DESPRE O PROBLEMĂ IVITĂ LA PROIECTAREA CAZANELOR CU ABURI*)

DE

CAROL KALIK
(Cluj)

Lucrare prezentată în ședința de comunicări din 23 februarie 1958 a Institutului de calcul al Academiei R. P. R — Filiala Cluj.

1. În lucrarea [5] inginerul L. N é m e t i tratează o problemă în legătură cu proiectarea cazanelor cu aburi cu trecere forțată. În această lucrare se dă o metodă pentru calcularea tensiunilor termice în pereții țevilor fierbătoare ale cazanelor. Pentru calcularea acestor tensiuni este însă necesară cunoașterea temperaturii, care la rîndul ei ne conduce la rezolvarea unei probleme la limită. Scopul lucrării de față este rezolvarea acestei probleme la limită.

La început introducem notațiile necesare și formulăm problema la limită. Fie r, φ, z coordonatele cilindrice în spațiul cu trei dimensiuni. Țeava fierbătoare este determinată de inegalitățile :

$$r_0 \leqslant r \leqslant r_0 + s\,; \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,; \qquad -L \leqslant z \leqslant L,$$

unde r_0 este raza interioară, s — grosimea, iar $2L$ — lungimea țevii. Cîmpul termic se poate considera același în orice secțiune a țevii cu planul $\varphi =$ constantă. Fenomenul devenind static de la un anumit moment, funcția $u(r, \varphi, z)$, care ne dă valorile temperaturii, trebuie să satisfacă ecuația cu derivate parțiale

$$A(u) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

în fiecare punct al peretelui țevii.

Condițiile la limită sînt determinate de următoarele date : În exteriorul țevii se menține un regim constant în așa fel ca fluxul de căldură să fie egal cu o constantă, Q. La capetele $z = \pm L$ ale țevii presupunem că nu

*) Această lucrare a apărut și în limba franceză în revista „Mathematica", vol. 1 (24), fascicola 1, 1959.

trece căldura, deci fluxul este egal cu zero. Țeava conține apă pînă la nivelul $z = 0$, iar deasupra acestui nivel, aburi. Considerăm de asemenea că la suprafața interioară a țevii fluxul de căldură este proporțional cu temperatura. Conform acestor date avem condițiile la limită $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{Q}{k}$ pe peretele exterior, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ la cele două capete și $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{h}{k} u$ pe peretele interior al țevii. Aici ν este normala exterioară la suprafața țevii, k este coeficientul de conductibilitate termică, iar h coeficientul de transfer termic. Menționăm că h este egal cu o constantă h_1 pentru apă și cu h_2 pentru aburi. Condițiile la limită le vom scrie într-o singură formulă

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \gamma u = f, \tag{1.2}$$

unde $\gamma \geqslant 0$, măsura punctelor pentru care γ este strict pozitivă, fiind mai mare ca zero. Din cauza simetriei față de φ, problema la limită (1.1)—(1.2) este de fapt o problemă plană. Mai jos vom nota cu Ω domeniul plan dat de inegalitățile

$$r_0 < r < r_0 + s; \qquad -L < z < L$$

și cu Γ frontiera domeniului Ω.

Menționăm de asemenea că problema la limită (1.1)—(1.2) a fost studiată în mai multe lucrări [1—3]. În aceste lucrări s-a căutat soluția pe două căi, pe de o parte aplicînd metoda lui Fourier și pe de altă parte folosindu-se teoria funcțiilor complexe. Rezultatele obținute nu erau însă satisfăcătoare pentru problema tehnică din care derivă problema la limită (1.1)—(1.2). Cu ajutorul primei metode s-a ajuns la un sistem infinit de ecuații liniare, care a rămas de studiat, iar a doua metodă dă soluția numai în cazul cînd grosimea țevii este foarte mică, ceea ce nu corespunde cerințelor tehnice.

2. Trecem la studierea problemei la limită (1.1)—(1.2). Ne vom folosi de așa-numita metodă variațională.

Introducem spațiul lui Hilbert $W_2^{(1)}(\Omega)$ definit în felul următor : o funcție arbitrară $v(r, z)$ aparține spațiului $W_2^{(1)}(\Omega)$ dacă are toate derivatele generalizate (vezi [6]) de ordinul întîi, la patrat integrabile. Norma în acest spațiu o definim cu ajutorul egalității

$$\| v \|^2_{W_2^{(1)}} = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 r \, d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma v^2 r \, d\sigma, \right. \tag{2.1}$$

unde $d\Omega$ și $d\sigma$ sînt elementele de suprafață, respectiv de arc. Spațiul $W_2^{(1)}(\Omega)$ cu norma (2.1) este complet și separabil [6].

Vom studia funcționala

$$F(v) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] r d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma v^2 r \, d\sigma - 2 \int_{\Gamma} f v r \, d\sigma \tag{2.2}$$

definită pe elementele spațiului $W_2^{(1)}(\Omega)$. Existența integralelor curbilinii este garantată de teoremele de scufundare ale lui S. L. S o b o l e v [6].

