# INTERPOLAREA ÎN SPAȚII ABSTRACTE

DE

ELENA MOLDOVAN

*Lucrare prezentată în sesiunea din 20—22 mai 1959 a Universității „Babeș — Bolyai" — Cluj*

**1.** În această lucrare urmărim să introducem o schemă generală de interpolare cu scopul de a da o extindere a unor proprietăți care sînt legate de interpolarea prin polinoame.

Se consideră un spațiu liniar normat[1]) $V$ și un subspațiu $S$ al lui $V$. Fie $U$ o operație liniară[2]), definită pe spațiul $V$ și cu valorile aparținînd de asemenea spațiului $V$.

Definiția 1. *Subspațiul $S$ îl numim subspațiu interpolator relativ la operația $U$, dacă*: 1°. *oricare ar fi $v \in V$, avem $U(v) \in S$*; 2°. *oricare ar fi $v \in S$, avem $U(v) = v$.*

Fie $\mathcal{U}$ o mulțime de operații liniare definite pe spațiul $V$ și cu valorile în $V$.

Definiția 2. *Subspațiul $S$ îl numim interpolator relativ la mulțimea $\mathcal{U}$, dacă el este interpolator relativ la fiecare element $U \in \mathcal{U}$.*

Pentru a exemplifica noțiunea de subspațiu interpolator față de o operație $U$ să considerăm spațiul $C$ al funcțiilor continue pe intervalul $[0, 1]$. Să notăm cu $L_n$ un sistem de funcții $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, din $C$, liniar independente. Există atunci cel puțin $n$ puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în $[0, 1]$, astfel ca determinantul

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \tag{1}$$

---

1) Norma unui element $x \in V$ se va nota prin simbolul $\|v\|$.
2) Aditivă și omogenă.

să fie diferit de zero. Să considerăm subspaţiul $S$ al lui $C$, format din toate combinaţiile liniare $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$ ale funcţiilor $\varphi_i(x)$. Determinantul (1) fiind presupus diferit de zero, există în $S$ o funcţie şi una singură $h(x)$, astfel ca $h(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $y_i$ fiind numere date oarecare.[3] Fie $U$ operaţia prin care se face să corespundă unei funcţii oarecari $f(x)$ din $C$, funcţia $U(f) = H\begin{pmatrix}\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n\end{pmatrix}; f|x\Big)$. Subspaţiul $S$ considerat este interpolator faţă de operaţia $U(f)$ astfel definită.

Dacă funcţiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, formează un sistem Cebîşev pe intervalul $[0, 1]$, atunci determinantul (1) este diferit de zero, oricare ar fi punctele distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Rezultă imediat că operaţia $U(f) = H\left(\begin{matrix}\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n\end{matrix}; f|x\right)$ are proprietatea de mai sus pentru orice sistem de puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din $[0, 1]$.

Un alt exemplu care are un rol important în analiza numerică, ni-l oferă schema de interpolare a lui L. G o n c i a r o v [1].

Se consideră sistemul de funcţionale liniare

$$A_k(f), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

definit pe spaţiul $C$.

Fie $\mathcal{P}_n$ mulţimea polinoamelor de grad cel mult egal cu $n$. Să notăm cu $P_n(A_0, A_1, \ldots, A_n; f|x)$ polinomul $P_n(x) \in \mathcal{P}_n$, care satisface condiţiile

$$A_k(P_n) = A_k(f), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

funcţia $f(x) \in C$ fiind dată. Este clar că dacă determinantul

$$\begin{vmatrix} A_0(1) & A_0(x) & \ldots & A_0(x^n) \\ A_1(1) & A_1(x) & \ldots & A_1(x^n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n(1) & A_n(x) & \ldots & A_n(x^n) \end{vmatrix} \tag{4}$$

este diferit de zero, atunci pentru orice $f \in C$, există polinomul $P_n(A_0, A_1, \ldots, A_n; f|x)$ şi el este unic determinat. Să considerăm operaţia $U(f) = P_n(A_0, A_1, \ldots, A_n; f|x)$. Subspaţiul $\mathcal{P}_n$ al lui $C$ este interpolator relativ la operaţia $U$ astfel definită.

