DESPRE REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE INFINITE

DE

JANKÓ BÉLA

Comunicare prezentată la al IV-lea Congres al matematicienilor romîni, din 27 mai — 4 iunie 1956, Bucureşti.

Scopul lucrării de faţă este de a da noi metode pentru rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare, generalizînd metodele cunoscute ale lui Pollaczek-Geiringer şi Seidel. Ideea de bază la construirea acestor metode este de a transforma sistemul liniar dat într-un sistem neliniar echivalent, de formă particulară şi de aşa natură încît să avem îndeplinită următoarea condiţie: aplicînd la acest sistem neliniar metoda lui Newton [1,2] (generalizată de L. V. Cantorovici), derivata Fréchet a operaţiei neliniare să fie o matrice de formă simplă, de exemplu de forma diagonală, triunghiulară etc. [3].

§ 1. Noi metode de iteraţie pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii

Considerăm un sistem numărabil de relaţii

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots = b_i \quad (j = 1, 2, \ldots ; i = 1, 2, \ldots), \quad (1.\,1)$$

în care coeficienţii a_{ij} şi termenii liberi b_i sînt numere reale date, iar numerele x_j sînt necunoscutele. Înţelegem printr-o soluţie a sistemului (1. 1) un şir de valori $\{x_i\}$, care înlocuite în membrii întîi ai ecuaţiilor, formează serii convergente ale căror sume sînt egale tocmai cu termenii liberi corespunzători. Considerăm acum sistemul infinit sub forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j - b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad (1'.\,1)$$

pe care îl vom nota în cele ce urmează în felul următor:

$$a_{ii} x_i + A_i = 0, \quad A_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij} x_j - b_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Sistemul liniar (1'. 1) este echivalent cu sistemul neliniar de forma

$$F_i(x_i\,;\,A_i,\,C_i^{(0)}) = \Phi_i(A_i,\,C_i^{(0)})\,(a_{ii}\,x_i + A_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad (2.\,1)$$

Φ_i fiind o funcţie mărginită care nu are rădăcini reale şi e de formă simplă[1]), iar constanta $C_i^{(0)}$ se determină în aşa fel ca pentru aproximaţia iniţială $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots)$ să avem

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_0 = 0, \quad i \neq j. \qquad (3.\,1)$$

Se verifică uşor că condiţiile (3. 1) sînt echivalente cu

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial A_i}\right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Construind operaţia neliniară

$$F(x) \equiv \begin{pmatrix} F_1(x_1\,;\,A_1,\,C_1^{(0)}) \\ \vdots \\ F_i(x_i\,;\,A_i,\,C_i^{(0)}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ne putem convinge uşor că derivata în sensul lui Fréchet a operaţiei neliniare F în punctul X_0 este de forma

$$F'(x_0) \equiv \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)_0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)_0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Aici am notat

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots).$$

Folosind metoda modificată a lui Newton

$$X_{k+1} = X_k - [F'(X_0)]^{-1} F(X_k), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

[1]) Prin aceasta înţelegem că valorile funcţiei Φ_i se pot calcula prin operaţii aritmetice (sau că avem la îndemînă tabelele necesare pentru valorile acestei funcţii), de ex.

$$\left[1 + C_i^{(0)}\left(A_i - A_i^{(0)}\right)\right]^2 + 1, \quad e^{C_i^{(0)} A_i} \text{ etc., unde } A_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\,x_j^0 - b_i,\ (i = 1, 2, \ldots).$$

putem obţine formule explicite pentru rezolvarea aproximativă a sistemelor infinite avînd forma

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{F_i(x_i^{(k)}\,;\,A_i^{(k)},\,C_i^{(0)})}{\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_0} \quad (i = 1, 2, \ldots\,;\ k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (4.\,1)$$

unde s-a notat $X_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_i^{(k)}, \ldots)$, $A_i^{(k)} = \sum\limits_{j=1\ j\neq i}^{\infty} a_{ij}\,x_j^{(k)} - b_i$.

