DESPRE REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

DE

BELA JANKÓ

(Cluj)

Lucrare prezentată în ședința de comunicări din 25 mai 1959 a Institutului de calcul al Academiei R.P.R.—Filiala Cluj

La rezolvarea sistemelor de ecuații liniare se folosesc adesea metode de iterație, la care soluția sistemului se obține ca limita unui șir de vectori. Studiul convergenței la aceste metode — cum sînt metoda lui Pollaczek-Geiringer sau metoda lui Seidel — s-a făcut în anumite spații liniare n-dimensionale, normate. Este însă interesant să se studieze convergența în spații semiordonate. Aici soluția căutată se aproximează prin două șiruri de soluții aproximative : șirul aproximațiilor superioare (monoton descrescător) și șirul aproximațiilor inferioare (monoton crescător).

Metoda lui S. A. Ciaplîghin [1] — aplicată la rezolvarea aproximativă a ecuațiilor diferențiale — a fost generalizat de A. N. Baluev [2], apoi de S. N. Slughin [3] pentru cazul ecuațiilor funcționale neliniare, considerate în spații semiordonate [4].

Considerăm spațiile semiordonate X, Y și operația P definită pe X cu valori în Y. În aceste spații s-a definit un tip de convergență, anume o-convergența [4]. Mulțimea elementelor $x \in X$ care satisfac inegalitățile $\underline{x}_0 \leqslant x \leqslant \overline{x}_0$, unde $\underline{x}_0, \overline{x}_0 \in X$, se numește segment și se notează $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$.

Ideile lui S. A. Ciaplîghin au fost extinse de către S. N. Slughin [3], între altele, prin următoarea teoremă :

Fie operația P definită pe segmentul $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ și operatorul aditiv Γ, avînd $\Gamma^{-1} \geqslant 0$ și satisfăcînd inegalitatea

$$P(x + \Delta x) - P(x) \leqslant \Gamma(\Delta x), \tag{1}$$

pentru orice $\Delta x > 0$. Se mai presupune că $\Gamma^{-1}P$ este monoton-continuă și că are loc relația

$$P(\underline{x}_0) \leqslant 0 \leqslant P(\overline{x}_0),$$

Se consideră soluțiile aproximative inferioare $\underline{x}_n$ *repspectiv superioare* $\overline{x}_n$, *construite prin următoarea metodă de iterație:*

$$\underline{x}_n = \underline{x}_{n-1} - \Gamma^{-1}P(\underline{x}_{n-1}), \quad \overline{x}_n = \overline{x}_{n-1} - \Gamma^{-1}P(\overline{x}_{n-1}). \tag{2}$$

În condițiile de mai sus *ecuația* $P(x) = 0$, *admite cel puțin o soluție pe segmentul* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$. *Dintre soluțiile existente* $\overline{x}^*$ *fiind cea mai mare iar* $\underline{x}^*$ *cea mai mică, au loc relațiile*

$$\overline{x}^* = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n, \quad \underline{x}^* = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n,$$

iar aproximațiile $\underline{x}_n, \overline{x}_n$ *satisfac inegalitățile*

$$\underline{x}_{n-1} \leqslant \underline{x}_n \leqslant \underline{x}^* \leqslant \overline{x}^* \leqslant \overline{x}_n \leqslant \overline{x}_{n-1}, \quad P(\underline{x}_n) \leqslant 0 \leqslant P(\overline{x}_n).$$

În lucrarea de față ne folosim de metoda (2) pentru rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuații liniare algebrice. Alegînd operatorul Γ în mod convenabil, regăsim metoda lui Pollaczek-Geiringer și metoda lui Seidel. Scopul lucrării este de a studia condițiile de convergență ale acestor metode, în spațiu semiordonat. Lucrînd în acest spațiu, avem avantajul că, dacă pe segmentul $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ există o soluție unică, atunci evaluarea erorii se face în mod foarte simplu, considerînd diferența $\overline{x}_n - \underline{x}_n$.

Fie X un spațiu liniar cu n-dimensiuni, format de elementele

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

componentele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind numere reale oarecari. Considerăm elementele $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$. Se zice că $x^{(1)} < x^{(2)}$, dacă avem îndeplinite următoarele inegalități, pe componente

$$x_i^{(1)} \leqslant x_i^{(2)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

și cel puțin pentru un $i = j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$,

$$x_j^{(1)} < x_j^{(2)}.$$

În aceste condiții spațiul liniar X formează un spațiu semiordonat [4]. Considerăm acum sistemul de ecuații liniare

$$Ax = b$$

unde $x, b \in X$, iar $A = (a_{ij})$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ are elementele $a_{ii} > 0$ și $a_{ij} \leqslant 0$ pentru $i \neq j$. (Asemenea matrici intervin de exemplu la rezolvarea aproximativă a ecuațiilor cu derivate parțiale, folosind metoda diferențelor finite).