Particularizînd sistemul de funcţionale (2), obţinem diferite procedee de interpolare bine cunoscute. De exemplu, dacă

$$A_k(f) = \int_0^1 x^k f(x)\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

[3]) Funcţia $h(x)$ o notăm cu $H\left(\begin{matrix}\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n\end{matrix}; y|x\right)$ sau dacă $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, cu $H\left(\begin{matrix}\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n\end{matrix}; f|x\right)$.



atunci determinantul (4) devine

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots & \frac{1}{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \ldots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix},$$

care se ştie că este diferit de zero. Operaţia $U(f) = \mathcal{P}_n(A_0, A_1, \ldots, A_n; f|x)$ corespunzătoare sistemului (5) transformă orice funcţie[4]) din $C$ în secţiunea de ordinul $n$ a seriei sale Fourier relativă la polinoamele lui Legendre.

În general dacă se consideră un sistem ortogonal de funcţii într-un spaţiu de bază $V$, subspaţiul liniar generat de acest sistem[5]) este interpolator faţă de operaţia care transformă o funcţie din $V$ în secţiunea de un ordin dat, a seriei sale Fourier, relativă la sistemul ortogonal considerat.

**2.** Să considerăm din nou spaţiul liniar $V$ şi subspaţiile sale, $S_1 \subset S_2$, despre care presupunem că sînt interpolatoare faţă de mulţimea $\mathcal{U}_1$ respectiv $\mathcal{U}_2$ de operaţii liniare.

D e f i n i ţ i a 3. *Un element $v$ al spaţiului $V$ îl numim convex faţă de subspaţiul $S_1$, dacă pentru orice $U \in \mathcal{U}_2$ avem $U_2(v) \,\bar{\in}\, S_1$.*

Dacă mulţimea $\mathcal{U}_1$ conţine cel puţin două elemente distincte, atunci putem da şi următoarea definiţie a convexităţii:

D e f i n i ţ i a 3*. *Un element $v$ al spaţiului $V$ îl numim convex faţă de subspaţiul $S_1$ dacă pentru orice pereche de elemente $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_1$, avem $U_1(v) \neq U_2(v)$.*

TEOREMA 1. *Dacă :*

1°. *$V$ este spaţiul funcţiilor continue pe un interval finit şi închis $[a, b]$,*

2°. *$S_2$ este subspaţiul generat de un sistem Cebîşev format din funcţiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, $n \geqslant 2$, iar $S_1$ este subspaţiul generat de funcţiile $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1}(x)$, despre care se presupune că formează de asemenea un sistem al lui Cebîşev,*

3°. *mulţimea $\mathcal{U}_1$ are ca elemente toate operaţiile*[6])

$$U(f) = \Phi(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}; f|x),$$

$x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *fiind puncte distincte din* $[a, b]$,

[4]) Evident că în acest exemplu, spaţiul $C$ se poate înlocui cu un spaţiu mai general, care să conţină polinoamele.

[5]) Mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale funcţiilor care formează sistemul.

[6]) $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; f|x)$ este funcţia de forma $\sum_{i=1}^{n-1} C_i \varphi_i(x)$, care pe punctele $x_i$ ia respectiv valorile $f(x_i)$, $C_i$ fiind numere reale.

4°. *mulțimea* $\mathcal{U}_2$ *are ca elemente toate operațiile*[7] $U(f)=\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x)$, $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *fiind puncte distincte din* $[a, b]$,
*atunci definiția* 3 *este echivalentă cu definiția* 3*.

Pentru demonstrația teoremei 1 este suficient să observăm că în polinomul de interpolare generalizat $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x)$ coeficientul lui $\varphi_n(x)$ este diferența divizată generalizată [5]

$$\begin{bmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{bmatrix}; f \Bigg] = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_1) & f(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_n) & f(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_n) & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_2) & \varphi_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_n) & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}}. \tag{6}$$

Conform definiției 3, o funcție din $V$ este convexă față de $S_1$ dacă $\left[\begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{matrix}; f\right] \neq 0$ pe orice sistem de puncte $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Condiția $U_1(v) \neq U_2(v)$ din definiția 3* exprimă aceeași proprietate, pentru că exclude existența unui sistem de $n$ puncte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pe care diferența divizată (6) să se anuleze.

*Observație.* Noțiunea de convexitate introdusă prin definițiile 3 și 3* nu coincide cu noțiunea de convexitate bine cunoscută [5, 3], față de un sistem de funcții interpolatoare. În clasa elementelor convexe intră de data aceasta și elementele convexe și cele concave în sensul definițiilor din [4] și [5].

În cazul schemei de interpolare a lui Gonciarov este aplicabilă definiția 3.

În ipotezele făcute la începutul acestui alineat, este clar că există elemente convexe în sensul definiției 3. Toate elementele lui $S_2$ care nu aparțin lui $S_1$ sînt convexe în sensul definiției 3.

