată și numai o dată, rezultă că expresia din membrul doi al inegalității (49) reprezintă suma numerelor p_i corespunzătoare tuturor rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ considerate, ale integralei $y_0(x)$.

Astfel inegalitatea (49) se transcrie :

$$N \geqq p_1 + p_2 + \ldots + p_m. \tag{49'}$$

Conform însă primei relații din (28), rezultă că suma din membrul drept al inegalității (49') este egală cu numărul n, astfel că inegalitatea (49) devine $N \geqq n$, sau, ținînd seamă de (43) :

$$N = 2\alpha + \gamma + 2\delta + p^{**}_{j_{l_1}} + p^{**}_{j_{l_2}} + \ldots + p^{**}_{j_{l_\delta}} \geqq n. \tag{50}$$

În definitiv se obține următorul rezultat :

Integrala neidentic nulă $\tilde{y}(x)$ a ecuației diferențiale (1), se anulează în intervalul (a, b), cel puțin pentru valorile indicate în tabloul (42) — toate aceste valori fiind distincte. Rădăcinile $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \ldots, x_{j_{l_\delta}}$ care figurează în ultimul şir din (42), au relativ la integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, ordinele de multiplicitate, respectiv $p_{j_{l_1}}^{**}, p_{j_{l_2}}^{**}, \ldots, p_{j_{l_\delta}}^{**}$, satisfăcînd inegalitatea

$$\max\{p_{j_{l_1}}^{**}, p_{j_{l_2}}^{**}, \ldots, p_{j_{l_\delta}}^{**}\} \leqq k-1,$$

care rezultă din (39). Celelalte rădăcini ale integralei $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, care figurează în tabloul (42), au ordine mai mari sau cel puţin egale cu 1. Are loc de asemenea inegalitatea (50).

Ţinînd seamă de lema 1, aceste rezultate obţinute cu privire la integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ sînt în contradicţie cu ipoteza că familia Y_n posedă proprietăţile $I_n^{(1)}(a, b), I_n^{(2)}(a, b), \ldots, I_n^{(k-1)}(a, b)$.

Rezultă în definitiv că dacă familia Y_n are proprietăţile (33), atunci Y_n are şi proprietatea $I_n^{(k)}(a, b)$.

*

* *

În continuare, vom demonstra următoarea lemă :

Lema 9. *Dacă familia Y_n are toate proprietăţile indicate în* (33), *atunci acea familie are şi proprietatea $P_n^{(k)}(a, b)$.*

Demonstraţie. Fie $y_0(x)$ o integrală neidentic nulă în (a, b), a ecuaţiei diferenţiale (1), care în m puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ din intervalul (a, b), satisface condiţiile (29) şi (30). Să notăm cu $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$. Vrem să demonstrăm că în ipoteza că Y_n are proprietăţile (33), au loc relaţiile (31), adică egalităţile

$$\pi_1 = p_1, \pi_2 = p_2, \ldots, \pi_m = p_m.$$

Observăm de la început că integrala $y_0(x)$ considerată, nu poate avea în intervalul (a, b) alte rădăcini, în afară de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, întrucît în caz contrar s-ar contrazice afirmaţia lemei 7. Vom presupune în cele ce urmează că $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$.

Cu aceste precizări, vom demonstra întîi că :

În ipotezele adoptate, numerele $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ şi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt respectiv de aceeaşi paritate. (51)

În acest scop, considerăm integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\bar{\eta}(x)$, unde $y_0(x)$ este integrala aleasă anterior, iar $\bar{\eta}(x)$ este tot o integrală a ecuaţiei diferenţiale (1), construită relativ la rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$, după procedeul utilizat anterior în demonstraţia lemei 7. Vom ţine totuşi seamă de următoarele deosebiri referitoare la integrala $y_0(x)$, care au loc în cazul prezentei leme.

Întîi, este de remarcat că în locul primei egalităţi din (28), se consideră în cazul de faţă egalitatea $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n - 1$, după cum se

indică în (30). Apoi, din a doua relaţie (30) rezultă că cel puţin unul din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_m$ este egal cu numărul k. Aici, spre deosebire de cazul lemei 7, vom lua în consideraţie şi cazul cînd numai unul din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_m$ este egal cu numărul k, toate celelalte fiind mai mici decît k.

Întrucît prin ipoteză avem $k > 2$, rezultă, ţinînd seamă de (35) şi (36), că cel puţin pentru unul din indicii i, are loc inegalitatea strictă $p_i^{**} < p_i$. De aici, ţinînd seama de inegalităţile $p_i^{**} \leqq p_i$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, care rezultă tot din (35) şi (36), şi apoi de prima relaţie din (30), deducem inegalitatea $\sum_{i=1}^{m} p_i^{**} \leqq n - 2$, din care rezultă în mod evident inegalitatea :

$$\nu = p_{j_1}^{**} + p_{j_2}^{**} + \ldots + p_{j_\beta}^{**} \leqq n - 2. \tag{52}$$

Această inegalitate este analoagă inegalităţii (37'), stabilită cu ocazia demonstrării lemei 7. Întocmai ca acolo, se aleg după voie $n - \nu - 1$ noduri distincte $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-\nu-1}$ din intervalul (x_m, b). Ţinînd seamă de (52), numărul acestor noduri suplimentare satisface inegalitatea $n - \nu - 1 \geqq 1$. Pentru cele ce vor urma, este util să relevăm faptul că integrala $y_0(x)$, nu se poate anula pentru nici una din valorile $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\nu-1}$ alese, întrucît — după cum s-a arătat anterior — această integrală nu are în intervalul (a, b) alte rădăcini în afară de $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

În continuare, vom considera o integrală neidentic nulă $\eta(x)$, care să satisfacă condiţiile (38) referitoare la rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$, şi referitoare la nodurile $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\nu-1}$ alese. Ca şi în cazul lemei 7, se arată că în ipotezele adoptate, cel puţin una din integralele $\eta(x)$ sau $-\eta(x)$ va avea acelaşi semn ca şi $y_0(x)$ în vecinătăţi suficient de mici ale punctelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$, eventual cu excepţia mijloacelor acestor vecinătăţi. Notînd cu $\bar{\eta}(x)$ pe aceea care satisface acest deziderat, vom considera $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\bar{\eta}(x)$. Se constatată de asemenea că oricare ar fi valoarea parametrului ε, funcţiile $y_0(x)$ şi $\varepsilon\bar{\eta}(x)$ nu pot fi egale identic în intervalul (a, b), şi deci integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ nu poate fi identic nulă în acest interval. Tot ca şi în demonstraţia lemei 7, se arată că dacă parametrul ε este pozitiv şi inferior unui anumit prag, atunci integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ se va anula în nişte puncte distincte din intervalul (a, b), indicate în tabloul (42). Rădăcinile care figurează în ultimul şir din (42), au relativ la integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, ordinele de multiplicitate $p_{j_{l_1}}^{**}, p_{j_{l_2}}^{**}, \ldots, p_{j_{l_\delta}}^{**}$. După cum rezultă din (39), aceste ordine satisfac relaţia

$$\max\{p_{j_{l_1}}^{**}, p_{j_{l_2}}^{**}, \ldots, p_{j_{l_\delta}}^{**}\} \leqq k - 1. \tag{53}$$

Se constată că numărul condiţiilor de anulare a integralei $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, corespunzătoare rădăcinilor scrise în tabloul (42), este cel puţin egal cu suma

$$N = 2\alpha + \gamma + 2\delta + p_{j_{l_1}}^{**} + p_{j_{l_2}}^{**} + \ldots + p_{j_{l_\delta}}^{**}. \tag{54}$$

Se arată, la fel ca în demonstrația lemei 7, că au loc inegalitățile (44), (45), (46), (47), (48), (49), precum și inegalitatea

$$N \geqq p_1 + p_2 + \ldots + p_m \tag{55}$$

care este analoagă inegalității (49′). Din această ultimă inegalitate, ținînd seamă de prima relație din (30), obținem inegalitatea

$$N \geqq n - 1. \tag{56}$$

Trecem acum la demonstrarea efectivă a proprietății (51). Presupunem prin absurd contrariu, că printre rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$, ar exista cel puțin o rădăcină x_τ pentru care numerele p_τ și π_τ corespunzătoare ar fi de parități diferite.

Ținînd seamă de relația de definiție (35), rezultă că

$$p_\tau^* = p_\tau + 1 \tag{57}$$

și întrucît $p_\tau \geqq 1$, rezultă din (57) că $p_\tau^* \geqq 2$, și apoi din (36) că

$$p_\tau^{**} = p_\tau^* - 2 = p_\tau - 1. \tag{58}$$

Se pot prezenta următoarele două cazuri, după cum $p_\tau^{**} = 0$ sau $p_\tau^{**} > 0$.

Cazul 1 : $p_\tau^{**} = 0$. În acast caz, din (58) se deduce egalitatea

$$p_\tau = 1. \tag{59}$$

Pe de altă parte, întrucît am presupus că $p_\tau^{**} = 0$, rezultă că indicele τ reprezintă unul din indicii $i_1, i_2, \ldots, i_\alpha$. Apoi ținînd seamă de faptul că numerele $p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \ldots, p_{i_\alpha}^{**}$ sînt toate egale cu zero, rezultă din (36) că numerele $p_{i_1}^*, p_{i_2}^*, \ldots, p_{i_\alpha}$ sînt toate egale cu 2, și din (35) — că numerele $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots$ $\ldots, p_{i_\alpha}$ sînt mai mici sau cel puțin egale cu 2. De aici, ținînd seamă și de egalitatea (59), rezultă inegalitatea strictă

$$2\alpha > p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_\alpha} \tag{60}$$

analoagă inegalității (44), cu deosebirea că în locul semnului $\geqq$, figurează în cazul de față semnul inegalității stricte.

Urmînd raționamentul care ne-a condus de la egalitatea (43) la inegalitatea (49′), ajungem la concluzia că în cazul de față, datorită inegalității stricte (60), în relația (49′) va figura semnul inegalității stricte, în locul semnului $\geqq$. Astfel se va obține în definitiv inegalitatea strictă $N > p_1 + p_2 + \ldots + p_m$, din care, ținînd seama de prima relație din (30), va rezulta inegalitatea

$$N > n - 1, \tag{61}$$

care ne arată că numărul condițiilor de anulare pe care le satisface integrala neidentic nulă $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, referitor la rădăcinile indicate în tabloul (42), este mai mare sau cel puțin egal cu n. În același timp însă, are loc și relația (53). Conform lemei 1, această situație este în contradicție cu proprietățile $I_n^{(1)}(a, b), I_n^{(2)}(a, b), \ldots, I_n^{(k-1)}(a, b)$ ale familiei Y_n, presupuse adevărate prin ipoteză.

Cazul 2 : $p_\tau^{**} \geqq 1$. În acest caz, din (58) deducem că $p_\tau \geqq 2$ și de aici, *a fortiori*, inegalitatea $\pi_\tau \geqq 2$. Conform precizărilor anterioare, rezultă că indicele τ reprezintă unul din indicii $j_{l_1}, j_{l_2}, \ldots, j_{l_\delta}$. Apoi, în altă ordine de idei, ținînd seamă de egalitatea (57), precum și de inegalitățile $p_i^* \geqq p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, care rezultă din (35), deducem prin adunare membru cu membru a inegalităților (46), următoarea inegalitate strictă :

$$2\delta + p_{j_{l_1}}^{**} + p_{j_{l_2}}^{**} + \ldots + p_{j_{l_\delta}}^{**} > p_{j_{l_1}} + p_{j_{l_2}} + \ldots + p_{j_{l_\delta}} \tag{62}$$

analoagă cu inegalitatea (48).