În ce priveşte convergenţa acestei metode ne putem folosi de o teoremă a lui C a n t o r o v i c i [1], care se formulează în felul următor:

Considerăm operaţia $F(X)$ ce transformă spaţiul **X** în **Y** (unde **X** şi **Y** sînt spaţii Banach). Atunci dacă mai sînt îndeplinite condiţiile

1°. operaţia neliniară $F(X)$ este de două ori derivabilă în sensul lui Fréchet,

2°. pentru elementul X_0 al aproximaţiei iniţiale, operatorul $F'(X_0)$ are inversa $\Gamma_0 = [F'(X_0)]^{-1}$ şi $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$,

3°. elementul X_0 satisface aproximativ sistemul (2. 1) şi se cunoaşte evaluarea

$$\|\Gamma_0 F(X_0)\| \leqslant \eta_0,$$

4°. derivata a doua $F''(X)$ este mărginită în domeniul $\|X - X_0\| \leqslant 2\eta_0$, astfel

$$\|F''(X)\| \leqslant K,$$

5°. constantele B_0, η_0, K satisfac inegalitatea

$$h_0 = B_0\,\eta_0\,K < \frac{1}{2},$$

atunci sistemul (1. 1) admite o soluţie X^* şi aproximaţiile succesive X_k definite de formulele (4. 1) converg spre X^*, iar convergenţa este de ordinul convergenţei unei serii geometrice,

$$\|X^* - X_k\| \leqslant q^k\,\|X^* - X_0\|, \quad q = 1 - \sqrt{1 - 2h_0} < 1.$$

Observaţie. I. Ipoteza $\|F''(x)\| \leqslant K$ impune condiţia ca şi sistemul liniar dat să fie mărginit, de exemplu în sensul

$$\sup_i \left\{ 2\,|a_{ii}| \left|\frac{d\Phi_i}{dA_i}\right| \sum_{j=1\ j\neq i}^{\infty} |a_{ij}| + \left|\frac{d^2\Phi_i}{dA_i^2}\right| (a_{ii}\,x_i + A) + \left|\frac{d\Phi_i}{dA_i}\right| \sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{ij}\,a_{ik}| \right\} \leqslant K,$$

dacă $\|x\| = \sup |x_i|$.

II. Remarcăm că în loc de sistemul (2. 1) putem considera sistemul

$$P_i(x_i;\,A_i,\,C_i^{(0)}) \equiv \varphi_i(x_i)\Phi_i(A_i,\,C_i^{(0)})\,(a_{ii}\,x_i + A_i) = 0 \quad (i=1,2,\ldots),$$

φ_i fiind o funcţie mărginită de formă simplă, neavînd rădăcini reale. Funcţiile φ_i pot contribui la îmbunătăţirea convergenţei.

III. Privind structura formulelor de aproximaţie (4. 1), se observă că la determinarea componentelor $x_i^{(k+1)}$, $(i = 1, 2, \ldots)$, s-au folosit componentele $x_i^{(k)}$, $(i = 1, 2, \ldots)$. Aici putem indica un procedeu modificat folosind formulele

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{\varphi_i(x^{(k)})\,\Phi(A_i^{(k,\,k+1)},\,C_i^{(0)})\,(a_{ii}\,x_i^{(k)} + A_i^{(k,\,k+1)})}{\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial x_i}\right)_0} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4'1}$$

unde s-a notat

$$A_i^{(k,\,k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{\infty} a_{ij}\,x_j^{(k)}.$$

Astfel aici, la calcularea componentelor $x_i^{(k+1)}$ s-au folosit aproximaţiile

$$x_1^{(k+1)},\ x_2^{(k+1)},\ \ldots,\ x_{i-1}^{(k+1)},\ x_i^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)},\ \ldots$$

oarecum analog ca la metoda lui Seidel.

IV. În ce priveşte unicitatea soluţiei, ne putem folosi de asemenea de o altă teoremă a lui Cantorovici:

Dacă condiţiile teoremei precedente sînt îndeplinite cu deosebirea că inegalitatea

$$\|F''(X)\| \leqslant K$$

este satisfăcută în domeniul definit de inegalitatea

$$\|X - X_0\| \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0}\,\eta_0, \tag{5. 1}$$

atunci soluţia sistemului (1'. 1) este unică în domeniul (5. 1).