Este important de studiat, în teoria procedeelor de interpolare, acele scheme de interpolare — date prin definiția 2 — pentru care definițiile 3 și 3* sînt echivalente.

TEOREMA 2. *Dacă pentru* $V_1$, $S$, $S_2$, $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ *dați, definițiile* 3 *și* 3* *sînt echivalente, atunci are loc proprietatea: dacă* $v \in V$ *și pentru* $U_1$, $U_2 \in \mathcal{U}_1$ *avem* $U_1(v) = U_2(v)$, *atunci există un element* $U_3 \in \mathcal{U}_2$ *astfel ca* $U_3(v) \in S_1$.

---

[7] $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n; f|x)$ este funcția de forma $\sum_{i=1}^{n} C_i\varphi_i(x)$, care pe punctele $x_i$ ia respectiv valorile $f(x_i)$.



Demonstrația teoremei 2 este imediată. În ea este cuprinsă ca un caz particular, o proprietate a diferențelor divizate care stă la baza mai multor teoreme de medie legate de interpolarea prin funcții aparținînd unei mulțimi interpolatoare [3, 4, 6].

TEOREMA 3. *Fie* $A[v]$ *o funcțională liniară definită pe spațiul* $V$ *în care sînt date* $S_1$, $S_2$, $\mathcal{U}_1$ *și* $\mathcal{U}_2$. *Dacă*:

1°. $A[v] = 0$ *oricare ar fi* $v \in S_1$,

2°. $A[v] \neq 0$ *dacă* $v$ *este convex față de* $S_1$ *în sensul definiției* 3, *atunci pentru orice* $v \in V$ *există un element* $U \in \mathcal{U}_2$ *astfel ca* $A[v] = A[U(v)]$.

Pentru demonstrație, să presupunem mai întîi $A[v] = 0$. Atunci elementul $v$ nu poate fi convex față de $S_1$. Deci există $U \in \mathcal{U}_2$ astfel ca $U(v) \in S_1$, și prin urmare $A[U(v)] = 0$. Dacă $A[v] \neq 0$, considerăm elementul $z = v - \frac{A[v]}{A[g]} g$, unde $g \in S_2$ și $g \bar{\in} S_1$. Rezultă că $A[g] \neq 0$ și $A[z] = 0$. Există prin urmare un $U \in \mathcal{U}_2$ astfel ca $A[U(z)] = 0$. Dar din cauza liniarității, $U(z) = U(v) - \frac{A[v]}{A[g]} U[g]$. Operația $U$ conservă elementul $g \in S_2$. Rezultă $A[U(v)] = A[v]$.

În teorema 3 sînt cuprinse ca și cazuri particulare, un mare număr de teoreme de medie bine cunoscute [4, 6]. Aceste teoreme intervin în studiul restului la procedeele liniare de aproximare.

**3.** În studiul procedeelor generalizate de interpolare este interesant de examinat cazul cînd $V$ este un spațiu Banach. În acest caz se pot studia proprietățile de continuitate ale operațiilor ce intervin în definiția unei scheme generale de interpolare.

TEOREMA 4. *Dacă* $V$ *este un spațiu Banach iar* $S$ *este un subspațiu interpolator față de operația* $U$, *atunci dacă orice submulțime mărginită a lui* $S$ *este compactă,* $U$ *este o operație continuă*[8].

Demonstrația rezultă din consecința pe care o are ipoteza făcută și anume că $S$ este un subspațiu cu un număr finit de dimensiuni.

**4.** Fie $V$ un spațiu liniar și $S$ un subspațiu al său. Are loc

TEOREMA 5. *Dacă* $S$ *este un subspațiu n-dimensional, generat de elementele* $v_1$, $v_2$, $\ldots$, $v_n$ *și există* $n$ *funcționale liniare* $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$, *astfel ca*

$$\begin{vmatrix} A_1[v_1] & A_2[v_1] & \ldots\ldots & A_n[v_1] \\ A_1[v_2] & A_2[v_2] & \ldots\ldots & A_n[v_2] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1[v_n] & A_2[v_n] & \ldots\ldots & A_n[v_n] \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7}$$

*atunci există o operație liniară* $U$ *definită pe* $V$, *față de care* $S$ *este inter- interpolator.*

---

[8] $\lim\limits_{n \to \infty} \|U(v_n) - U(v)\| = 0$ dacă $\lim\limits_{n \to \infty} \|v - v\| = 0$.