Urmînd raționamentul care ne-a condus de la egalitatea (43) la inegalitatea (49′), ajungem la concluzia că datorită inegalității stricte (62), va avea loc în locul inegalității (49′), inegalitatea strictă $N > p_1 + p_2 + \ldots + p_m$, și în baza primei relații din (30) — inegalitatea strictă $N > n - 1$. Această inegalitate ne arată că numărul condițiilor de anulare pe care le satisface integrala neidentic nulă $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, referitor la rădăcinile indicate în tabloul (42), este cel puțin egal cu n. Însă în același timp, are loc și relația (53). Această circumstanță este în contradicție cu proprietățile $I_n^{(1)}(a, b)$, $I_n^{(2)}(a, b), \ldots, I_n^{(k-1)}(a, b)$ ale familiei Y_n, presupuse adevărate prin ipoteză.

În concluzie, întrucît cele două cazuri epuizează toate cazurile posibile relative la p_τ^{**}, rezultă din examinarea lor proprietatea (51), q.e.d.

*

În continuare, considerăm o integrală neidentic nulă $y_0(x)$, a ecuației (1), care în m puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ din intervalul (a, b), satisface condițiile (29) și (30). Notăm respectiv cu $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$. Vom demonstra următoarea proprietate :

Dacă familia Y_n are proprietățile (33), *atunci în ipoteza că integrala $y_0(x)$ satisface condițiile* (29) *și* (30), *rezultă că această integrală satisface relațiile* (31). (67)

Pentru a demonstra această proprietate, să presupunem prin absurd că $y_0(x)$ nu ar satisface relațiile (31). Atunci, cel puțin pentru una din rădăcinile x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, va avea loc inegalitatea strictă $\pi_i > p_i$. Pentru fixarea ideilor, vom presupune că această rădăcină corespunde indicelui 1, adică

$$\pi_1 > p_1. \tag{68}$$

În aceste ipoteze, observăm de la început că dacă $p_1 < k$, atunci, ținînd seamă de (68), vom putea considera referitor la rădăcina x_1, în locul numărului p_1, numărul $p_1 + 1$ (care este mai mic sau cel mult egal cu k), şi prin această înlocuire, suma ce figurează în prima relaţie din (30) va fi egală cu n. Astfel, conform lemei 1, s-ar contrazice proprietatea $I_n^{(k)}(a, b)$ a familiei Y_n, proprietate asigurată de lema 7.

Rezultă în definitiv inegalitatea $p_1 \geqq k$, şi cum prin ipoteză are loc a doua relaţie din (30), rezultă egalitatea

$$p_1 = k. \tag{69}$$

Ţinînd seamă de relaţiile (68) şi (69), rezultă inegalitatea strictă $\pi_1 > k$ şi apoi, ţinînd seamă de proprietatea (51) stabilită anterior, va rezulta inegalitatea

$$\pi_1 \geqq k + 2. \tag{70}$$

În ceea ce priveşte numărul k, observăm că neapărat trebuie să aibă loc inegalitatea

$$k \leqq n - 3, \tag{71}$$

întrucît, în caz contrar, adică în cazul $k > n - 3$, ar rezulta din (70) că $\pi_1 > n - 1$ şi deci că x_1 este o rădăcină multiplă de ordin cel puţin egal cu n pentru integrala $y_0(x)$. Acest rezultat ar fi însă incompatibil cu ipoteza că $y_0(x)$ nu este identic nulă în intervalul (a, b).

Referitor la ordinele $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$, vom distinge următoarele două cazuri.

Cazul 1 : $\pi_1 \geqq k + 2$; $\pi_2 = \pi_3 = \ldots = \pi_m = 1$, $(2 < k \leqq n-3)$.

În acest caz, în fiecare din punctele $x_2, x_3, \ldots, x_m$ curba de ecuaţie $y = y_0(x)$ va traversa axa Ox, întrucît funcţia $y_0(x)$ îşi schimbă semnul în aceste puncte. Fie ε un număr real nenul şi fie $\mu_\varepsilon(x)$ integrala ecuaţiei (1), care satisface în punctul x_1 următoarele condiţii ale lui Cauchy :

$$\begin{gathered} \mu_\varepsilon(x_1) = y_0(x_1) = 0; \quad \mu_\varepsilon' (x_1) = y_0' (x_1) = 0; \ldots \\ \ldots, \mu_\varepsilon^{(k)}(x_1) = y_0^{(k)}(x_1) = 0; \quad \mu_\varepsilon^{(k+1)}(x_1) = \varepsilon; \\ \mu_\varepsilon^{(k+2)}(x_1) = y_0^{(k+2)}(x_1); \ \ldots, \ \mu_\varepsilon^{(n-1)}(x_1) = y_0^{(n-1)}(x_1). \end{gathered} \tag{72}$$

Spus în cuvinte, integrala $\mu_\varepsilon(x)$ satisface în punctul x_1 aceleaşi condiţii ale lui Cauchy ca şi $y_0(x)$, cu excepţia derivatei de ordinul $k+1$, care ia valoarea $\varepsilon \neq 0$ în cazul funcţiei $\mu_\varepsilon(x)$, pe cînd în cazul integralei $y_0(x)$ această derivată ia valoarea zero.

Dacă parametrul ε este mic în valoare absolută, atunci condiţiile lui Cauchy pe care le satisface integrala $\mu_\varepsilon(x)$ sînt apropiate de condiţiile lui Cauchy, pe care le satisface $y_0(x)$, şi dacă ε tinde către zero atunci $\mu_\varepsilon(x)$ va tinde uniform către $y_0(x)$ în orice interval închis $[a_1, b_1]$, conţinut în (a, b).

Întrucît curba de ecuaţie $y = y(x)$ traversează axa Ox în punctele $x_2, x_3, \ldots, x_m$, rezultă că oricît de mici s-ar alege nişte vecinătăţi ale acestor rădăcini, va exista pentru ele un prag E, astfel încît oricare ar fi numărul ε

satisfăcînd inegalităţile $0 < \varepsilon < E$, curba integrală $y = \mu_\varepsilon(x)$ corespunzătoare numărului ε astfel ales, să traverseze axa Ox în fiecare din vecinătăţile alese în cîte un punct. Vom nota abscisele acestor puncte de intersecţie cu $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_m$. În plus, după cum se constată din relaţiile (72), integrala $\mu_\varepsilon(x)$ mai admite rădăcina x_1, cu ordinul de multiplicitate $k + 1$. Rezultă deci că integrala $\mu_\varepsilon(x)$ are în intervalul (a, b) rădăcina $\bar{x}_1 = x_1$ multiplă de ordinul $k + 1$ şi alte $m - 1$ rădăcini distincte $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_m$, diferite de x_1 şi avînd ordine impare de multiplicitate. Pentru aceste m rădăcini $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ ale integralei $\mu_\varepsilon(x)$, sînt satisfăcute condiţiile (29) şi (30), relativ la integrala $\mu_\varepsilon(x)$ cu numerele $\bar{p}_1 = k$, $\bar{p}_2 = \bar{p}_3 = \ldots = \bar{p}_m = 1$, aceasta întrucît au loc egalităţile $\bar{p}_1 = p_1$, $\bar{p}_2 = p_2, \ldots, \bar{p}_m = p_m$, care rezultă din (69), precum şi din ipoteza $\pi_2 = \pi_3 = \ldots = \pi_m = 1$, specifică cazului considerat. Însă ordinul de multiplicitate al rădăcinii x_1 relativ la integrala $\mu_\varepsilon(x)$ este prin ipoteză $\bar{\pi}_1 = k + 1$, după cum arată egalitatea (72). Rezultă deci că pentru rădăcina x_1 a integralei $\mu_\varepsilon(x)$, numerele $\bar{p}_1 = k$ şi $\pi_1 = k + 1$ sînt de parităţi diferite. Acest rezultat contrazice însă proprietatea (51) stabilită anterior. Contradicţia provine din ipoteza falsă (68). Prin înlăturarea ei, rezultă afirmaţia (67), q.e.d.

Cazul 2 : $\pi_1 \geqq k + 2$; $\max\{\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_m\} \geqq 2$; $(2 < k < n - 2)$.

Întocmai ca mai sus, vom presupune prin absurd că cel puţin pentru una din rădăcinile x_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, are loc inegalitatea $\pi_i > p_i$. Pentru fixarea ideilor, vom presupune că această rădăcină este x_1, adică are loc inegalitatea (68).

Vom asocia numerelor $p_2, p_3, \ldots, p_m$ (cu excepţia lui $p_1 = k$), respectiv numerele $p_2^{**}, p_3^{**}, \ldots, p_m^{**}$ definite de relaţiile (35) şi (36). Din aceste relaţii şi din proprietatea (51) stabilită anterior, rezultă :

$$p_i^{**} = \begin{cases} p_i - 2, & \text{dacă } p_i > 1 \\ p_i, & \text{dacă } p_i = 1 \end{cases} \quad (i = 2, 3, \ldots, m). \tag{73}$$

Să arătăm că în ipotezele adoptate, cel puţin pentru unul din indicii $i = 2, 3, \ldots, m$ are loc egalitatea $p_i^{**} = p_i - 2$. Într-adevăr, ţinînd seamă de (73), va fi suficient să arătăm că cel puţin unul dintre numerele $p_2, p_3, \ldots, p_m$ este mai mare ca numărul 1, adică

$$\max\{p_2, p_3, \ldots, p_m\} \geqq 2. \tag{73'}$$

Să presupunem prin absurd că $p_2 = p_3 = \ldots = p_m = 1$. De aici, conform proprietăţii $I_n^{(k)}(a, b)$ a familiei Y_n (proprietate stabilită de lema 7), rezultă neapărat egalităţile $\pi_2 = \pi_3 = \ldots = \pi_m = 1$, care contrazic ipoteza $\max\{\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_m\} \geqq 2$, specifică cazului considerat. Rezultă deci că cel puţin pentru unul dintre indicii $i = 2, 3, \ldots, m$ are loc egalitatea $p_i^{**} = p_i - 2$. De aici şi din (73) rezultă inegalitatea

$$\nu = p_1 + \sum_{i=2}^{m} p_i^{**} \leqq p_1 + \left(\sum_{i=2}^{m} p_i\right) - 2. \tag{74}$$

Ținînd seamă de egalitatea $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n - 1$ din (30), rezultă din (74) inegalitatea

$$\nu = p_1 + \sum_{i=2}^{m} p_i^{**} \leqq n - 3. \tag{75}$$

Presupunînd că rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ale integralei $y_0(x)$ considerate, satisfac inegalitățile

$$x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_m, \tag{76}$$

vom alege în intervalul (x_m, b), $n - \nu - 1$ noduri distincte

$$\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_{n-\nu-1}. \tag{77}$$

Ținînd seamă de (75), rezultă inegalitatea $n - \nu - 1 \geqq 2$, care ne arată că mulțimea nodurilor suplimentare (77) nu este vidă.

