ASUPRA ERORII IN PROCEDEUL DE INTEGRARE NUMERICĂ AL LUI RUNGE-KUTTA

DE

ERVIN SCHECHTER

Comunicare prezentată în ședința din 24 septembrie 1956 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

1. In practica integrării numerice a ecuațiilor diferențiale, procedeul lui Runge-Kutta joacă astăzi un rol important. Avantajele și dezavantajele acestei metode au fost rezumate de Milne [4] în următoarele:

a) Spre deosebire de așa-zisele ,,metode cu diferențe" (ca de exemplu cele ale lui Adams, Nyström, Störmer etc), aici nu e nevoie să se calculeze cu ajutorul unor iterații inițiale cîteva valori necesare la pornirea calculelor.

b) Spre deosebire de alte metode, în procedeul Runge-Kutta pasul se poate schimba fără dificultăți suplimentare, în tot timpul calculului.

Pe de altă parte:

c) La fiecare pas sînt necesare patru substituții, ceea ce poate complica lucrurile și poate introduce erori nedorite.

d) Nu avem pînă în prezent o delimitare simplă și practic utilizabilă a erorii.

Avantajul de la pct. *a*) este de mare importanță pentru mașinile de calculat, deoarece în aceeași problemă nu este necesară schimbarea formulei. A doua concluzie ne dă posibilitatea de a adapta rețeaua de noduri la ecuația de integrat.

Dintre delimitările obținute pentru eroare trebuie să amintim în primul rînd cea dată de Bieberbach [3], care are însă neajunsul de a fi valabilă numai pentru primul pas.

Este evident însă că în practică nu ne putem limita niciodată la aplicarea, o singură dată, a formulei lui Runge-Kutta, din cel puțin două motive: în primul rînd fiindcă în aplicații, în general, nu ajunge cunoașterea unui singur punct al soluției; în al doilea rînd, chiar dacă acest lucru s-ar întîmpla, nu este recomandabil ca acest punct să fie atins printr-un singur pas, dată fiind convergența procedeului.

Însuși Runge [1] s-a ocupat de problema acumulării erorilor, la aplicarea succesivă, de mai multe ori, a formulei lui Runge-Kutta, fără să dea însă o delimitare explicită. Mai recent, Albrecht [6] a reluat ideea lui Runge tot pentru ecuația de ordinul 1, și a dat o delimitare pentru procedeul lui Heun. Pentru formula lui Runge-Kutta (mai exact a lui Kutta) expresia dată de el este prea complicată, iar forma ei nu reflectă ordinul de mărime al erorii.

Deoarece cea mai uzuală metodă de tip Runge-Kutta este chiar formula lui Kutta, scopul principal al lucrării de față este găsirea unei delimitări pentru eroarea acestei formule, cît și extinderea ei la sisteme de ecuații.

2. Să ne ocupăm întîi de ecuația de ordinul 1, $y'=f(x, y)$, cu condiția inițială $y(x_0)=y_0$, și să introducem următoarele notații:

$y(x_i)$ — valorile exacte ale integralei în punctele x_i $i=1, 2, \ldots, n$,

y_i — valorile aproximative în punctele x_i obținute cu ajutorul formulei (5), plecînd de la valoarea exactă $y(x_i)$

y_i — valorile aproximative obținute cu ajutorul lui (4), plecînd de această dată de la valoarea aproximativă precedentă y_{i-1}

$$\varepsilon_i = y_i - y(x_i) \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Presupunem acum că în dreptunghiul D, definit de inegalitățile

$$|x-x_0| < a\,; \qquad |y-y_0| < b, \tag{1}$$

funcția $f(x, y)$ și derivatele sale parțiale (pînă la ordinul 4 inclusiv) sînt continue, și că tot în acest domeniu au loc inegalitățile:

$$|f(x, y)| \leqslant N \qquad \left|\frac{\partial^i f(x, y)}{\partial x^i\, \partial y^k}\right| \leqslant \frac{M}{N^{K-1}}\,; \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2}$$

unde $M>0, N>0, aN \leqslant b, aM \leqslant 1$.

Evident, atunci avem satisfăcută condiția lui Lipschitz:

$$|f(x, y_1)| - f(x, y_2)| \leqslant M\, |y_1 - y_2| \tag{3}$$

(x, y) și $(x, y_2) \in D$.