LEMA 2.1. *Funcționala* (2.2) *este mărginită inferior pe mulțimea* $W_2^{(1)}(\Omega)$.

Într-adevăr, în baza inegalității lui Cauchy-Buniakovski și în baza teoremelor de scufundare ale lui S. L. S o b o l e v putem scrie

$$\int_{\Gamma} f v r \, d\sigma \leqslant \| f \|_{L_2(\Gamma)} \| v \|_{L_2(\Gamma)} = K \| v \|_{L_2(\Gamma)} \leqslant K_1 \| v \|_{W_2^{(1)}(\Omega)}$$

pentru orice $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Constanta $K > 0$ nu depinde de funcția $v(r, z)$, iar normele în spațiul $L_2(\Gamma)$ sînt calculate cu ajutorul ponderei r. Folosind inegalitatea precedentă obținem

$$F(v) = \| v \|^2_{W_2^{(1)}} - 2 \int_{\Gamma} f v r \, d\sigma \geqslant \| v \|^2_{W_2^{(1)}} - 2K_1 \| v \|_{W_2^{(1)}} =$$

$$= (\| v \|_{W_2^{(1)}} - K_1)^2 - K_1^2 \geqslant - K_1^2,$$

ceea ce demonstrează lema 2.1.

Notăm $\inf_{v \in W_2^{(1)}(\Omega)} F(v) = -d$. Conducîndu-ne după ideile folosite de S. L. S o b o l e v pentru rezolvarea problemei lui Neumann [6], demonstrăm următoarea lemă :

LEMA 2.2. *În spațiul lui Hilbert* $W_2^{(1)}(\Omega)$ *există funcția* $u(r, v)$ *pentru care*

$$\inf_{v \in W_2^{(1)}(\Omega)} F(v) = F(u) = - d$$

și totodată pentru această funcție $u(r, z)$ *avem îndeplinită egalitatea*

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] r d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma u r \, d\sigma - \int_{\Gamma} f v r \, d\sigma = 0, \tag{2.3}$$

oricare ar fi $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

Demonstrație. Fie $\{u_m\}$ un șir de funcții din $W_2^{(1)}(\Omega)$ pentru care

$$\lim_{n \to \infty} F(u_m) = -d. \tag{2.4}$$

Se verifică imediat egalitățile

$$\frac{1}{2} F(u_m) + \frac{1}{2} F(u_n) - F\left(\frac{u_n + u_m}{2} \right) = \frac{1}{2} \| u_m \|^2_{W_2^{(1)}} + \frac{1}{2} \| u_n \|^2_{W_2^{(1)}} -$$

$$- \left\| \frac{u_n - u_m}{2} \right\|^2_{W_2^{(1)}}.$$

Deci, din (2.4) urmează $\| u_n - u_m \|_{W_2^{(1)}} \to 0$. Însă spațiul $W_2^{(1)}(\Omega)$ fiind complet, rezultă că șirul $\{u_m\}$ tinde către o funcție din $W_2^{(1)}(\Omega)$, pe care

o notăm cu $u(r, z)$. Din cele de mai sus rezultă în mod evident că $\inf_{v \in W_2^{(1)}(\Omega)} F(v) = F(u)$. Demonstrăm egalitatea (2.3). Avem

$$F(u + \lambda v) = F(u) + 2\lambda \left\{ \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] r d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma u v r d\sigma - \right.$$

$$\left. - \int_{\Gamma} f v r d\sigma \right\} + \lambda^2 \| v \|^2_{W_2^{(1)}}$$

pentru orice valoare reală a parametrului λ şi pentru orice funcţie v din $W_2^{(1)}(\Omega)$. Ţinînd seama de faptul că această expresie trebuie să-şi atingă minimul pentru $\lambda = 0$, obţinem chiar relaţia (2.3).

TEOREMA 2.1. *Funcţia $u(r, z)$ care realizează minimul funcţionalei* (2.2) *aproape în fiecare punct interior al domeniului Ω, admite derivate parţiale de orice ordin şi totodată satisface ecuaţia* (1.1) *aproape peste tot în Ω.*

Demonstraţie. Fie Ω' un domeniu arbitrar interior domeniului Ω, δ distanţa între Ω' şi Γ, şi Q un punct oarecare din Ω'.

Alegem o funcţie $\psi(\rho)$ care satisface următoarele condiţii

$$\psi(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \rho \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dacă } \rho \geqslant 1 \end{cases}$$

şi este ori de cîte ori derivabilă. Aici ρ înseamnă distanţa între punctele P şi Q, P fiind un punct arbitrar din planul (r, z). Vom nota cu $L(P, Q)$ soluţia fundamentală în sensul lui E. E. L e v i [4], a ecuaţiei (1.1).