Fie acum $\eta(x)$ o integrală neidentic nulă a ecuației (1), care să satisfacă următoarele condiții:

$$\begin{aligned}
&\eta(x_1) = \eta'(x_1) = \ldots\ldots = \eta^{(k-1)}(x_1) = 0\\
&\eta(x_2) = \ldots. = \eta^{(p_2^{**}-1)}(x_2) = 0\\
&\eta(x_3) = \ldots. = \eta^{(p_3^{**}-1)}(x_3) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\eta(x_m) = \ldots. = \eta^{(p_m^{**}-1)}(x_m) = 0\\
&\eta(\xi_1) = \eta(\xi_2) = \ldots\ldots = \eta(\xi_{n-\nu-1}) = 0.
\end{aligned} \tag{78}$$

Dintre aceste condiții, acelea care corespund numerelor x_i pentru care $p_i^{**} = 0$, nu au sens și în consecință vom face abstracție de ele. Ținînd seamă de (69) și (74), se constată că numărul condițiilor de anulare din (78) este egal cu

$$k + \left(\sum_{i=2}^{m} p_i^{**}\right) + n - \nu - 1 = \nu + (n - \nu - 1) = n - 1. \tag{79}$$

Mai observăm că cel mai înalt ordin de derivare care intervine în (78) este egal cu numărul $k - 1$, ceea ce rezultă din (73) și din a doua relație din (30). Conform proprietății $I_n^{(k)}(a, b)$ a familiei Y_n (stabilită în lema 7), rezultă existența unei astfel de integrale neidentic nule $\eta(x)$, care să satisfacă condițiile (78).

Vom împărți mulțimea rădăcinilor $x_2, x_3, \ldots, x_m$ în două categorii, precum urmează: Notăm cu $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$ acele rădăcini x_i, pentru care numărul p_i corespunzător satisface egalitatea $p_i = 1$[7], și cu $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$ acele rădăcini x_j, pentru care numărul corespunzător p_j satisface

[7]) Mulțimea acestor rădăcini ar putea să fie vidă.

inegalitatea $p_j > 1$. Evident că $\alpha + \beta = m - 1$, întrucît nu s-a luat în seamă rădăcina x_1. Ținînd seamă de formulele (73), obținem egalitățile

$$\begin{aligned}
&p_{i_1}^{**} = p_{i_1} = 1\,;\quad p_{i_2}^{**} = p_{i_2} = 1\,;\ \ldots.;\quad p_{i_\alpha}^{**} = p_{i_\alpha} = 1\\
&p_{j_1}^{**} = p_{j_1} - 2\,;\quad p_{j_2}^{**} = p_{j_2} - 2\,;\ \ldots.;\quad p_{j_\beta}^{**} = p_{j_\beta} - 2.
\end{aligned} \tag{80}$$

Din aceste egalități, ținînd seamă de a doua relație din (30), rezultă relația

$$\max\{p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \ldots, p_{i_\alpha}^{**}\,;\ p_{j_1}^{**}, p_{j_2}^{**}, \ldots, p_{j_\beta}^{**}\} \leqq k - 2. \tag{81}$$

Vom arăta acuma că au loc relațiile:

$$\begin{aligned}
&\eta^{(p_{i_1}^{**})}(x_{i_1}) \neq 0,\quad \eta^{(p_{i_2}^{**})}(x_{i_2}) \neq 0,\ \ldots.,\ \eta^{(p_{i_\alpha}^{**})}(x_{i_\alpha}) \neq 0\\
&\eta^{(p_{j_1}^{**})}(x_{j_1}) \neq 0,\quad \eta^{(p_{j_2}^{**})}(x_{j_2}) \neq 0,\ \ldots.,\ \eta^{(p_{j_\beta}^{**})}(x_{j_\beta}) \neq 0.
\end{aligned} \tag{82}$$

Într-adevăr, neîndeplinirea unei relații oarecare din (82) ar contrazice proprietatea $I_n^{(k)}(a, b)$ a familiei Y_n (adevărată în baza lemei 7), deoarece numărul condițiilor de anulare din (78), pe care le verifică integrala neidentic nulă $\eta(x)$, este egal cu $n - 1$, și deoarece are loc relația (81). Ținînd seamă de (80), relațiile (82) se transcriu:

$$\begin{aligned}
&\eta'(x_{i_1}) \neq 0,\quad \eta'(x_{i_2}) \neq 0,\ \ldots.,\quad \eta'(x_{i_\alpha}) \neq 0\\
&\eta^{(p_{j_1}-2)}(x_{j_1}) \neq 0,\quad \eta^{(p_{j_2}-2)}(x_{j_2}) \neq 0,\ \ldots.,\ \eta^{(p_{j_\beta}-2)}(x_{j_\beta}) \neq 0.
\end{aligned} \tag{83}$$

Aceste relații împreună cu egalitățile (78) ne arată că, referitor la integrala $\eta(x)$, rădăcinile $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$ sînt simple, iar $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$ au respectiv ordinele $p_{j_1} - 2,\ p_{j_2} - 2, \ldots,\ p_{j_\beta} - 2$.[8])

Referindu-ne la integrala $y_0(x)$ și ținînd seamă de egalitățile $p_{i_1} = p_{i_2} = \ldots = p_{i_\alpha} = 1$, deducem pentru aceleași motive ca mai sus, relațiile:

$$y_0'(x_{i_1}) \neq 0,\quad y_0'(x_{i_2}) \neq 0,\ \ldots.,\ y_0'(x_{i_\alpha}) \neq 0,$$

care ne arată că rădăcinile $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$ sînt simple relativ și la integrala $y_0(x)$.

Apoi, în baza proprietății (51) stabilită anterior, rezultă că ordinele de multiplicitate $\pi_{j_1}, \pi_{j_2}, \ldots, \pi_{j_\beta}$ ale rădăcinilor $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$ relativ la integrala $y_0(x)$, sînt de aceeași paritate cu numerele $p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_\beta}$, și ținînd seama de relațiile (78), (80) și (83), rezultă că ele sînt de aceeași paritate cu ordinele acelorași rădăcini $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, relativ la integrala $\eta(x)$.

Tot în baza proprietății (51), se constată că ordinul de multiplicitate al rădăcinii x_1, referitor la integrala $y_0(x)$, este de aceeași paritate cu numă-

[8]) Numerele x_j pentru care $p_j^{**} = 0$ nu sînt rădăcini pentru $\eta(x)$.

rul p_1, care în baza egalității (69) este egal cu k. De asemenea, ordinul de multiplicitate al aceleiași rădăcini x_1, referitor la integrala $\eta(x)$ este de aceeași paritate cu numărul p corespunzător, care, după cum ne arată primul șir de egalități din (78), este egal cu k. În concluzie, rezultă că ordinele de multiplicitate ale rădăcinii x_1, relativ la cele două integrale $y_0(x)$ și $\eta(x)$, sînt de aceeași paritate între ele.

Am obținut în definitiv următorul rezultat:

Ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_m$, relativ la integrala $\eta(x)$, sînt respectiv de aceeași paritate cu ordinele acelorași rădăcini, relativ la integrala $y_0(x)$.

În altă ordine de idei, constatăm că integrala neidentic nulă $y_0(x)$ nu poate avea în intervalul (a, b) alte rădăcini decît $x_1, x_2, \ldots, x_m$, întrucît în caz contrar, ținînd seamă de relațiile (29) și (30), s-ar contrazice proprietatea $I_n^{k(}(a, b)$ a familiei Y_n, proprietate adevărată în baza lemei 7. Pentru aceleași motive, integrala neidentic nulă $\eta(x)$ nu poate avea în intervalul (a, b) alte rădăcini decît $x_1, x_2, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\nu-1}$.

Din toate aceste concluzii, ținînd seamă încă de faptul că toate rădăcinile $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\nu-1}$ ale integralei $\eta(x)$ sînt situate în afara intervalului $[x_1, x_m]$, rezultă că dacă se consideră integralele $\eta(x)$ și $-\eta(x)$, atunci una dintre ele va păstra în vecinătăți suficient de mici ale rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ același semn ca și integrala $y_0(x)$ (cu excepția, eventual, a mijloacelor acestor vecinătăți). Integrala care satisface acest deziderat o vom nota $\overline{\eta}(x)$. Deci $\overline{\eta}(x)$ este neidentic nulă, satisface condițiile (78) și în plus egalitatea

$$\operatorname{sgn}\{\overline{\eta}(x)\} = \operatorname{sgn}\{y_0(x)\},$$

valabilă în vecinătăți suficient de mici ale punctelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$, cu excepția eventual a mijloacelor acestor vecinătăți.

Considerăm acuma curba integrală (Γ) de ecuație $y_0(x)$, și curba integrală (Γ_ε) de ecuație $y = \varepsilon\overline{\eta}(x)$, unde ε este un parametru, luînd valori pozitive. Vom examina în continuare felul în care se situează între ele curbele (Γ) și (Γ_ε), atunci cînd $\varepsilon \to 0^+$.

Referindu-ne întîi la numerele $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$ și ținînd seamă de faptul stabilit anterior, că aceste numere sînt rădăcini simple atît pentru $\overline{\eta}(x)$ cît și pentru $y_0(x)$, rezultă că dacă parametrul ε ia valori pozitive, inferioare unui anumit prag E_1, atunci curbele (Γ) și (Γ_ε) se vor traversa în punctele $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha}$ (fără să fie tangente între ele în aceste puncte).

În continuare, referindu-ne la rădăcinile $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$ și ținînd seamă de relațiile (29), (78) și (83), ajungem la următoarele concluzii:

1°. În punctele $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, curbele (Γ) și (Γ_ε) prezintă contacte de tangență, respectiv de ordine $p_{j_1} - 3, p_{j_2} - 3, \ldots, p_{j_\beta} - 3$, adică funcțiile $y_0(x)$ și $\overline{\eta}(x)$ coincid în aceste puncte, respectiv pînă la derivatele lor de ordinul $p_{j_1} - 3, p_{j_2} - 3, \ldots, p_{j_\beta} - 3$, inclusiv.[9])

[9]) Prin ipoteză numerele $p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_\beta}$ sînt mai mari sau cel puțin egale cu 2. În cazul cînd vreunul dintre aceste numere, de exemplu p_{j_1}, este egal cu 2, rezultatul de mai sus trebuie interpretat astfel: Curba (Γ) are în punctul corespunzător x_{j_1} un contact de ordin

2°. Dacă parametrul ε este suficient de mic, atunci ținînd seamă de faptul că ordinele de multiplicitate $\pi_{j_1}, \pi_{j_2}, \ldots, \pi_{j_\beta}$ ale rădăcinilor $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, relativ la integrala $y_0(x)$, sînt respectiv de aceeași paritate cu ordinele $p_{j_1} - 2, p_{j_2} - 2, \ldots, p_{j_\beta} - 2$, ale acelorași rădăcini relativ la integrala $\overline{\eta}(x)$, și ținînd de asemenea seamă de inegalitățile stricte $\pi_{j_1} > p_{j_1} - 2$, $\pi_{j_2} > p_{j_2} - 2, \ldots, \pi_{j_\beta} > p_{j_\beta} - 2$, va rezulta în baza lemei 8 că dacă parametrul ε este pozitiv și inferior unui anumit prag E_2, atunci în vecinătăți date, suficient de mici, ale punctelor $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, curbele (Γ) și (Γ_ε) se vor mai intersecta în niște puncte $\overline{x}_{j_1}, \overline{\overline{x}}_{j_1}, \overline{x}_{j_2}, \overline{\overline{x}}_{j_2}, \ldots \ldots, \overline{x}_{j_\beta}, \overline{\overline{x}}_{j_\beta}$, diferite între ele și diferite de $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\beta}$, traversîndu-se reciproc în aceste puncte.