In cele ce urmează ne vom folosi de următoarele formule:

$$y_{i+1} = y_i + h\, k_i \tag{4}$$

$$Y_{i+1} = y\,(x_i) + hK_i \tag{5}$$

unde

$$k_i = \frac{k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}}{6}\,; \qquad K_i = \frac{K_{i1} + 2K_{i2} + 2K_{i3} + K_{i4}}{6}\,;$$

iar

$$k_{i1} = f\,(x_i, y_i) \qquad K_{i1} = f\,(x_i, y\,(x_i))$$

$$k_{i2} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\, k_{i1}\right) \qquad K_{i2} = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y\,(x_i) + \frac{h}{2}\, K_{i1}\right)$$

$$k_{i3} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\, k_{i2}\right) \qquad K_{i3} = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y\,(x_i) + \frac{h}{2}\, K_{i2}\right)$$

$$k_{i4} = f\,(x_i + h,\ y_i + h\, k_{i3}) \qquad K_{i4} = f\,(x_i + h,\ y\,(x_i) + h\, K_{i3})$$

Pentru a delimita eroarea la pasul i să scriem:

$$|y^i{}_{+1} - y\,(x_{i+1})| \leqslant |y_{i+1} - Y_{i+1}| + |Y_{i+1} - y\,(x_{i+1})| \tag{6}$$

Pe de altă parte, din (4) și (5) rezultă:

$$y_{i+1} - Y_{i+1} = y_i - y\,(x_i) + h\,(k_i - K_i) \tag{7}$$

De aici, folosindu-ne de condiția lui Lipschitz, obținem:

$$|y_{i+1} - Y_{i+1}| \leqslant |\varepsilon_i| + \frac{hM}{6}\left[6 + 3hM + (hM)^2 + \frac{(hM)^3}{4}\right] |\varepsilon_i| \tag{8}$$

Pentru celălalt termen din (6) avem, prin însăși construcția procedeului

$$|Y_{i+1} - y\,(x_{i+1})| \leqslant Ch^5$$

unde C este o constantă independentă de h. De aici și din (8) rezultă atunci următoarea inegalitate pentru eroare:

$$|\varepsilon_{i+1}| \leqslant \left\{1 + \frac{hM}{6}\left[6 + 3hM + (hM)^2 + \frac{(hM^3)}{4}\right]\right\} |\varepsilon_i| + Ch^5 \tag{9}$$

În formula (8) coeficientul lui $|\varepsilon_i|$ se numește „factor de acumulare", iar termenul Ch^5 „eroare de cuadratură" (eroare comisă la primul pas).

Pentru eroarea de cuadratură putem folosi rezultatele lui B i e b e r b a c h din [3]:

$$h^5\, [MN\, 3{,}680642361 + M^2N\, 5{,}3618055\ldots +$$
$$+ M^3N\, 1{,}220833\ldots + M^4N\, 0{,}0166\ldots]$$

sau

$$h^5MN\,\frac{M^4-1}{M-1}\,5{,}37$$

Relația (6) devine atunci

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{i+1}| \leqslant & \left\{1 + \frac{hM}{6}\left[6 + 3\,hM + (hM)^2 + \frac{(hM)^3}{4}\right]\right\} |\varepsilon_i| + \\ & + h^5\, [MN\, 3{,}680642361 + M^2N\, 5{,}3618055\ldots + \\ & + M^3N\, 1{,}220833\ldots + M^4N\, 0{,}0166\ldots] \end{aligned} \tag{10}$$

sau respectiv

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{i+1}| \leqslant & \left\{1 + \frac{hM}{6}\left[6 + 3hM + (hM)^2 + \frac{(hM)^3}{4}\right]\right\} |\varepsilon_i| + \\ & + h^5MN\,\frac{M^4-1}{M-1}\,5{,}37. \end{aligned} \tag{11}$$

Aceste două formule ne dau o delimitare recurentă a erorii. Relația (10) este mai bună ca (11).

Se poate obține și o evaluare directă, observînd că întrucît (10) și (11) sînt de forma:

$$|\varepsilon_{i+1}| \leqslant \alpha\, |\varepsilon_i| + \beta$$

avem

$$|\varepsilon_i| \leqslant \beta (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots \alpha^{i-1}) = \beta \frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1}.$$