Pentru demonstrație este suficient să construim pentru elementul $v$ oarecare din $V$, procedeul de interpolare

$$U(v) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k,$$

unde coeficienții numerici $\alpha_k$ se determină prin condițiile

$$A_i\Big[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\Big] = A_i[v], \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

și sînt unic determinați din cauza condiției din (7). Operația $U(v)$ se poate pune sub forma

$$U(v) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & v_1 & v_2 & \ldots\ldots & v_n \\ A_1[v] & A_1[v_1] & A_1[v_2] & \ldots\ldots & A_1[v_n] \\ A_2[v] & A_2[v_1] & A_2[v_2] & \ldots\ldots & A_2[v_n] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n[v] & A_n[v_1] & A_n[v_2] & \ldots\ldots & A_n[v_n] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1[v_1] & A_1[v_2] & \ldots\ldots & A_1[v_n] \\ A_2[v_1] & A_1[v_2] & \ldots\ldots & A_2[v_n] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n[v_1] & A_n[v_2] & \ldots\ldots & A_n[v_n] \end{vmatrix}}.$$

**5.** Definițiile și teoremele date în această lucrare alcătuiesc doar noțiunile introductive din studiul procedeelor generale de interpolare care se pot defini într-un spațiu liniar. Teorema 3 are numeroase aplicații în studiul aproximației liniare. În ceea ce privește cele două definiții date pentru convexitate, utilitatea lor rezultă mai ales prin particularizarea spațiului $V$ și a subspațiilor interpolatoare $S_1$ є $S_2$ alese.

Noțiunea de procedeu de interpolare este strîns legată de anumite probleme particulare de cea mai bună aproximație. În această lucrare nu ne ocupăm de aceste probleme. Dăm doar formularea uneia din problemele fundamentale de cea mai bună aproximație:

Fiind dați $V$ și subspațiul $S$ interpolator față de mulțimea $\mathcal{U}$ de operații liniare, în ipoteza că $V$ este normat, să se studieze problema existenței și a unicității operației $U^* \in \mathcal{U}$ pentru care

$$\| v - U^*(v) \| = \inf_{U \in \mathcal{U}} \| v - U(v) \|$$

$v$ fiind fixat în $V$ și neaparținînd lui $S$.

Dacă, spre exemplu, $V$ este spațiul funcțiilor de patrat integrabile și $S$ este subspațiul polinoamelor trigonometrice de ordin dat $n$, se știe că problema formulată mai sus are soluție și ea este unică. În acest caz $\mathcal{U}$ este mulțimea tuturor operațiilor liniare care satisfac condiția cerută în definiția 2.

Desigur că un studiu amănunțit al problemei de cea mai bună aproximație formulată, se bazează pe studiul prealabil al normei definite în $V$ și pe studiul proprietăților de continuitate ale elementelor lui $\mathcal{U}$.



## ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

*(Краткое содержание)*

В работе дается определение общей схемы интерполирования в линейном нормированном пространстве. Работа содержит тоже два определения выпуклости относительно обобщенного приёма интерполирования. Определенный приём интерполирования содержит как частные случаи, схему интерполирования Гончарова и другие схемы интерполирования. Дается теорема о среднем (теорема 3), имеющая применение к изучению структуры остаточного члена в линейных приёмах приближения. Работа оканчается формулированием одной задачи наилучшего приближения.

## L'INTERPOLATION DANS DES ESPACES ABSTRAITS

*(Résumé)*

On donne la définition d'un schéma général d'interpolation dans un espace linéaire normé. Le travail contient aussi deux définitions de la convexité par rapport à un procédé d'interpolation généralisé. Le procédé d'interpolation défini comprend comme cas particulier le schéma d'interpolation de Gontcharov ainsi que d'autres schémas d'interpolation. On donne un théorème de moyenne (théorème 3) qui a des applications dans l'étude de la structure du reste dans les procédés linéaires d'approximation. Enfin on formule un problème de la meilleure approximation.

## BIBLIOGRAFIE

1. В. Л. Гончаров, *Теория интерполирования и приближения функций.* Г.И.Т.Т.Л., Москва, 1954.
2. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа.* Г.И.Т.Т.Л., Москва, 1951.
3. E. Moldovan, *Asupra unei generalizări a noțiunii de convexitate.* Studii și Cerc. Științ. (Cluj), VI, nr. 3—4, Seria I-a, 65—73 (1955).
4. — *Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime de funcții interpolatoare.* Studii și Cerc. de Mat. (Cluj), IX, 161—224 (1958).
5. T. Popoviciu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre superieur* (I). Mathematica, **12**, 81—92 (1936).
6. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre superieur* (IX). Bull. Math. Soc. Roumaine des Sci., **43**, 85—141 (1941).