V. În aplicaţiile practice condiţiile de convergenţă din teorema lui Cantorovici pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii, se arată puţin complicate. Dacă însă din considerente tehnice ne putem da seama de domeniul $\mathcal{D}$ în care trebuie căutată soluţia, atunci ne putem folosi de următoarea condiţie

$$\|E - [F'(X_0)]^{-1}\,F'(X)\| < 1, \quad X \in \mathcal{D},$$

în loc de condiţiile 3°–5°, E fiind matricea unitate.

VI. Formulele de aproximaţie construite în acest paragraf se pot aplica nu numai la sistemul liniar (1'. 1), dar şi în cazul sistemelor infinite neliniare de forma

$$g_i(x_i) + f_i(A_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

unde $g_i(x_i)$ şi $f_i(A_i)$ sînt funcţii de variabilă reală admiţînd derivate de ordinul 2, şi care satisfac condiţiilor din teorema precedentă.

§ 2. Alte metode de interaţie

Considerăm sistemul (1. 1) sub forma următoare

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + B_1 &= 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + B_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{ii}\,x_i + B_i &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

unde $B_i = \sum\limits_{j=i+1}^{\infty} a_{ij}\,x_j - b_i$, $(i = 1, 2, \ldots)$. Construim apoi sistemul neliniar echivalent cu (1. 1),

$$\begin{aligned} &f_1(x_1;\,B_1,\,k_1^0) \equiv \psi_1(B_1;\,k_1^0)\,(a_{11}\,x_1 + B_1) = 0 \\ &f_2(x_1,\,x_2;\,B_2,\,k_2^0) \equiv \psi_2(B_2;\,k_2^0)\,(a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + B_2) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_i(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_i;\,B_i,\,k_i^0) \equiv \psi_i(B_i;\,k_i^0)\,(a_{i1}\,x_1 + \ldots + a_{ii}\,x_i + B_i) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1. 2}$$

Pentru funcţiile ψ_i ipunem exact aceleaşi condiţii ca şi în cazul funcţiilor Φ_i din § 1. În ce priveşte constantele k_i^0, ele se determină astfel ca pentru aproximaţia iniţială $X_0 = (x_1^0,\,x_2^0,\,\ldots,\,x_i^0,\ldots)$

să avem

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 = 0 \quad \text{pentru } j = i+1,\ i+2,\ \ldots,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial B_i}\right)_0 = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Construim operatorul neliniar

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1;\,B_1,\,k_1^0) \\ \vdots \\ f_i(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_i;\,B_i,\,k_i^0) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

a cărei derivată[2] în sensul lui Fréchet în punctul X_0 este de forma

$$f'(X_0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Folosind metoda modificată a lui Newton obținem următoarele formule de aproximație, care se aplică sub forma

$$\tilde{A} X_{k+1} = \tilde{A}_k - \Delta^{-1} f(X_k), \tag{2. 2}$$

unde

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

iar $\Delta = (\delta_{ii})$, $\delta_{ii} = \psi_i(B_i^0, k_i^0)$. Calcularea aproximației X_{k+1} se face la fel ca la metoda lui Seidel.

Observații. I. În loc de sistemul (1. 2) putem considera sistemul:

$$p^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_i; B_i, k_k^0) \equiv \Psi_i(x_i)\, \Psi_i(B_i, k_i^0)\, (a_{i1} x_1 + \dots + a_{ii} x_i + B_i) = 0,$$

$\Psi_i(x_i)$ fiind de asemenea o funcție mărginită, care este supusă la aceleași condiții ca și funcția φ_i din § 1. În acest caz derivata operatorului

$$P(X) \equiv \begin{pmatrix} p^{(1)}(x_1;\ B_1, k_1^0) \\ \vdots \\ p^{(i)}(x_1, \dots, x_i; B_i, k_i^0) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

[2]) În legătură cu existența derivatei se presupune că sumele $\sum_{j=1}^{i} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ și $\sum_{j,l=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_l} \right|$ sînt mărginite pentru orice i.