În sfîrșit, referindu-ne la rădăcina x_1, din (68), (69) și (78) deducem că oricare ar fi valoarea pe care o ia parametrul ε, curbele (Γ) și (Γ_ε) vor prezenta în acest punct un contact de ordin cel puțin egal cu $k - 1$.

În concluzie, ținînd seamă de cele constate mai sus, ajungem la următorul rezultat:

Dacă parametrul $\varepsilon > 0$ este suficient de mic, atunci integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\overline{\eta}(x)$ a ecuației diferențiale (1), va admite în intervalul (a, b), în afară de rădăcina x_1, multiplă de ordin $\geqq k$, și următoarele rădăcini distincte:

$$\begin{array}{l} x_{i_1},\ x_{i_2}, \ldots\ldots, x_{i_\alpha} \\ x_{j_1}\ x_{j_2}, \ldots\ldots, x_{j_\beta} \\ \overline{x}_{j_1}, \overline{\overline{x}}_{j_1}, \overline{x}_{j_2}\ \overline{\overline{x}}_{j_2}, \ldots\ldots, \overline{x}_{j_\beta}, \overline{\overline{x}}_{j_\beta} \end{array} \tag{84}$$

avînd ordine de multiplicitate respectiv mai mari sau cel puțin egale cu numerele

$$\begin{array}{l} 1, 1, \ldots\ldots, 1 \\ p_{j_1} - 2, p_{j_2} - 2, \ldots\ldots, p_{j_\beta} - 2 \\ 1, 1, 1, 1, \ldots\ldots, 1, 1. \end{array} \tag{85}$$

Suma numerelor care figurează în (85) este egală cu

$$s = \alpha + p_{j_1} + p_{j_2} + \ldots + p_{i_\beta}$$

și ținînd seamă de primele relații din (80), apoi de prima relație din (30) precum și de egalitatea (69), rezultă pentru suma s egalitatea

$$\begin{aligned} s = (p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_\alpha}) + (p_{j_1} + p_{j_2} + \ldots + p_{j_\beta}) &= \\ = n - 1 - p_1 = n - 1 - k. \end{aligned} \tag{86}$$

Referindu-ne la rădăcina x_1 a integralei $\overline{\eta}(x)$ și ținînd seamă de condițiile (78) pe care le satisface această integrală, distingem următoarele două subcazuri după cum $\overline{\eta}^{(k)}(x)$ se anulează sau nu pentru valoarea $x = x_1$.

$\pi_{j_1} - 1$ cu axa Ox, unde π_{j_1} este un număr par mai mare sau cel puțin egal cu 2, iar curba (Γ_ε) nu se intersectează cu axa Ox în vecinătatea acestui punct x_{j_1}, situîndu-se față de această axă de partea în care se situează curba (Γ).

Subcazul 1: $\bar{\eta}(x_1) = \bar{\eta}'(x_1) = \ldots = \bar{\eta}^{(k-1)}(x_1) = 0$; $\bar{\eta}^{(k)}(x_1) \neq 0$.

În acest subcaz, dacă se ţine seamă de inegalitatea $\pi_1 \geqq k + 2$ din (70), precum şi de ipoteza specifică cazului considerat, se constată că curbele (Γ) şi (Γ_ε) prezintă în punctul x_1 un contact de tangenţă de ordinul $k - 1$ (adică coincidenţa funcţiilor $y_0(x)$ şi $\bar{\eta}(x)$ în punctul $x = x_1$ se realizează pînă la derivatele lor de ordinul $k - 1$ inclusiv. Apoi, ţinînd seamă de faptul stabilit anterior că numerele π_1, $(\pi_1 \geqq k + 2)$ şi k, care reprezintă respectiv ordinele de multiplicitate a rădăcinii x_1, relativ la integralele $y_0(x)$ şi $\bar{\eta}(x)$, sînt de aceeaşi paritate, se deduce în baza lemei 8 că dacă parametrul ε ia valori pozitive, inferioare unui anumit prag E_2, atunci în vecinătatea punctului x_1 curbele (Γ) şi (Γ_ε) se vor intersecta în încă două puncte distincte $\bar{x}_1$ *şi* $\bar{\bar{x}}_1$ din intervalul (a, b), diferite de x_1 şi de punctele din (84). Ţinînd seamă de acestea, rezultă în definitiv că dacă parametrul ε ia valori pozitive şi suficient de mici, atunci integrala $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\bar{\eta}(x)$ satisface referitor la punctele x_1, $\bar{x}_1$, $\bar{\bar{x}}_1$ şi la punctele din (84), un număr de $s + k + 2$ condiţii de anulare, adică, ţinînd seamă şi de (86), un număr de $(n - 1 - k) + k + 2 = n + 1$ condiţii de anulare. Întrucît însă $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ nu poate fi identic nulă în intervalul (a, b), oricare ar fi $\varepsilon \neq 0$ (ceea ce se deduce ţinînd seamă că $y_0(\xi_1) \neq 0$ şi $\bar{\eta}(\xi_1) = 0$), ar rezulta din cele de mai sus că familia Y_n nu ar avea proprietatea $I_n^{(k)}(a, b)$. Acest rezultat ar contrazice afirmaţia lemei 7. Ajungem astfel la concluzia că în ipotezele lemei 9, subcazul 1 nu poate avea loc.

Subcazul 2: $\bar{\eta}(x_1) = \bar{\eta}'(x_1) = \ldots = \bar{\eta}^{(k-1)}(x_1) = \bar{\eta}^{(k)}(x_1) = 0$.

Vom arăta întîi că în acest subcaz, în ipoteza că familia Y_n are toate proprietăţile (33), are loc şi egalitatea $\bar{\eta}^{(k+1)}(x_1) = 0$, adică ordinul de multiplicitate al rădăcinii x_1, relativ la integrala $\bar{\eta}(x)$, este mai mare sau cel puţin egal cu $k + 2$. Într-adevăr, observăm întîi că condiţiile de anulare (78), pe care le satisface integrala neidentic nulă $\bar{\eta}(x)$, au forma condiţiilor (29), (30), pe care le verifică $y_0(x)$, în sensul că numărul total al condiţiilor scrise în (78) este egal cu $n - 1$ (după cum ne arată egalitatea (79)), şi că numărul condiţiilor de anulare din (78) în cazul unui nod oarecare dintre nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_m, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-\nu-1}$, nu depăşeşte numărul k.

Să notăm cu $p(x_1; \bar{\eta})$ numărul p din (78), referitor la integrala $\bar{\eta}(x)$ şi referitor la rădăcina x_1, şi cu $\pi(x_1; \bar{\eta})$ ordinul aceleiaşi rădăcini x_1 referitor la integrala $\bar{\eta}(x)$. După cum ne arată prima relaţie din (78), avem $p(x_1, \bar{\eta}) = k$, iar din ipoteza specifică cazului considerat avem $\pi(x_1, \bar{\eta}) \geqq k + 1$. Reţinem relaţiile:

$$p(x_1, \bar{\eta}) = k, \quad \pi(x_1, \bar{\eta}) \geqq k + 1.$$

Conform proprietăţii (51), pe care o enunţăm referitor la integrala $\bar{\eta}(x)$, numerele $p(x_1; \bar{\eta})$ şi $\pi(x_1; \bar{\eta})$ trebuie să fie de aceeaşi paritate. De aici, ţinînd seamă de relaţiile precedente, rezultă

$$\pi(x_1; \bar{\eta}) \geqq k + 2, \tag{87}$$

şi astfel afirmaţia făcută anterior este demonstrată.

În continuare, referindu-ne la celelalte rădăcini ale integralei $\bar{\eta}(x)$, care figurează în (78), observăm că are loc inegalitatea strictă

$$\max\{p(x_2; \bar{\eta}), p(x_3; \bar{\eta}), \ldots, p(x_m; \bar{\eta}); p(\xi_1; \bar{\eta}), \ldots, p(\xi_{n-\nu-1}, \bar{\eta})\} < \\ < \max\{p(x_2; y_0), p(x_3; y_0), \ldots, p(x_m; y_0)\}, \tag{88}$$

unde $p(x_i; \bar{\eta})$, $(i = 2, 3, \ldots, m)$ şi $p(\xi_j; \bar{\eta})$, $(j = 1, 2, \ldots, n - \nu - 1)$, reprezintă respectiv numerele p din (78), referitor la rădăcinile x_i şi ξ_j ale integralei $\bar{\eta}(x)$, iar $p(x_i; y_0)$, $(i = 2, 3, \ldots, m)$ reprezintă numerele p din (29), referitor la rădăcinile x_i ale integralei $y_0(x)$.

Inegalitatea (88) se deduce ţinînd seamă de relaţiile (78), (29), (80), precum şi de proprietatea (73').

Considerăm acum în locul integralei $y_0(x)$, integrala neidentic nulă $\bar{\eta}(x)$. Ţinînd seama de relaţiile (78), (79) şi (87), se pot prezenta pentru $\bar{\eta}(x)$, unul din cele două cazuri menţionate anterior pentru integrala $y_0(x)$. După cum s-a demonstrat anterior, condiţiile specifice cazului 1 sînt în contradicţie cu ipoteza că familia Y_n are proprietăţile indicate în (33). Rezultă deci că integrala $\bar{\eta}(x)$ trebuie să satisfacă condiţiile cazului 2, şi în acelaşi timp pentru ea va avea loc inegalitatea strictă (88), care joacă un rol de reducţiune. Repetînd raţionamentul utilizat în cazul 2, relativ însă la integrala $\bar{\eta}(x)$, vom fi conduşi la considerarea unei integrale $\bar{\eta}_1(x)$, neidentic nulă în intervalul (a, b), satisfăcînd condiţii analoage condiţiilor (78), (79), (87), (88). Se constată le fel ca mai sus, că $\bar{\eta}_1(x)$ trebuie să satisfacă condiţiile cazului 2. În continuare, plecînd de la integrala $\bar{\eta}_1(x)$ se obţine în acelaşi mod o integrală $\bar{\eta}_2(x)$, neidentic nulă în intervalul (a, b), satisfăcînd şi ea condiţii analoage condiţiilor (78), (79), (87), (88). Astfel, ţinînd seamă de faptul că de fiecare dată are loc inegalitatea strictă (88), care joacă un rol de reducţiune, se va ajunge în cele din urmă la o integrală $\bar{\eta}_N(x)$, neidentic nulă în intervalul (a, b) şi care va satisface condiţiile cazului 1 considerat anterior. După cum însă s-a demonstrat anterior, ipotezele specifice acestui caz sînt în contradicţie cu proprietăţile din (33). Se ajunge în definitiv la o contradicţie, care provine din ipoteza absurdă (68). Astfel proprietatea $P_n(a, b)$ a familiei Y_n este stabilită.

—.—

Revenind la demonstraţia teoremei 1, din afirmaţiile lemelor 7 şi 9 rezultă că dacă familia Y_n are toate proprietăţile indicate în (33), atunci acea familie are şi proprietăţile $I_n^{(k)}(a, b)$ şi $P_n^{(k)}(a, b)$. Conform principiului inducţiei, rezultă afirmaţia teoremei 1.