TEOREMĂ. *Fie* A *o matrice cu elementele* $a_{ii} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *și* $a_{ij} \leqslant 0$ *pentru* $i \neq j$, *astfel ca* $\det A \neq 0$. *Dacă în afară de acestea mai sînt îndeplinite condițiile:*

1°. *există două aproximații inițiale* $\underline{x}_0$ *și* $\overline{x}_0$ *astfel ca*

$$A\underline{x}_0 \leqslant b \leqslant A\overline{x}_0,$$

2°. Γ *este o matrice diagonală de forma*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

3°. *aproximațiile* $\underline{x}^{(k)}$, $\overline{x}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *se construiesc pe baza formulei de iterație* (2) *și a formulei* (3), *anume*

$$\begin{aligned} \underline{x}_i^{(k)} &= \underline{x}_i^{(k-1)} - \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\underline{x}_j^{(k-1)} - b_i\right), \\ \overline{x}_i^{(k)} &= \overline{x}_i^{(k-1)} - \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\overline{x}_j^{(k-1)} - b_i\right), \ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{4}$$

atunci sistemul de ecuații liniare $Ax = b$ *are soluția* x^* *pe segmentul* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$, *pentru care avem*

$$x^* = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \overline{x}^{(k)} = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \underline{x}^{(k)},$$

unde

$$\underline{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \underline{x}_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \overline{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1^{(k)} \\ \vdots \\ \overline{x}_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

iar aproximațiile satisfac inegalitățile

$$\underline{x}^{(k-1)} \leqslant \underline{x}^{(k)} \leqslant x^* \leqslant \overline{x}^{(k)} \leqslant \overline{x}^{(k-1)}, \quad A\underline{x}^{(k)} \leqslant b \leqslant A\overline{x}^{(k)}.$$

Teorema rezultă ușor din teorema lui S. N. Sluglin enunțată mai sus și din faptul că $\det A \neq 0$ [5].

Observații. I. Dacă $S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, atunci aproximațiile inițiale pot fi construite astfel

$$\overline{x}_0 = \begin{pmatrix} \xi \\ \vdots \\ \xi \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \underline{x}_0 = \begin{pmatrix} \eta \\ \vdots \\ \eta \end{pmatrix},$$

unde $\xi = \max_i \frac{b_i}{S_i}$ și $\eta = \min_i \frac{b_i}{S_i}$. Din condiția $S_i > 0$ rezultă că $\det A > 0$, [5].

II. Metoda (4) obţinută din metoda (2), unde Γ a fost înlocuit cu matricea diagonală (3), este tocmai metoda lui Pollaczek-Geiringer.

III. Dacă în formula (2) operatorul Γ se alege în felul următor :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

atunci se verifică uşor că regăsim metoda clasică a lui Seidel. Ţinînd seama de faptul că matricea (5) admite inversă pozitivă, urmează că putem enunţa o teoremă analoagă teoremei de mai sus, unde Γ are forma (5).

IV. Rezultatele de mai sus sînt valabile şi pentru cazul sistemelor de ecuaţii infinite, în condiţiile teoremei de mai sus, unde însă în loc de $\det A \neq 0$ se presupune $S_i > 0$, $(i = 1, 2, \dots)$.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе итерационный метод (2) используется в цели приближенного решения систем алгебраических линейных уравнений.

Если оператор Γ из (2) имеет вид (3), соответственно (5), то получается метод Полачека-Гейрингера, соответственно метод Сейделя.

В работе установлены условия сходимости этих методов в полуупорядоченном пространстве.

SUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Dans ce travail l'auteur applique la méthode de l'itération (2) pour la résolution approximative des systèmes d'équations linéaires algébriques. Si l'opérateur Γ de (2) a la forme (3), respectivement (5), alors on obtient la méthode de Pollaczek-Geiringer, respectivement la méthode de Seidel.

On établit les conditions de convergence de ces méthodes dans un espace demi-ordonné.

BIBLIOGRAFIE

1. С. А. Чаплыгин, *Избранные труды по механике и математике*. Москва, 1954 (p. 490—503 şi 526—538).
2. А. Н. Балуев, *К абстрактной теории метода С. А. Чаплыгина*. Доклады Акад. Наук **83**, p. 781—783 (1952).
3. С. Н. Слугин, *Приближенное решение операторных уравнений на основе метода С. А. Чаплыгина*. Доклады Акад. Наук. **103**, nr. 4 p. 565—568 (1955).
4. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Т. Пинскер, *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах*. Москва — Ленинград, 1950.
5. O. Taussky, *A recurring theorem on determinants*. The American Math. Monthly, 56, nr. 10, p. 672—676 (1949).

Primit la 17. IX. 1959.