Înlocuind acum pe α și β cu valorile lor, primim:

$$|\varepsilon_i| \leqslant h^4 \frac{N\,3{,}680642361 + MN\,5{,}3618055\ldots + M^2N\,1{,}220830\ldots + M^3N\,0{,}0166}{1 + \frac{1}{2}hM + \frac{1}{6}(hM)^2 + \frac{1}{24}(hM)^3} \times$$

$$\times \left\{\left[1 + \frac{hM}{6}\left(6 + 3\,hM + (hM)^2 + \frac{(hM)^3}{4}\right)\right]^i - 1\right\} \tag{12}$$

sau

$$|\varepsilon_i| \leqslant h^4 \frac{M\,(M^4 - 1)\,5{,}37}{(M - 1)\left[1 + \frac{1}{2}hM + \frac{1}{6}(hM)^2 + \frac{1}{24}(hM)^3\right]} \times$$

$$\times \left\{\left[1 + \frac{hM}{6}\left(6 + 3hM + (hM)^2 + \frac{(hM^3)}{4}\right)\right]^i - 1\right\} \tag{13}$$

Evaluările recurente rămîn totuși preferabile, deoarece ele pot fi utilizate și în cazul rețelelor cu noduri neechidistante. Formulele (12) sau (13) permit pe de altă parte să tragem concluzia că ordinul de convergență al procedeului este cel puțin $0(h^4)$.

3. În paragraful precedent s-a arătat că procedeul lui Runge-Kutta este destul de rapid convergent în ceea ce privește eroarea de integrare. Se știe însă că în metodele de tip Runge-Kutta, mai mult ca în altele, pe lîngă eroarea mai sus amintită erorile de rotunjire au o influență puternică, datorită faptului că la fiecare pas sînt necesare mai multe substituții. Numerele obținute din aceste substituții, precum și mediile ce trebuie efectuate, nu sînt în general numere practice, prin urmare în calculele curente trebuie făcute rotunjiri. Erori de acest gen, chiar dacă sînt neglijabile la început, se pot acumula în procesul integrării numerice dînd de multe ori naștere la însemnate denaturări ale rezultatelor.

Pentru a studia influența erorilor de rotunjire, la notațiile introduse în paragraful 2 să mai adăugăm următoarele:

$\overline{y}_i$ — valorile aproximative obținute cu ajutorul formulei (15), afectate atît de eroarea metodei cît și de erorile de rotunjire

$$\eta_i = \overline{y}_i - y_i.$$

Să însemnăm acum cu δ_{i1}, δ_{i2}, δ_{i3}, δ_{i4} erorile de înlocuire de care sînt afectate valorile k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, k_{i4}, și cu δ_{i0} eroarea de rotunjire comisă la calculul mediei acestei valori. Atunci eroarea de rotunjire la pasul i este:

$$\delta_i = \frac{\delta_{i1} + 2\delta_{i2} \quad 2\delta_{i3} + \delta_{i4}}{6} + \delta_{i0} \tag{14}$$

Valorile $\overline{y}_i$ se obțin prin recurență, cu ajutorul formulei

$$\overline{y}_{i+1} = \overline{y}_i + h\overline{k}_i + \delta_i \tag{15}$$

unde

$$\begin{aligned} \overline{k}_i &= \frac{\overline{k}_{i1} + 2\overline{k}_{i2} + 2k_{i3} + \overline{k}_{i4}}{6} \\ \overline{k}_{i1} &= f(x_i, \overline{y}_i) \\ \overline{k}_{i2} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \overline{y}_i + \frac{h}{2}\overline{k}_i\right) \\ \overline{k}_{i3} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, \overline{y}_i + \frac{h}{2}\overline{k}_i\right) \\ \overline{k}_{i1} &= f(x_i + h, \overline{y}_i + h\,\overline{k}_{i2}) \end{aligned} \tag{16}$$

Pentru evaluarea erorii să scriem diferența $y(x_i) - y_i$ sub forma

$$y(x_i) - \overline{y}_i = (y(x_i) - Y_i) + (Y_i - y_i) + (y_i - \overline{y}_i) \tag{17}$$

În cele ce urmează ne vom ocupa de evaluarea celui de al treilea termen: eroarea de rotunjire.

Pentru aceasta, să scădem din (15) pe (4). Obținem:

$$\eta_{i+1} = \eta_i + h(\overline{k}_i - k_i) + \delta_i \tag{18}$$

În aplicații e suficient să luăm $|\delta_i| = \delta =$ const., ceea ce practic înseamnă că la fiecare pas mediile se calculează cu același număr de zecimale exacte. Din relația (7) rezultă atunci:

$$|\eta_{i+1}| \leqslant |\eta_i| + h\,|\overline{k}_i - k_i| + \delta. \tag{19}$$