*

* *

În continuare, vom presupune că ecuaţia diferenţială (1) are coeficienţii continui în intervalul semiînchis $[a, b)$, şi deci că familia Y_n a integralelor acestei ecuaţii este formată din funcţii definite în intervalul $[a, b)$. Definiţiile 1, 2, 3 date anterior relativ la un interval deschis (a, b), se extind şi la cazul unui interval semiînchis $[a, b)$. Vom nota respectiv cu

$I_n[a, b)$, $I_{p_1, p_2, \ldots, p_m}[a, b)$, $I_n^*[a, b)$ proprietățile familiei Y_n, puse în evidență de aceste definiții. Se observă cu ușurință că lemele 1, 2, 3 stabilite cu ocazia teoremei 1, în cazul unui interval deschis (a, b), se extind și la cazul unui interval semiînchis $[a, b)$. Vom stabili acum următoarea teoremă :

TEOREMA 2. *Dacă ecuația diferențială* (1) *are coeficienții continui în intervalul semiînchis* $[a, b)$, *și dacă familia* Y_n *a integralelor acestei ecuații are proprietatea* $I_n^*(a, b)$, *atunci familia* Y_n *are și proprietatea* $I_n^*[a, b)$.

Pentru a demonstra această teoremă, vom stabili în prealabil următoarea lemă :

Lema 10. *Presupunem că ecuația diferențială* (1) *are coeficienții continui în intervalul deschis* (a, b) *și că familia* Y_n *a integralelor acestei ecuații are proprietatea* $I_n^*(a, b)$. *Fie* $n-1$ *numere* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$, *alese în mod arbitrar din intervalul* (a, b) *și fie* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *integrale neidentic nule ale ecuației diferențiale* (1), *satisfăcînd condițiile*[10] :

$$\begin{gathered} h_1(x_1) = h_1(x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = h_1(x_{n-1}) = 0 \\ h_2(x_1) = h_2(x_2) = \ldots = h_2(x_{n-2}) = 0, \quad h_2(x_{n-1}) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{n-1}(x_1) = 0, \quad h_{n-1}(x_2) = 1. \end{gathered} \tag{89}$$

În aceste ipoteze au loc relațiile

$$h_1(x) \neq 0, \quad w(h_1, h_2) \neq 0, \ldots, \quad w(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}) \neq 0 \tag{90}$$

valabile în intervalele (a, x_1) *și* (x_{n-1}, b). *Aici* $w(h_1, h_2, \ldots, h_i)$ *reprezintă wronskianul funcțiilor* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_i(x)$.

Demonstrația pe care o dăm mai jos este întrucîtva analoagă cu demonstrația teoremei IV stabilită de G. Pólya în lucrarea [23][11]. Astfel, întrucît prin ipoteză integrala neidentic nulă $h_1(x)$ se anulează pentru $n-1$ valori distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ din intervalul (a, b), rezultă că această integrală nu se poate anula pentru nici o altă valoare din acest interval, întrucît în caz contrar s-ar contrazice proprietatea $I_n^*(a, b)$ a familiei Y_n (conform lemei 1). Astfel prima relație din (90) este stabilită. În continuare, adoptăm notațiile $h_1(x) = w_1$ și $w(h_1, h_2, \ldots, h_k) = w_k$, $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$.

Utilizînd metoda inducției, să presupunem că în ambele intervale (a, x_1) și (x_{n-1}, b) au loc relațiile

$$w_1 \neq 0, \quad w_2 \neq 0, \ldots, w_k \neq 0, \tag{91}$$

[10]) Existența unor astfel de integrale neidentic nule este asigurată de proprietatea $I_n^*(a, b)$.

[11]) În enunțul teoremei IV din lucrarea [23] a lui G. Pólya se presupune că familia Y_n are proprietatea $I_n^*[a, b)$, adică este interpolatoare de ordinul n în intervalul semiînchis $[a, b)$, iar nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, care intervin în condițiile (89), se consideră toate confundate în punctul $x = a$. În aceste ipoteze se arată valabilitatea relațiilor (90) în intervalul deschis (a, b). A se vedea TEOREMA A, enunțată în cele ce urmează.

numărul k satisfăcînd inegalitatea $1 \leqq k < n-1$. În aceste ipoteze vom demonstra că are loc și relația $w_{k+1} \neq 0$ în intervalele (a, x_1) și (x_{n-1}, b). În acest scop, considerăm combinația liniară

$$h(x) = C_1 h_1(x) + C_2 h_2(x) + \ldots + C_k h_k(x) + h_{k+1}(x), \tag{92}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_k$ reprezintă constante arbitrare pentru moment. Observăm de la început că oricare ar fi valorile pe care le iau aceste constante, funcția corespunzătoare $h(x)$ se anulează în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k-1}$, aceasta întrucît fiecare dintre funcțiile $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x), h_{k+1}(x)$, care intervin în expresia funcției $h(x)$, se anulează în aceste puncte. Fie acum x_0 un punct arbitrar din intervalul deschis (a, x_1), sau din intervalul (x_{n-1}, b). Determinăm constantele $C_1, C_2, \ldots, C_k$ din (92) astfel încît $h(x)$ să se anuleze de k ori în punctul x_0, adică să admită valoarea x_0 ca rădăcină multiplă de ordin $\geqq k$. O astfel de determinare este posibilă, și aceasta într-un singur mod, întrucît determinantul celor k ecuații care se formează prin scrierea acestor condiții, este $w(h_1, h_2, \ldots, h_k) \neq 0$. Acest determinant este diferit de zero conform ipotezei (91). Fie $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_k$ valorile astfel determinate ale constantelor $C_1, C_2, \ldots, C_k$, și fie $\overline{h}(x)$ funcția corespunzătoare, obținută cu ajutorul formulei (92). Această funcție va avea deci ca rădăcini numerele $x_0, x_1, \ldots, x_{n-k-1}$, rădăcina x_0 avînd ordinul de multiplicitate mai mare sau cel puțin egal cu k. Rezultă de aici că $\overline{h}(x)$ se anulează în total de $(n-k-1) + k = n-1$ ori în intervalul (a, b). Mai observăm că integrala $\overline{h}(x)$ nu este identic nulă în intervalul (a, b), întrucît $\overline{h}(x_{n-k}) = h_{k+1}(x_{n-k}) = 1$.

Întrucît prin ipoteză, familia Y_n a integralelor ecuației diferențiale (1) are proprietatea $I_n^*(a, b)$, rezultă conform lemei 3 că rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k}$ ale integralei $\overline{h}(x)$ sînt simple, iar rădăcina x_0 nu poate avea un ordin de multiplicitate mai mare decît k.

Folosim acuma următoarea identitate stabilită de G. Pólya în [23] :

$$w(h_1, h_2, \ldots, h_k, y) \equiv \frac{w_k^2}{w_{k-1}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{w_{k-1}^2}{w_{k-2} w_k} \cdots \frac{d}{dx} \frac{w_2^2}{w_1 w_3} \cdot \frac{d}{dx} \frac{w_1^2}{w_0 w_2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{y}{w_1} \tag{93}$$

valabilă în orice interval al axei Ox, în care fucțiile $w_1 = h_1(x)$, $w_2 = w(h_1, h_2), \ldots, w_k = w(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ nu se anulează, și pentru orice funcție $y(x)$ avînd derivate continue pînă la ordinul k inclusiv în acel interval. În formula (93) s-a notat $w_0 \equiv 1$.

Presupunem acum că funcțiile $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_k(x)$ care intervin în (93), sînt cele considerate în enunțul prezentei leme, adică cele care satisfac condițiile (89). În cazul acestor funcții, ținînd seamă de ipoteza (91), rezultă că identitatea (93) este valabilă în intervalele deschise (a, x_1) și (x_{n-1}, b), oricare ar fi funcția $y(x)$, avînd derivate continue pînă la ordinul k inclusiv. În particular, înlocuind în (93) pe $y(x)$ cu funcția $\overline{h}(x)$, obținem identitatea

$$w(h_1, h_2, \ldots, h_k, \overline{h}) = \frac{w_k^2}{w_{k-1}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{w_{k-1}^2}{w_{k-2} w_k} \cdots \frac{d}{dx} \frac{w_2^2}{w_1 w_3} \cdot \frac{d}{dx} \frac{w_1^2}{w_0 w_2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\overline{h}}{w_1} \tag{94}$$

Ţinînd seamă de relaţia (92) care defineşte funcţia $h(x)$, se observă că

$$w(h_1, h_2, \ldots, h_k, \bar{h}) = w(h_1, h_2, \ldots, h_k, h_{k+1}) \equiv w_{k+1}. \quad (95)$$

Pe de altă parte, ţinînd seamă de faptul stabilit anterior, că ordinul de multiplicitate al rădăcinii x_0 relativ la funcţia $\bar{h}(x)$ nu poate fi mai mare decît k, şi ţinînd seamă şi de relaţiile (91), presupuse valabile în ambele intervale (a, x_1) şi (x_{n-1}, b), se obţine prin aplicarea succesivă a teoremei lui Rolle că membrul al doilea al identităţii (94) nu se anulează în punctul x_0. De aici, ţinînd seamă de identitatea (95), rezultă că funcţia w_{k+1} nu se anulează în punctul x_0. Cum însă x_0 a fost ales arbitrar în intervalul (a, x_1) sau (x_{n-1}, b), rezultă relaţia $w_{k+1} \neq 0$, valabilă în fiecare din aceste intervale, q.e.d.

În baza principiului inducţiei, rezultă lema 10.