va fi de asemenea o matrice triunghiulară infinită de forma

$$P'(X_0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_1}\right)_0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \left(\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x_2}\right)_0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial p^{(i)}}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial p^{(i)}}{\partial x_1}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial p^{(i)}}{\partial x_i}\right)_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

II. Matricei $P'(X_0)$ îi putem da o formă mai simplă. Aceasta se realizează ușor, dacă sistemul (1. 1) îl scriem astfel

$$a_{i,\,i-1}\, x_{i-1} + a_{ii}\, x_i + \beta_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

și construim apoi sistemul neliniar

$$\bar{p}^{(i)}(x_{i-1}, x_i;\ \beta_i) \equiv \overline{\Psi}(x_i)\, \Psi(\beta_i;\ K_i^0)\, (a_{i,\,i-1}\, x_{i-1} + a_{ii}\, x_i + \beta_i) = 0.$$

Impunînd condiția $\left(\frac{\partial \bar{p}^{(i)}}{\partial \beta_i}\right)_0 = 0$, $(i = 1, 2, \dots)$, atunci ca derivată obținem o matrice triunghiulară de o formă particulară

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \bar{p}_{32} & \bar{p}_{33} & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{p}_{i,\,i-1} & \bar{p}_{ii} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

În afară de matricile simple considerate aici, se pot folosi și alte tipuri de matrici ale căror inverse se calculează ușor. În mod analog putem construi matricea P' în așa fel ca să avem în fiecare linie a ei cel mult m elemente diferite de zero.

§ 3. Cazul metodei nemodificate a lui Newton

Folosind funcțiile $\Phi_i(A_i;\ C_i^{(k)})$ putem face — la fiecare aproximație $x_i^{(k)}$, $(k = 0, 1, \dots)$ — ca derivata în sensul lui Fréchet să fie o matrice de forma diagonală. Aplicînd procedeul nemodificat al lui Newton

$$X_{k+1} = X_k - [F'(X_k)]^{-1} F(X_k), \tag{1. 3}$$

se ajunge la următoarele formule

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{f_k^{(i)}}{\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_i}\right)_k} \quad (i = 1, 2, \ldots ; k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (1'.3)$$

unde $f_i^{(i)} = \varphi(x_i^{(k)})(a_{ii} x_i^{(k)} + A_i^{(k)})$. Menţionăm însă că teorema lui Cantorovici referitoare la metoda (1'. 3) nu se poate aplica, deoarece în general derivatele de ordinul 2 ale expresiilor

$$\varphi_i(x_i)\,\Phi_i(A_i; C_i^{(k)})\,(a_{ii}\,x_i + A_i)$$

nu mai rămîn mărginite, pentru orice k.

Remarcăm că pentru $\varphi(x_i) = 1$, regăsim metoda lui Pollaczek-Geiringer (metoda iteraţiilor obişnuite).

În sfîrşit, folosind formula (1. 3) şi procedînd analog ca în § 2, se pot da metode asemănătoare cu (2. 2), numai că în acest caz matricea triunghiulară F' va depinde şi de k. Din această categorie face parte şi metoda cunoscută a lui Seidel.

Aceste metode fiind metode de aproximaţii succesive, au următoarea structură

$$X_{k+1} = X_k + \Delta_k,$$

unde X_{k+1}, X_k sînt aproximaţiile respectiv de ordinul $k+1$ şi k, iar Δ_k este corecţia de ordinul k, care se calculează după un anumit algoritm dat. Dacă aceste corecţii în normă se măresc în decursul calculelor, atunci putem considera că procedeul nu este convergent, deoarece lucrînd într-un spaţiu complet, e necesar şi suficient pentru convergenţă ca $\|\Delta_k\| = \|X_{k+1} - X_k\| \to 0$. Nu putem afirma însă nimic despre convergenţa procedeului, atunci cînd constatăm că în decursul calculelor corecţiile în sensul unei norme se micşorează (deoarece aceasta nu înseamnă încă $\|\Delta_k\| \to 0$). În cazul de faţă putem spune doar atît că soluţia aproximativă se ,,apropie'' de cea exactă. Ştim însă că în aplicaţiile numerice se aproximează cu un număr finit de ,,paşi'', adică putem face numai un număr finit de aproximaţii, urmărind o precizie dată. Prin urmare, dacă în decursul aproximaţiilor succesive se constată că corecţiile descresc în normă şi la un moment dat se atinge ordinul preciziei cu care s-au dat coeficienţii şi termenii liberi ai sistemului considerat, atunci o asemenea soluţie aproximativă satisface cerinţele practice. Astfel mai departe este iluzoriu să se continue calculele şi prin urmare nu ne interesează mai departe nici convergenţa procedeului.