Procedînd la fel ca și pentru $|k_i - K_i|$, se găsește următoarea inegalitate:

$$|\overline{k}_i - k_i| \leqslant \frac{M}{6}\left[6 + 3hM + (hM)^2 + \frac{(hM)^3}{4}\right] |\eta_i|.$$

Introducînd-o pe aceasta în (19), obținem:

$$|\eta_{i+1}| \leqslant \left\{1 + \frac{hM}{6}\left[6 + 3hM + (hM)^2 + \frac{(hM)^3}{4}\right]\right\} |\eta_i| + \delta \tag{20}$$

Rezultă atunci:

$$|\eta_{i+1}| + |\varepsilon_{i+1}| \leqslant \left\{1 + \frac{hM}{6}\left[6 + 3hM + (hM)^2 + \frac{(hM)^3}{4}\right]\right\} \times$$

$$\times (|\eta_i| + |\varepsilon_i|) + \delta + Ch^5. \tag{21}$$

Pentru eroarea de cuadratură Ch^5 se poate folosi din nou rezultatul lui Bieberbach. Se poate da și o evaluare directă a erorii, așa cum s-a făcut în paragraful 2.

Dacă în locul indentității (17) scriem numai :

$$y(x_i) - \bar{y}_i = (y(x_i) - Y_i) + (Y_i - \bar{y}_i)$$

obținem o relație de recurență mai bună decît (21)

$$|\eta_{i+1} + \varepsilon_{i+1}| \leqslant \left\{1 + \frac{hM}{6}\left[6 + 3hM + (hM)^2 + \frac{(hM)^3}{4}\right]\right\} \times \qquad (22)$$

$$\times(|\eta_i| + |\varepsilon_i|) + \delta + Ch^5.$$

4. Relațiile (21) și (22), în care se ține seama și de erorile de rotunjire, nu ne mai permit — ca (12) și (13) — să afirmăm că metoda lui Runge și Kutta este convergentă și în acest caz.

De fapt, exemplul de mai jos arată că pentru ecuații destul de simple procedeul poate deveni divergent în raport cu erorile de rotunjire.

Fie pentru aceasta ecuația liniară :

$$y' = Ay + B(x) \qquad y(x_0) = y_0$$

A fiind o constantă nenulă. Vom nota pentru comoditate $Ay + B(x) = \varphi(x, y)$; evident atunci $\varphi'_y(x, y) = A$.

Ne propunem acum să analizăm acumularea erorilor de rotunjire cu ajutorul relației (18).

Pentru a calcula diferența $\bar{k}_i - k_i$ ce figurează în această relație, să observăm că avem în baza formulei mediei :

$$\varphi(x, \bar{y}_i) - \varphi(x, y_i) = A\,\eta_i$$

$$\varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{i1}\right) - \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{i1}\right) = A\left(\eta_i + \frac{h}{2}A\,\eta_i\right)$$

$$\varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, \bar{y}_i + \frac{h}{2}\bar{k}_{i2}\right) - \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{i1}\right) =$$

$$= A\left[\eta_i + \frac{h}{2}A\left(\eta_i + \frac{h}{2}A\,\eta_i\right)\right]$$

$$\varphi(x_i + h, \bar{y}_i + h\,\bar{k}_{i1}) - \varphi(x_i + h, y_i + h\,k_{i3}) =$$

$$= A\left\{\eta_i + h\,A\left[\eta_i + \frac{h}{2}A\left(\eta_i + \frac{h}{2}A\,\eta_i\right)\right]\right\}.$$

Prin urmare

$$\eta_{i+1} = \eta^i + \frac{h}{6}\eta_i\left[6A + 3hA^2 + h^2A^3 + \frac{h^3A^4}{4}\right] + \delta_i = \qquad (23)$$

$$= \eta_i(1 + h\,O(1)) + \delta_i .$$

Aceasta este o ecuație cu diferențe de forma :

$$\eta_{i+1} = \alpha\eta_i + \delta_i$$

a cărei soluție se vede ușor că este :

$$\eta_{i+1} = \alpha^i\delta_0 + \alpha^{i+1}\delta_1 + \ldots + \delta_i \qquad (24)$$

Dacă la micșorarea pasului h nu facem nici o ipoteză suplimentară asupra comportării erorilor de rotunjire, e clar că în general $\lim \delta_i$ nu există. Să arătăm că în acest caz nu există nici limita lui η_{i+1}. $i \to \infty$

În acest scop să notăm :

$$\alpha = \frac{1}{\beta}$$

Atunci (24) devine :

$$\eta_{i+1} = \frac{1}{\beta^i}(\delta_i\beta^i + \delta_{i-1}\beta^{i-1} + \ldots + \delta_0) \qquad (25)$$