Observaţie. Presupunînd că ecuaţia diferenţială (1) are coeficienţii $a_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, continui în intervalul semiînchis $[a, b)$ şi alegînd nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ care intervin în condiţiile (89), astfel încît ele să coincidă toate în punctul $x = a$, raţionamentul de mai sus conduce la următoarea teoremă, stabilită de G. P ó l y a în lucrarea [23]:

TEOREMA A.[12]) *Presupunem că ecuaţia diferenţială* (1) *are coeficienţii* $a_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *continui în intervalul semiînchis* $[a, b)$. *Fie* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *un sistem de integrale ale ecuaţiei* (1) *satisfăcînd în punctul* $x = a$ *condiţiile:*

$$\begin{aligned} &h_1(a) = h_1'(a) = \ldots\ldots\ldots = h_1^{(n-2)}(a) = 0, \quad h_1^{(n-1)}(a) = 1 \\ &h_2(a) = h_2'(a) = \ldots = h_2^{(n-3)}(a) = 0, \quad h_2^{(n-2)}(a) = 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &h_{n-2}(a) = h_{n-2}'(a) = 0, \quad h_{n-2}''(a) = 1 \\ &h_{n-1}(a) = 0, \quad h_{n-1}'(a) = 1. \end{aligned} \quad (96)$$

Atunci, în ipoteza că familia Y_n *a integralelor ecuaţiei* (1) *are proprietatea* $I_n^*[a, b)$, *rezultă că integralele* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *considerate mai sus, satisfac în intervalul* (a, b) *relaţiile:*

$$h_1(x) \neq 0, \; w(h_1, h_2) \neq 0, \ldots, w(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}) \neq 0. \quad (97)$$

Demonstraţia teoremei 2 o vom face prin inducţie relativ la numărul natural n care reprezintă ordinul ecuaţiei diferenţiale. Pentru $n = 1$, proprietatea exprimată de teorema 2 este evidentă. Vom presupune că această proprietate este adevărată pentru numărul natural $n-1$ şi vom demonstra valabilitatea ei pentru numărul n. În acest scop, vom presupune că familia Y_n a integralelor ecuaţiei diferenţiale (1) are proprietatea $I_n^*(a, b)$. (Această ipoteză intervine în enunţul teoremei 2). Din această ipoteză, în baza lemei 3, rezultă că ecuaţia diferenţială (1) nu admite nici o integrală neidentic nulă, care să aibă n rădăcini (distincte sau nu) în intervalul deschis (a, b). Pentru a demonstra afirmaţia teoremei 2, va fi suficient (tot în baza lemei 3)

[12]) În lucrarea [23], această teoremă poartă numărul de ordine IV.

să arătăm că ecuaţia diferenţială (1) nu admite nici o integrală neidentic nulă, care să aibă n rădăcini (distincte sau nu) în intervalul semiînchis $[a, b)$. Să presupunem prin absurd că ar exista o integrală neidentic nulă $y_0(x) \in Y_n$, care să aibă n rădăcini în intervalul $[a, b)$. Atunci, neapărat una din rădăcinile integralei $y_0(x)$ trebuie să coincidă cu extremitatea $x = a$ a intervalului $[a, b)$, întrucît în caz contrar, dacă toate cele n rădăcini ar fi interioare intervalului (a, b), atunci conform lemei 1 s-ar contrazice proprietatea $I_n(a, b)$ presupusă adevărată prin ipoteză. În cele ce urmează vom nota cu $\xi_1 = a, \xi_2, \ldots, \xi_m$ rădăcinile distincte din $[a, b)$ ale integralei $y_0(x)$ considerate, şi cu $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ ordinele lor de multiplicitate. Evident că $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m \geqq n$. Vom presupune că au loc inegalităţile $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m$.

Fie acuma $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ valori luate arbitrar din intervalul (ξ_m, b). Considerăm $n-1$ integrale $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ satisfăcînd condiţiile (89), în care însă $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ reprezintă nodurile alese anterior, din intervalul (ξ_m, b). Astfel de integrale există, întrucît prin ipoteză s-a presupus că familia Y_n are proprietatea $I_n^*(a, b)$. Conform lemei 10, rezultă că în intervalul (a, x_1) au loc relaţiile:

$$h_1(x) \neq 0, \quad w(h_1 h_2) \neq 0, \ldots, w(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}) \neq 0 \quad (98)$$
$$\text{pentru } x \in (a, x_1).$$

În plus, integrala $h_1(x)$ anulîndu-se în $n-1$ puncte, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ din intervalul (a, b), rezultă că ea nu se mai poate anula în intervalul (a, b), întrucît în caz contrar s-ar contrazice proprietatea $I_n^*(a, b)$ a familiei Y_n (conform lemei 1). Mai mult chiar, integrala $h_1(x)$ nu poate să se anuleze nici în punctul $x = a$. Într-adevăr, presupunînd prin absurd că $h_1(a) = 0$, să considerăm integrala $y_\varepsilon(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1), care satisface condiţiile

$$y_\varepsilon(a+\varepsilon) = h_1(a), \quad y_\varepsilon'(a+\varepsilon) = h_1'(a), \ldots, y_\varepsilon^{(n-1)}(a+\varepsilon) = h_1^{(n-1)}(a),$$

unde ε reprezintă un parametru, satisfăcînd inegalităţile $0 < \varepsilon < \xi_m - a$. Dacă parametrul ε tinde către zero prin valori pozitive, atunci integrala $y_\varepsilon(x)$ va tinde uniform către $h_1(x)$ în orice interval închis $[a, b_1]$, conţinut în intervalul $[a, b)$. De aici, ţinînd seamă de faptul că rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ale integralei $h_1(x)$ sînt simple (ceea ce rezultă din afirmaţia lemei 4), rezultă că dacă parametrul $\varepsilon > 0$ este suficient de mic, atunci integrala $y_\varepsilon(x)$ corespunzătoare va avea $n-1$ rădăcini distincte $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ situate în intervalul (ξ_m, b) şi se va mai anula în punctul $x = a + \varepsilon$, aparţinînd intervalului (a, ξ_m). S-ar obţine astfel o integrală neidentic nulă $y_\varepsilon(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1), care se anulează în cel puţin n puncte din intervalul (a, b). Această situaţie contrazice însă proprietatea $I_n^*(a, b)$ a familiei Y_n. În concluzie, are loc inegalitatea $h_1(a) \neq 0$.

În continuare, să efectuăm asupra ecuaţiei diferenţiale (1) schimbarea de funcţie

$$y(x) = h_1(x)\, z. \quad (99)$$

Se obţine atunci din (1) ecuaţia diferenţială

$$\bar{L}_n(z) = h_1(x)\,[z^{(n)} + \bar{a}(x)\, z^{(n-1)} + \ldots + \bar{a}_{n-1}(x)\, z'] = 0$$

avînd coeficienţii $\bar{a}_1(x), \ldots, \bar{a}_{n-1}(x)$ continui în intervalul $[a, x_1)$, în care funcţia $h_1(x)$ nu se anulează. Să notăm

$$z' = u. \tag{100}$$

Ţinînd seamă de faptul că $h_1(x)$ este diferit de zero în intervalul $[a, x_1)$, ecuaţia precedentă se reduce în acest interval la ecuaţia

$$\bar{L}_{n-1}(u) = u^{(n-1)} + \bar{a}_1(x)\, u^{(n-2)} + \ldots + \bar{a}_{n-1}(x)\, u = 0, \tag{101}$$

avînd coeficienţii continui în intervalul $[a, x_1)$.

Integralei $y_0(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1), îi va corespunde integrala $u_0(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_0(x)}{h_1(x)}\right)$ a ecuaţiei (101). Întrucît prin ipoteză funcţia $y_0(x)$ se anulează cel puţin de n ori în intervalul $[a, x_1)$, anume în punctele $\xi_1 = a, \xi_2, \ldots, \xi_m$, cu ordine de multiplicitate respectiv $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$, satisfăcînd evident inegalitatea $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m \geqq n$, rezultă că integrala $u_0(x)$ a ecuaţiei (101) se va anula cel puţin de $n - 1$ ori în intervalul $[a, x_1)$. Pe de altă parte, din faptul că integrala $y_0(x)$ nu este identic nulă în (a, b), rezultă că şi $u_0(x)$ nu este identic nulă în intervalul $[a, x_1)$. Într-adevăr, presupunînd contrariul, adică $u_0(x) \equiv 0$ în intervalul $[a, x_1)$, ar rezulta, ţinînd seamă de schimbările de variabilă (99) şi (100), că are loc identitatea $y_0(x) \equiv C\, h_1(x)$ în intervalul $[a, x_1)$ şi deci în întreg intervalul $[a, b)$. În această identitate, C reprezintă o constantă. Întrucît $y_0(x)$ este prin ipoteză neidentic nulă în intervalul (a, b), ar rezulta din identitatea $y_0(x) \equiv C\, h_1(x)$ că $C \neq 0$. Totodată ar mai rezulta că integrala $h_1(x)$ se anulează în intervalul $[a, x_1)$ pentru toate valorile din acest interval, pentru care se anulează şi $y_0(x)$. Dar funcţia $y_0(x)$ se anulează de n ori în intervalul $[a, x_1)$ în punctele $\xi_1 = a, \xi_2, \ldots, \xi_m$ cu ordinele de multiplicitate respectiv $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ $(\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_m \geqq n)$. Întrucît însă integrala $y_0(x)$ nu este identic nulă în intervalul (a, b), rezultă că numărul m al acestor puncte satisface inegalitatea $m \geqq 2$ şi deci că funcţia $y_0(x)$ se anulează cel puţin într-un punct interior intervalului (a, x_1). Pe de altă parte, după cum rezultă din (89), integrala $h_1(x)$ se mai anulează de $n - 1$ ori în intervalul $[x_1, b)$. S-ar ajunge în definitiv la concluzia că integrala neidentic nulă $h_1(x)$ a ecuaţiei (1) se anulează cel puţin de n ori în intervalul deschis (a, b), ceea ce ar contrazice proprietatea $I_n^*(a, b)$ a familiei Y_n, proprietate presupusă adevărată prin ipoteză.

Obţinem în definitiv următorul rezultat: Integrala $u_0(x)$ a ecuaţiei (101) nu este identic nulă în intervalul $[a, x_1)$ şi se anulează cel puţin de $n - 1$ ori în acest interval.

În continuare, integralelor $h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ ale ecuaţiei (1) le vor corespunde respectiv integralele $u_2(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ ale ecuaţiei (101), avînd expresiile:

$$u_i(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{h_i(x)}{h_1(x)}\right), \quad i = 2, \ldots, n - 1. \tag{102}$$

Aceste integrale sînt definite în intervalul $[a, x_1)$, în care $h_1(x)$ nu se anulează. Folosind identitatea

$$w\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)', \left(\frac{h_3}{h_1}\right)', \ldots, \left(\frac{h_i}{h_1}\right)'\right] = \frac{1}{h_1^i}\, w\,(h_1, h_2, \ldots, h_i)$$

stabilită de G. Pólya în [23], şi ţinînd seamă de formulele (102), se constată că integralele $u_2(x), \ldots, u_{n-1}(x)$ ale ecuaţiei (101) satisfac în intervalul (a, x_1) următoarele condiţii analoage condiţiilor (98):

$$u_2(x) \neq 0, \quad w(u_2, u_3) \neq 0, \ldots, w(u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}) \neq 0 \tag{103}$$

$$\text{pentru} \quad x \in (a, x_1).$$

Astfel ajungem la concluzia că ecuaţia diferenţială (101) are coeficienţii continui în intervalul semiînchis $[a, x_1)$ şi satisface condiţiile (103) în intervalul deschis (a, x_1). Conform teoremei I din lucrarea [23] a lui G. Pólya (a se vedea teorema B enunţată mai jos), rezultă că familia U_{n-1} a integralelor ecuaţiei diferenţiale (101) va avea proprietatea $I_{n-1}^*(a, x_1)$. Apoi, ţinînd seamă de ipoteza făcută iniţial, anume că proprietatea exprimată de teorema 2 din lucrarea de faţă este adevărată pentru numărul natural $n - 1$[13]), rezultă că familia U_{n-1} a integralelor ecuaţiei diferenţiale (101) are şi proprietatea $I_{n-1}^*\,[a, x_1)$. Această concluzie este însă incompatibilă cu existenţa integralei $u_0(x)$ a aceleiaşi ecuaţii (101), care după cum s-a arătat anterior nu este identic nulă în intervalul $[a, x_1)$ şi totodată se anulează în acest interval de $n - 1$ ori. Această contradicţie provine din ipoteza absurdă că în condiţiile teoremei 2, ecuaţia diferenţială (1) ar admite în intervalul $[a, b)$ o integrală neidentic nulă $y_0(x)$, care să se anuleze de n ori în acest interval. Rezultă deci că în ipotezele teoremei 2 din lucrarea de faţă, ecuaţia diferenţială (1) nu admite nici o integrală $y_0(x)$ de acest fel, şi deci că familia Y_n are proprietatea $I_n^*\,[a, b)$, q. e. d.