În cele ce urmează vom da condiţii de existenţă a soluţiei sistemului şi totodată deliminări pentru evaluarea erorii.

§ 4. Delimitarea erorilor

În § 1 am avut următoarea delimitare

$$\|X^* - X_k\| \leqslant q^{k-1}\|X^* - X_1\| \leqslant q^k 2\eta_0,$$

însă putem da delimitări în care figurează expresii mai simple pentru aplicaţiile numerice.

Considerăm spaţiile liniare normate [2] $\mathbf{X}$ şi $\overline{\mathbf{X}}$, unde $\overline{\mathbf{X}}$ este complet şi izomorf cu subspaţiul $\mathbf{X}' \subset \mathbf{X}$. Presupunem apoi că această izomorfie se realizează cu ajutorul unui operator liniar φ_0 care aplică $\mathbf{X}'$ pe $\overline{\mathbf{X}}$, iar φ_0^{-1} există şi este continuă. În sfîrşit, se mai presupune că φ_0 poate fi extinsă la tot spaţiul $\mathbf{X}$.

Considerăm ecuaţia ,,exactă''

$$KX \equiv X - \lambda HX = Y, \qquad (1.4)$$

unde X, $Y \in \mathbf{X}$, iar H este un operator care aplică pe $\mathbf{X}$ în el însuşi. Pentru rezolvarea aproximativă a ecuaţiei (1. 4) mai considerăm ecuaţia ,,aproximativă''

$$\overline{K}\,\overline{X} \equiv \overline{X} - \lambda \overline{H}\,\overline{X} = \overline{Y} = \varphi Y. \qquad (2.4)$$

Condiţia ca ecuaţiile (1. 4) şi (2. 4) să fie ,,apropiate'' se exprimă astfel:

$$\|\varphi K X' - \overline{K} \varphi X'\| \leqslant \varepsilon\,|\lambda|\,.\,\|X'\|, \quad X' \in \mathbf{X}'. \qquad (\mathrm{I})$$

Se mai presupune că pentru orice element $X \in \mathbf{X}$ există un element $X' \in \mathbf{X}'$ astfel ca

$$\|HX - X'\| \leqslant \varepsilon_1 \|X\|, \qquad (\mathrm{II})$$

iar pentru elementul Y există un element $Y' \in \mathbf{X}'$ astfel încît

$$\|Y - Y'\| \leqslant \varepsilon_2 \|Y\|. \qquad (\mathrm{III})$$

În cazul nostru vom avea

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}' = \overline{\mathbf{X}}.$$

Considerăm acum sistemul ,,exact''

$$AX = f$$

şi cel ,,aproximativ''

$$\overline{X} = \overline{f},$$

unde $\overline{f} = x_0 - C_0(Ax_0 - f)$, C_0 fiind o matrice diagonală cu elementele diagonale diferite de zero. Aceste elemente se calculează după o anumită regulă (de ex. conform metodei lui Newton) sau se aleg empiric, ţinînd seama de cerinţele calculelor practice.