Deoarece

$$\alpha = (1 + hO(1)) \qquad \text{iar} \quad h = \frac{x_i - x_0}{i} = \frac{\text{const.}}{i}$$

avem

$$\lim_{i\to\infty} \alpha^i = \lim_{h\to 0} \alpha^i = \lim (1 + hO(1))^{\frac{x_i - x_0}{h}} \neq 0$$

prin urmare și

$$\lim \frac{1}{\beta^i} = \text{const.} \neq 0.$$

Celălalt factor din (25) fiind suma parțială a unei serii cu termenul general netinzînd spre zero, nu are o limită. Aceasta înseamnă că nu există nici lim η_{i+2} și că metoda este deci divergentă în raport cu erorile de rotunjire.

Pentru ca și în aceste cazuri metoda lui Runge-Kutta să rămînă totuși convergentă, trebuie ca cel puțin $\delta = o(h)$. Aceasta înseamnă că odată cu micșorarea pasului trebuie mărită precizia calculelor. Pe de altă parte, la micșorarea pasului — pe lîngă precizia calculelor — crește cantitatea lor și de aceea nu este recomandabil să se scadă pasul sub o anumită limită. În fiecare problemă avem deci de a face cu ceea ce a numit C o l l a t z [2] ,,pas natural".

5. Cele spuse anterior despre formula lui K u t t a se pot generaliza pentru orice metodă generală de tip Runge-Kutta fără dificultăți principiale :

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{p} R_j k_j \qquad \sum R_j = 1 \qquad (26)$$

$$k_{ij} = f(x_i + \alpha_j h, y_i + h\sum_{r=1}^{j-1} \gamma_{jr}k_{jr} \qquad j > 1$$

$$k_{i1} = f(x_i, y_i)$$

Notînd media $\sum_{=}^{p} R_j k_{ij}$ cu k_i, relația de recurență devine :

$$y_{i+1} = y_i + hk_i$$

sare se poate studia ca și cazul clasic.

Desigur, calculul factorului de acumulare și al erorii de cuadratură poate fi foarte laborios, metoda însă rămîne valabilă și aici. În ceea ce privește acumularea erorii de rotunjire, tot ce s-a spus mai sus rămîne valabil fără modificări.

Amintim că scheme generale de tipul (26), precum și obținerea lor, au fost studiate în lucrarea [5].

6. Rezultatele anterioare se pot generaliza și pentru sisteme de ecuații diferențiale.

Fie sistemul

$$y_\lambda^1 = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n \cdot$$

cu condițiile inițiale

$$y_\lambda(x_0) = y_{\lambda 0}$$

In paralelipipedul

$$|x - x_0| < a\,; \quad |y - y_0| < b$$

delimitările inițiale se scriu de data aceasta în felul următor:

$$|f_\lambda(x, y_1, \ldots, y)| \leqslant N\,; \quad \left|\frac{\partial^l f(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial x^i \ \partial y^{k_1}, \ldots \partial y_n^{k_n}}\right| \leqslant \frac{M}{N^{k_1+k_2+\ldots+k_n-1}}$$

$$l = 1, 2, 3, 4.$$

Valorile aproximative care se atașează soluției $y_\lambda(x)$ în punctele x_i sînt acum $y_\lambda(x_i), Y_{\lambda_i}, y_{\lambda_i}$ și $\overline{y}_{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Vrem să delimităm diferența $y_\lambda(x_i) - \overline{y}_{\lambda i}$.

Pentru aceasta vom scrie:

$$y_\lambda(x_i) - \overline{y}_{\lambda,i} = (y_\lambda(x_i) - Y_{\lambda,i}) + (Y_{\lambda,i} - y_{\lambda,i}) + (y_{\lambda,i} - \overline{y}_{\lambda,i}) \tag{27}$$

de unde rezultă

$$|y_\lambda(x_i) - \overline{y}_{\lambda,i}| \leqslant |y_\lambda(x_i) - Y_{\lambda,i}| + |Y_{\lambda,i} - Y_{\lambda,i}| + |y_{\lambda,i} - \overline{y}_{\lambda,i}|$$

Printr-un calcul analog cu cel făcut în paragraful 2, găsim cu ajutorul condiției lui Lipschitz pentru primii doi termeni

$$|\varepsilon_{\lambda,i+1}| \leqslant |\varepsilon_{\lambda,i}| + \frac{hM}{6}\left[6 + 3hMn + (hMn)^2 + \frac{(hMn)^3}{4}\right]\sigma_i + Ch^5$$

unde

$$|\varepsilon_{\lambda,i}| = |y_\lambda(x_i) - y_{\lambda,i}|\,; \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_{j,i}|.$$

Pentru eroarea de cuadratură Ch^5, se poate folosi rezultatul lui B i e b e r b a c h [3] pentru sisteme de ecuații.