Înainte de a formula consecinţe ale rezultatelor obţinute mai sus, vom enunţa întîi următoarea teoremă care de asemenea este dată de G. Pólya în lucrarea [23]:

TEOREMA B.[14]) *Dacă ecuaţia diferenţială* (1) *are coeficienţii continui în intervalul deschis* (a, b), *şi dacă ea admite* $n - 1$ *integrale* $h_1(x)$, $h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$, *satisfăcînd în acest interval relaţiile*:

$$h_1(x) \neq 0, \quad w\,(h_1, h_2) \neq 0, \ldots, w\,(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}) \neq 0,$$

atunci familia Y_n *a integralelor ecuaţiei diferenţiale* (1) *are proprietatea* $I_n^*(a, b)$.

CONSECINŢE

Din teoremele A şi B ale lui G. Pólya, ţinînd seamă şi de teorema 2 demonstrată mai sus, rezultă:

[13]) Această ipoteză a fost făcută cu ocazia aplicării principiului inducţiei.
[14]) Această teoremă are numărul de ordine II în lucrarea [23] citată.

TEOREMA 3. *În ipoteza că ecuația diferențială* (1) *are coeficienții continui în intervalul semiînchis* $[a, b)$, *condiția necesară și suficientă ca familia* Y_n *a integralelor ecuației* (1) *să aibă proprietatea* $I_n^*[a, b)$, *este ca pentru orice sistem de* $n-1$ *integrale* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *a ecuației diferențiale* (1), *satisfăcînd condițiile* (96), *să aibă loc relațiile* (97), *în intervalul deschis* (a, b).

O b s e r v a ț i e. *Presupunem că ecuația diferențială* (1) *are coeficienții continui într-un interval semiînchis* $[a, b)$ *și că admite un sistem particular de* $n-1$ *integrale* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$, *satisfăcînd relațiile* (97) *în intervalul* (a, b). *În aceste ipoteze, orice sistem de* $n-1$ *integrale satisfăcînd condițiile* (96), *va verifica de asemenea relațiile* (97) *în intervalul* (a, b).

Această proprietate rezultă îndată din teoremele A și B ale lui G. P ó l y a și din teorema 2 a lucrării de față.

* * *

În continuare, ținînd seama de teorema 1 stabilită în lucrarea de față, precum și de teorema 3 enunțată mai sus, obținem:

TEOREMA 4. *În ipoteza că ecuația diferențială* (1) *are coeficienții continui în intervalul semiînchis* $[a, b)$, *condiția necesară și suficientă ca familia* Y_n *a integralelor acestei ecuații să aibă proprietatea* $I_n[a, b)$, *este ca pentru orice sistem de* $n-1$ *integrale* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *a ecuației diferențiale* (1), *satisfăcînd condițiile* (96), *să aibă loc relațiile* (97) *în intervalul deschis* (a, b).

APLICAȚII

Determinarea intervalului maximal $[a, b)$, *cu extremitatea stîngă dată, în care familia* Y_n *a integralelor ecuației diferențiale* (1) *are proprietatea* $I_n[a, b)$ *și deci proprietatea* $I_n^*[a, b)$.

Această problemă se leagă de numeroase lucrări privind probleme la limită polilocale la ecuații diferențiale lineare. Dintre acestea cităm lucrările [1–3, 8, 11, 13, 14, 19, 20, 23, 27].

În lucrarea de față se dă o rezolvare a acestei probleme, legată de rezultatele obținute în paragrafele anterioare.

Presupunem că se dă o ecuație diferențială (1), avînd coeficienții $a_i(x)$ continui în intervalul $(-\infty, +\infty)$. Fie $x = a$ un număr real oarecare dat. Ne propunem să determinăm intervalul semiînchis $[a, b)$, de lungime maximă, în care familia Y_n a integralelor ecuației diferențiale (1) are proprietatea $I_n[a, b)$ (deci și proprietatea $I_n^*[a, b)$). În acest scop, ținînd seamă de teorema 4 precum și de observația făcută cu ocazia teoremei 3, putem proceda astfel:

Vom considera întîi un sistem particular oarecare de $n-1$ *integrale* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ *ale ecuației diferențiale* (1), *satisfăcînd condițiile* (96), *și apoi vom determina intervalul deschis maxim* (a, b) *în care să aibă loc relațiile* (97), *pentru sistemul de integrale ales. Intervalul semiînchis* $[a, b)$ *va fi intervalul căutat.*

Exemplu:

Fie ecuația diferențială lineară și omogenă cu coeficienți constanți, de ordinul 3

$$a_0y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0. \tag{104}$$

Presupunem că polinomul caracteristic asociat acestei ecuații are o rădăcină reală r și două rădăcini complexe $\alpha + i\beta$. Ne propunem să determinăm intervale de lungime maximă, de forma $[a, b)$, în care familia Y_3 a integralelor acestei ecuații diferențiale are proprietatea respectivă $I_3[a, b)$ (deci și proprietatea $I_3^*[a, b)$).

După cum s-a arătat în lucrarea [2], lungimea acestor intervale maximale de interpolație nu depinde de numărul a care reprezintă extremitatea din stînga a intervalului (aceasta, întrucît o astfel de ecuație diferențială rămîne neschimbată dacă se efectuează asupra variabilei independente o translație oarecare). Notînd cu l lungimea căutată și luînd $a = 0$, problema revine la aflarea intervalului maxim de forma $[0, l)$ în care familia Y_3 are proprietatea $I_3[0, l)$.

Tot în lucrarea [2] s-a arătat că folosind o schimbare de variabile de forma

$$x = \beta^{-1}t, \quad y = e^{\frac{\alpha}{\beta}t} z(t),$$

ecuația diferențială dată se transformă într-o altă ecuație diferențială cu coeficienți constanți reali, al cărei polinom caracteristic să aibă ca rădăcini complexe numerele $+i$ și $-i$. Notînd cu l^* lungimea intervalului maxim de forma $[0, l^*)$ în care mulțimea integralelor ecuației transformate are proprietatea $I_3[0, l^*)$, se constată cu ușurință că are loc egalitatea $l = |\beta|^{-1}l^*$. Astfel, fără a restrînge generalitatea problemei, se poate presupune că cele două rădăcini complexe ale polinomului caracteristic asociat ecuației date (104), sînt $+i$ și $-i$. Vom nota tot cu r, rădăcina reală a polinomului caracteristic asociat acestei ecuații. Mai observăm că putem presupune această rădăcină nenegativă, situație ce se poate întodeauna realiza, efectuînd schimbarea de variabilă independentă $x = -\xi$.

Astfel, vom presupune în cele ce urmează că rădăcinile polinomului caracteristic asociat ecuației diferențiale (104) sînt $r \geqq 0$, $+i$ și $-i$. În această ipoteză, integrala generală a ecuației (104) se va scrie

$$y(x) = C_1e^{rx} + C_2 \sin x + C_3 \cos x. \tag{105}$$

Pentru aflarea numărului l corespunzător, vom utiliza metoda de lucru prezentată anterior.

Determinăm întîi două integrale $h_1(x)$ şi $h_2(x)$ ale ecuaţiei diferenţiale date, care să satisfacă condiţiile :

$$h_1(0) = h_1'(0) = 0, \quad h_1''(0) = 1$$
$$h_1(0) = 0, \quad h_2'(0) = 1, \quad h_2''(0) = 0. \tag{106}$$

Se găseşte că

$$h_1(x) = \frac{1}{1+r^2}\,(e^{rx} - r \sin x - \cos x)$$
$$h_2(x) = \sin x.$$

Apoi, calculăm :

$$w_1(x) = h_1(x) = \frac{1}{1+r^2}\,(e^{rx} - r \sin x - \cos x)$$

$$w_2(x) = \frac{1}{1+r^2}\,[e^{rx}\,(\cos x - r \sin x) - 1\,].$$

Va trebui să aflăm intervalul deschis maximal $(0, l)$ în care să aibă loc relaţiil $w_1(x) \neq 0$ şi $w_2(x) \neq 0$. Lungimea l a acestui interval este dată de formula $l = \min\{\rho_1, \rho_2\}$, unde ρ_1 şi ρ_2 reprezintă cele mai mici rădăcini pozitive ale ecuaţiilor $w_1(x) = 0$, respectiv $w_2(x) = 0$. Distingem următoarele două cazuri, după cum $r > 0$ sau $r = 0$.

Cazul 1: $r > 0$.

Pentru a studia în acest caz comportarea funcţiei $w_1(x)$ în intervalul $(0, \infty)$, calculăm

$$\frac{d}{dx}\,w_1(x) = \frac{1}{1+r^2}\,(r\,e^{rx} - r \cos x + \sin x).$$

Se observă direct că în cazul considerat are loc în intervalul $(0, \pi)$, inegalitatea $\frac{d}{dx}\,w_1(x) > 0$. Deci în acest interval, funcţia $w_1(x)$ este crescătoare şi cum $w_1(0) = 0$, rezultă că $w_1(x)$ ia valori pozitive în intervalul $(0, \pi)$.

Pe de altă parte, observăm că dacă $x \geqq \pi$, atunci au loc inegalităţile :

$$(1 + r^2)\,w_1(x) = e^{rx} - r \sin x - \cos x > e^{r\pi} - r - 1 > 0.$$

De aici rezultă că în intervalul $[\pi, \infty)$, funcţia $w_1(x)$ nu se anulează, rămînînd mereu pozitivă. În definitiv, obţinem rezultatul că în cazul considerat, funcţia $w_1(x)$ nu are rădăcini pozitive.

În ceea ce priveşte comportarea funcţiei $w_2(x)$, se obţine îndată că $\frac{d}{dx}\,w_2(x) = -\,e^{rx} \sin x$, de unde se deduce că funcţia $w_2(x)$ este descrescătoare în intervalul $(0, \pi)$ şi crescătoare în intervalul $(\pi, 2\pi)$. Obţinem următorul tablou de variaţie :

x	0				π						2π
$\frac{d}{dx}w_2(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$w_2(x)$	0	$\searrow$			min	$\nearrow$					$\frac{1}{1+r^2}\,(e^{2\pi r} - 1)$

Din acest tablou, se vede că dacă $r > 0$, atunci cea mai mică rădăcină pozitivă a funcţiei $w_2(x)$ este situată în intervalul $(\pi, 2\pi)$.

În concluzie, în cazul $r > 0$ considerat, avem $l = \rho_2$.

Cazul 2: $r = 0$. În acest caz avem

$$w_1(x) = 1 - \cos x, \quad w_2(x) = \cos x - 1,$$

şi se vede că $l = \rho_1 = \rho_2 = 2\pi$.

În definitiv, regăsim următorul rezultat stabilit pe altă cale în lucrarea [2]:

Dacă polinomul caracteristic asociat ecuaţiei diferenţiale (104) *are o rădăcină reală $r \geqq 0$, precum şi două rădăcini complexe $+i$ şi $-i$, atunci numărul l corespunzător ecuaţiei diferenţiale considerate este egal cu rădăcina din intervalul $(\pi, 2\pi]$ a ecuaţiei*

$$(1 + r^2)\,w_2(x) = e^{rx}\,(\cos x - r \sin x) - 1 = 0.$$

Institutul de calcul,
Academia R.P.R. — Filiala Cluj.

РЕЗУЛЬТАТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Краткое содержание)

Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение n-ого порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0, \tag{1}$$

причем коэффициенты — непрерывны в промежутке (a, b) и пусть Y_n семейство интегралов этого уравнения в промежутке (a, b).

Определение 1. Говорят, что семейство Y_n обладает свойством $I_n\,(a, b)$, если как мы ни выбрали бы n различных узлов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из промежутка (a, b) и n любых вещественных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, для делан-

ного выбора существует один (и только один) интеграл $y(x) \in Y_n$, удовлетворяющий условиям $y(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Определение 2. Говорят, что семейство Y_n обладает свойством $I_n^*(a, b)$ если как мы ни выбрали бы m различных узлов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ из промежутка (a, b) (причем m — любое натуральное число, удовлетворяющее неравенство $m \leqq n$), с соответственными порядками кратности $p_1, p_2, \ldots, p_m$ при условии $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$ и как мы ни выбрали бы системы вещественных чисел $\{y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(p_1-1)}\}, \ldots, \{y_m^{(0)}, y_m^{(1)}, \ldots, y_m^{(p_m-1)}\}$, существует один (и только один) интеграл для деланного выбора, удовлетворяющий условиям

$$y(x_1) = y_1^{(0)}, y'(x_1) = y_1^{(1)}, \ldots, y^{(p_1-1)}(x_1) = y_1^{(p_1-1)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y(x_m) = y_m^{(0)}, y'(x_m) = y_m^{(1)}, \ldots, y^{(p_m-1)}(x_m) = y_m^{(p_m-1)}.$$

В работе установлены следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Если семейство Y_n обладает свойством $I_n(a, b)$, то Y_n обладает тоже свойством $I_n^*(a, b)$.*

Обратное свойство очевидно. Доказывается далее, что эта теорема остается верной в случае полузамкнутого промежутка $[a, b)$, в предположении непрерывности коэффициентов рассмотренного уравнения в таком промежутке. Затем, пользуясь этой теоремой и результатом Г. Поля [23], устанавливается следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ система $n-1$ интегралов дифференциального уравнения* (1), *удовлетворяющая в точке $x = a$ следующим условиям Коши:*

$$y_1(a) = y_1'(a) = \ldots = y_1^{(n-3)}(a) = y_1^{(n-2)}(a) = 0, \quad y_1^{(n-1)}(a) = 1$$
$$y_2(a) = y_2'(a) = \ldots = y_2^{(n-3)}(a) = 0, \quad y_2^{(n-2)}(a) = 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{n-2}(a) = y_{n-2}'(a) = 0, \quad y_{n-2}''(a) = 1$$
$$y_{n-1}(a) = 0, \quad y_{n-1}'(a) = 1.$$

Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы семейство Y_n обладало свойством $I_n(a, b)$ является выполнение для любого x из открытого промежутка (a, b) следующих соотношений:

$$w(y_1) \neq 0, \quad w(y_1, y_2) \neq 0, \ldots, w(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \neq 0.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$w(y_1) \equiv y_1(x), \quad w(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \det \|y_j^{(i-1)}(x)\|_{i, j = 1, 2, \ldots, k}.$$

В последней части работы, этот признак применяется к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

RÉSULTATS COMPARATIFS SUR DES PROBLÈMES AUX LIMITES POLYLOCAUX POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

(*Résumé*)

Soit une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0, \tag{1}$$

ayant les coefficients continus dans un intervalle (a, b) et soit Y_n la famille des intégrales de cette équation dans l'intervalle (a, b).

Définition 1. On dit que la famille Y_n possède la propriété $I_n(a, b)$ si, de quelque manière que l'on choisisse n noeuds distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans l'intervalle (a, b) et n valeurs réelles quelconques $y_1, y_2, \ldots, y_n$, il existe pour le choix fait une intégrale et une seule $y(x) \in Y_n$ qui satisfasse aux conditions $y(x_i) = y_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Définition 2. On dit que la famille Y_n possède la propriété $I_n^*(a, b)$ si, de quelque manière que l'on choisisse m noeuds distincts $x_1, x_2, \ldots x_m$ dans l'intervalle (a, b), (m étant un nombre naturel arbitraire, satisfaisant l'inégalité $m \leqq n$), ayant respectivement les multiplicités $p_1, p_2, \ldots, p_m$ avec la condition $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$ et de quelque manière que l'on choisisse les systèmes de nombres réels $\{y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(p_1-1)}\}, \ldots, \{y_m^{(0)}, y_m^{(1)}, \ldots, y_m^{(p_m-1)}\}$, il existe une intégrale $y(x) \in Y_n$ et une seule pour le choix fait, satisfaisant aux conditions :

$$y(x_1) = y_1^{(0)}, \quad y'(x_1) = y_1^{(1)}, \ldots, y^{(p_1-1)}(x_1) = y_1^{(p_1-1)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y(x_m) = y_m^{(0)}, \quad y'(x_m) = y_m^{(1)}, \ldots, y^{(p_m-1)}(x_m) = y_m^{(p_m-1)}.$$

On établit les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Si la famille Y_n a la propriété $I_n(a, b)$, alors Y_n a aussi la propriété $I_n^*(a, b)$.*

La réciproque de cette propriété est évidente. On montre aussi que ce théorème se maintient vrai même au cas d'un intervalle demi-fermé $[a, b)$, dans l'hypothèse de la continuité dans un pareil intervalle des coefficients de l'équation considérée. Puis, en employant ce théorème ainsi qu'un résultat de G. Pólya [23], on établit le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *Soit $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ un système de $n-1$ intégrales de l'équation différentielle* (1), *satisfaisant dans le point $x = a$ aux conditions suivantes de Cauchy* :

$$y_1(a) = y_1'(a) = \ldots = y_1^{(n-3)}(a) = y_1^{(n-2)}(a) = 0, \quad y_1^{(n-1)}(a) = 1$$
$$y_2(a) = y_2'(a) = \ldots = y_2^{(n-3)}(a) = 0, \quad y_2^{(n-2)}(a) = 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{n-2}(a) = y_{n-2}'(a) = 0, \quad y_{n-2}''(a) = 1$$
$$y_{n-1}(a) = 0, \quad y_{n-1}'(a) = 1.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la famille Y_n possède la propriété $I_n[a, b)$ est qu'ait lieu pour n'importe quel x dans l'intervalle ouvert (a, b) les relations

$$w(y_1) \neq 0,\ w(y_1, y_2) \neq 0,\ \ldots,\ w(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \neq 0.$$

Ici on a noté

$$w(y_1) = y_1(x),\ w(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \det \|y_j^{(i-1)}(x)\|_{i,j=1,2,\ldots,k}.$$

Dans la dernière partie du travail on applique ce critère à des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

BIBLIOGRAFIE

1. O. Aramă, *Problema bilocală şi teorema inegalităţilor diferenţiale cu noduri confundate, a lui S. A. Ciaplighin, pentru ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi.* Studii şi Cerc. de Mat. (Cluj), IX, 7–38 (1958).
2. O. Aramă, D. Ripianu, *Asupra problemei polilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi (I).* Studii şi Cerc. de Mat. (Cluj), VIII, 37–74 (1957).
3. — *Asupra problemei polilocale pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi (II).* Studii şi Cerc. de Mat. (Cluj), VIII, 211–265 (1957).
4. — *Asupra problemei polilocale cu noduri confundate pentru ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.* Studia Universitatum V. Babeş et Bolyai, III, 3 ser. I, 95–116 (1958).
5. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк, *О неосцилляции решений линейных дифференциальных уравнений.* Уч. зап. Удмуртск. пед. ин-та, вып. 12, 44—46 (1958).
6. P. R. Beesack, *Non-oscillation and disconjugacy in the complex domain.* (doct. dis. Washington Univ., 1955). Dissert. Abstrs., 1955, 15, nr. 5, 837.
7. — *Non-oscillation and disconjugacy in the complex domain.* Trans. Amer. Math. Soc., **81**, nr. 1, 211–242 (1956).
8. M. Biernacki, *Sur un problème d'interpolation relatif aux équations differentielles linéaires.* Ann. de la Soc. Polon. de Math., XX, 169–214 (1947).
9. S. Cinquini, *Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine n.* Ann. della R. Sc. Norm. Sup. un di Pisa, (2), **9**, 61–77 (1940).
10. Л. Н. Ешуков, *О существовании решения одной краевой задачи для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.* Успехи математических наук, XII, 3(75), 313—319 (1957).
11. C. Foiaş, G. Gussi, V. Poenaru, *Despre problema polilocală la ecuaţii diferenţiale lineare de ordinul al doilea.* Bul. şt. al Acad. R.P.R., Secţ. şt. mat. şi fiz., VII, 3, 699–721 (1955).
12. Э. Б. Карпиловская, *О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений.* Успехи математических наук, VIII, 3(55), 111—118 (1953).
13. В. А. Кондратьев, *Елементарный вывод необходимого и достаточного условия неколебаемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка.* Успехи математических наук, XII, 3, 159—160 (1957).

14. В. А. Кондратьев, *О нулях решений уравнения* $y^{(n)}+p(x)y=0$. ДАН СССР, **120**, но. 6, 1180—1182, (1958).
15. М. Г. Крейн, *Осцилляционные теоремы для обыкновенных линейных дифференциальных операторов произвольного порядка.* ДАН, 25, 717—720, (1939).
16. G. Mammana, *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotta di fattori, e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari.* Math. Zeitschr., **33**, 186 – 231 (1931).
17. L. Markus, R. Moore, *Oscillation and disconjugacy for linear differential equations with almost periodic coefficients.* Acta Math., **96**, 1–2, 99–123 (1956).
18. J. G. Mikusinski, *Sur un problème d'interpolation pour les integrales des équations differentielles linéaires.* Ann. de la Soc. Polon. de Math., XIX, 165–205 (1946).
19. E. Moldovan, *Asupra noţiunii de funcţie convexă faţă de o mulţime de funcţii interpolatoare.* Studii şi Cerc. de Mat. (Cluj), IX, 161–224 (1958).
20. Е. Молдован, *Некоторые замечания относительно одного признака неколебасмости для линейных дифференциальных уравнений.* Mathematica, **1** (**24**), fasc. 1, 45 – 49 (1959).
21. O. Nicoletti, *Sulle condizioni iniziali che determiano gli integrali della equazioni differenziali ordinarie.* Atti della R. Acc. Sc. Torino, **33**, 746–759 (1897–1898).
22. E. Picard, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentialles.* Paris, 1930.
23. G. Pólya, *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation.* Amer. Math. S. Bull., **24**, 312–324 (1922).
24. Ch. J. de la Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une integrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n.* Journ. de Math. pures et appl., (9), **8**, 125–144 (1929).
25. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale (parte prima).* Bologna, 1948.
26. D. V. Widder, *A general mean-value theorem.* Amer. M. S. Trans., **26**, 385–394 (1924).
27. A. Wintner, *Amer. J. Math.*, **73**, nr. 2, 368 (1951).
28. — *On the comparison theoreme of Kneser-Hille.* Math. Scand., **5**, 2, 255–260 (1957).
29. S. Zaidman, *Evaluări ale distanţei între zerourile soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale.* Revista Univ. C. I. Parhon şi a Politehn. Bucureşti, nr. 6–7 (1955).