Soluţiile X, $\overline{X}$ le vom căuta sub forma $X = x + x_0$, $\overline{X} = \overline{x} + x_0$; x_0 este o soluţie aproximativă, $\overline{x}$ o corecţie pentru obţinerea aproximaţiei $\overline{X}$ iar x este corecţia ,,exactă''. Efectuînd aceste transformări obţinem

$$Ax = -(Ax_0 - f)$$

$$\overline{x} = -C_0(Ax_0 - f).$$

În sfîrşit, înmulţind primul sistem cu matricea C_0 obţinem sistemele

$$C_0 A x = - C_0 (A x_0 - f)$$
$$\bar{x} = - C_0 (A x_0 - f).$$

Astfel în cazul nostru avem $K = C_0 A$ şi $\bar{K} = E$, E fiind matricea unitate; iar $Y = \bar{Y} = - C_0 (A x_0 - f)$ şi deci $\varphi = \varphi_0 = E$. Acum condiţia (I) se prezintă sub forma

$$\|C_0 A x - E x\| \leqslant \varepsilon \|x\|,$$

iar pentru ε putem pune $\varepsilon = \|C_0 A - E\|$. În ce priveşte condiţiile (II) şi (III), ele se îndeplinesc din cauză că spaţiile $\mathbf{X}$ şi $\mathbf{X}'$ coincid. Astfel avem $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

Aplicînd acum teoremele 2, 5 şi 7 ale lui Cantorovici [2], obţinem următorul rezultat:

Dacă este îndeplinită inegalitatea

$$2 \|C_0 A - E\| < 1,$$

atunci există o soluţie X^*, care este unică şi avem evaluarea

$$\|X^* - \bar{X}\| \leqslant \frac{2 \|C_0 A - E\|}{1 - 2 \|C_0 A - E\|} \|C_0 (A x_0 - f)\|.$$

Observaţie. Dacă în loc de ecuaţia $\bar{X} = \bar{f}$ avem ecuaţia aproximativă

$$\tilde{A} \bar{X} = f',$$

unde $f' = \tilde{A} x_0 - \Delta^{-1} f(x_0)$ (vezi formula (2. 2)), atunci se poate proceda ca şi în cazul de mai înainte. Expresia $\Delta^{-1} f(x_0)$ se poate pune sub forma $\gamma_0 (A x_0 - f)$ şi în cazul de faţă vom avea $K = \gamma_0 A$, $\bar{K} = \tilde{A}$, $\varepsilon = \|\gamma_0 A - \tilde{A}\|$. În sfîrşit, ajungem la următoarea delimitare

$$\|X^* - X\| \leqslant \frac{2 \|\gamma_0 A - \tilde{A}\| \, \|\tilde{A}^{-1}\|}{1 - 2 \|\gamma_0 A - \tilde{A}\| \, \|\tilde{A}^{-1}\|} \|\gamma_0 (A x_0 - f)\|.$$

Aceste delimitări pot fi folosite şi în cazul metodelor tratate în § 3, punînd $X = X_k$. (pentru un k fix).

Institutul de Calcul
Academia R.P.R. — Filiala Cluj

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Краткое содержание)

В настоящей работе путем обобщения известных методов Поллачек-Гейрингера [3], даются новые методы численных решений бесконечных систем линейных уравнений.

Бесконечная система линейных уравнений преобразуется в эквивалентную нелинейную систему, подобранную таким образом, чтобы при применении обобщенного метода Ньютона (обобщения Канторовича), производная операция F была бы матрицей простой формы, например диагональной треугольной и т. д.

SUR LA RÉSOLUTION APPROXIMATIVE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES INFINIES

(Résumé)

Dans ce travail l'auteur donne des méthodes nouvelles pour la résolution numérique des systèmes linéaires infinis, en généralisant les méthodes connues de Pollaczek—Geiringer et de Seidel [3].

Ici le système linéaire a été transformé dans un système non-linéaire équivalent, choisi convenablement de manière suivante: en appliquant la méthode de Newton généralisée par Kantorovitch — la dérivée de l'opération F est une matrice de forme simple, par ex. de forme diagonale, triangulaire, etc.

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. Канторович, *О методе Ньютона*. Труды Мат. Инст. и В. А. Стеклова, XXVIII, 127 (1949).
2. — *Функциональный анализ и прикладная математика*. Успехи мат. Наук, III, 6, p. 107, 111 (1948).
3. B. Jankó, *Metoda lui Newton şi rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuaţii algebrice liniare*. Studii şi Cerc. de Mat. (Cluj), **VIII**, 103 (1957).