Pentru cel de al treilea termen avem, dacă notăm

$$\eta_{\lambda,i} = y_{\lambda,i} - \overline{y}_{\lambda,i}$$

$$|\eta_{\lambda,i+1}| \leqslant |\eta_{\lambda,i}| + \frac{hM}{6}\left[6 + 3hMn + (hMn)^2 + \frac{(hMn)^3}{4}\right] s_i + \delta \tag{28}$$

unde $s_i = \sum_{j=1}^{n} |\eta_{j,i}|$ iar δ este o margine superioară pentru erorile de rotunjire. Notînd:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_{j,i} + \eta_{j,i}|$$

eroarea totală se poate delimita astfel:

$$|\varepsilon_{\lambda,i} + \eta_{\lambda,i+1}| \leqslant |\varepsilon_{\lambda,i} + \eta_{\lambda,i}| + \frac{hM}{6}\Big[6 + 3hMn + (hMn)^2 + \tag{29}$$

$$+ \frac{(hMn)^3}{4}\Big] S_i + Ch^5 + \delta$$

$$\lambda = 1, 2, \ldots, n.$$

Sistemul (29) se poate scrie mai concis sub forma:

$$|\varepsilon_{\lambda,i+1} + \eta_{\lambda,i+1}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \gamma_{\lambda j} \, |\varepsilon_{j,i} + \eta_{j,i}| + \beta \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n$$

dacă punem

$$\gamma_{\lambda j} = \begin{cases} \alpha & , \neq \lambda \\ \alpha + 1 & j = \lambda \end{cases}$$

α fiind coeficientul lui s_i, iar β eroarea de cuadratură plus cea de rotunjire.

Un studiu asupra convergenței se poate face plecînd de la un sistem de ecuații cu diferențe corespunzătoare lui (23).

Univ. „V. Babeș" Cluj,
Catedra de analiză

BIBLIOGRAFIE

1. C. R u n g e, *Ueber die numerische Auflösung totaler Differentialgleichungen.* Gött. Nachr,. 1905, 252—257.
2. L. C o l l a t z, *Natürliche Schrittweite bei numerischer Integration von Differentialgleichungsyst..* ZAMM, 22, 4, 216, 1942.
3. L. B i e b e r b a c h, *On the Remainder of the Runge-Kutta Formula in the Theory of Ordinary Differential Equations*, ZAMP, 2, 233—248, 1951.
4. W. E. M i l n e, *Numerical Solutions of Differential Equations.* New-York—London, 1953.
5. D. V. I o n e s c u, *O generalizare a unei proprietăți ce intervine în metoda lui Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.* Bul. științ., Acad. R.P.R.—Secț. de mat.-fiz., 2, VI, 229—241, 1954.
6. J. A l b r e c h t, *Beiträge zum Runge-Kutta Verfahren.* ZAMM, 35, 100—110, 1955.

О ПОГРЕШНОСТИ В ПРИЕМЕ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ РУНГЕ-КУТТА

(Краткое содержание)

В этой статье обобщается для любого числа шагов оценка, данная Бибербахом (3), для погрешности метода численного интегрирования Рунге-Кутта, верная только для первого шага. Рассматривается потом оценка округления, устанавливая на простом примере, что метод Рунге-Кутта, хотя он сходится относительно погрешности способа, может оказаться расходящимся, если учитывается слущение погрешностей огругления.

В последнем параграфе результаты обобщаются для систем уравнений.

SUR L'ERREUR DU PROCÉDÉ D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE RUNGE-KUTTA

(Résumé)

Dans le présent articole on généralise, au cas d'un nombre quelconque de pas, une délimitation donnée par Bieberbach [3] pour l'erreur de la méthode d'intégration numérique de Runge-Kutta, valable seulement pour le premier pas. On considère ensuite l'erreur d'arrondiment, en montrant sur un exemple simple que la méthode de Runge-Kutta, bien que convergente en ce qui concerne l'erreur du procédé, peut devenir divergente, si l'on considère aussi l'accumulation des erreurs d'arrondiment.

Au dernier paragraphe les résultats sont étendus aux systèmes d'arrondiment.