Introducem funcţia $\xi(P)$, determinată în felul următor

$$\xi(P) = \left[\psi\left(\frac{\varrho}{h_1}\right) - \psi\left(\frac{\varrho}{h_2}\right) \right] L(P, Q) \tag{2.5}$$

unde h_1 şi h_2 sînt două constante, care satisfac condiţia $0 < h_1 < h_2 < \delta$. Vom arăta că mulţimea de funcţii $\{\omega_h(\rho)\}$, unde

$$\omega_h(\rho) = h^2 A \left[\psi\left(\frac{\varrho}{h}\right) L(P, Q) \right], \tag{2.6}$$

h variind între δ şi 0, formează o mulţime regulară de sîmburi în sensul lui S. L. S o b o l e v [7]. În acest scop trebuie să arătăm că $\{\omega_h(\rho)\}$ satisface condiţiile

1°. $\omega_h(\rho)$ este uniform mărginit relativ la h şi $Q \in \Omega'$.

2°. Fiecare funcţie $\omega_h(\rho)$ este sumabilă în sensul lui Lebesgue, relativ la fiecare coordonată a punctelor P şi Q.

3°. Există un număr pozitiv γ şi ε în aşa fel ca pentru fiecare punct $Q \in \Omega'$ să avem

$$\iint_{\varrho < h} \omega_h(\rho) d\Omega_P > \gamma h^2,$$

dacă $h < \varepsilon$.

4°. În exteriorul cercului cu centrul Q şi raza h funcţia $\omega(\rho)$ se consideră identic nulă.

Verificăm condiţia 1°. Pentru $\rho \leqslant \frac{h}{2}$ avem $\omega_h(\rho) = 0$, în baza definiţiei funcţiei $\psi(\rho)$ şi în baza proprietăţii soluţiei fundamentale $L(P, Q)$. Deci verificăm condiţia 1° numai pentru $\rho > \frac{h}{2}$. Este uşor de văzut că pentru $\rho > \frac{h}{2}$ derivatele parţiale de ordinul întîi ale funcţiei $\omega_h(\rho)$ sînt mărginite superior în valoarea absolută de $\frac{C_1}{h}$, iar valoarea absolută a derivatelor de ordinul doi, de $\frac{C_2}{h}$, unde C_1 şi C_2 sînt nişte constante pozitive. Funcţia $L(P, Q)$ se poate scrie sub forma $L(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varrho} + W(P, Q)$, unde $W(P, Q)$ precum şi derivatele ei prezintă în punctul Q singularităţi de ordin mai mic respectiv decît singularităţile funcţiei $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varrho}$, şi ale derivatelor ei, atunci cînd $\rho \to 0$. De aici obţinem că derivatele parţiale de ordinul întîi, respectiv de ordinul doi, în valoare absolută sînt mărginite superior de $\frac{C_3}{h}$, respectiv $\frac{C_4}{h}$, cînd $\rho \geqslant \frac{h}{2}$. Aici C_3 şi C_4 sînt de asemenea nişte constante pozitive.

Avînd în vedere forma ecuaţiei (1.1), din cele expuse mai sus rezultă

$$|\omega_h(\rho)| \leqslant C$$

independent de h şi Q. Aici C este constantă pozitivă.

Condiţiile 2° şi 4° se verifică imediat, întrucît funcţia $L(P, Q)$ este ori de cîte ori derivabilă în raport cu coordonatele punctelor P şi Q şi întrucît are loc egalitatea $\psi\left(\frac{\varrho}{h}\right) = 0$ cînd $\rho \geqslant h$.

Calculăm integrala din condiţia 3°.

$$\iint_{\varrho \leqslant h} \omega_h(\rho) d\Omega_P = h^2 \iint_{\varrho < h} A \left[\psi\left(\frac{\varrho}{h}\right) L(P, Q) \right] d\Omega_P$$

Dar

$$\iint_{\varrho < h} A \left[\psi\left(\frac{\varrho}{h}\right) L(P,Q) \right] d\Omega_P = \iint_{\frac{h}{2} < \varrho < h} A \left[\psi\left(\frac{\varrho}{h}\right) L(P,Q)\, d\Omega_P = \right.$$

$$= \int_{C_{\frac{h}{2}}} \left[\frac{\partial L}{\partial \nu} + \frac{L}{r} \cos(\nu, r) \right] dr_P = - \int_{C_{\frac{h}{2}}} \left(\frac{\partial L}{\partial \varrho} + \frac{L}{r} \right) d\sigma_P \to 1,$$

cînd raza cercului $C_{\frac{h}{2}}$ cu centrul în Q tinde către zero uniform pentru orice

$Q \in \Omega'$. Fie γ un număr arbitrar din intervalul $(0, 1)$. Din cele de mai sus urmează că se poate determina un număr $\varepsilon > 0$ în aşa fel ca să avem

$$\iint_{\rho<h} \omega_h(\rho) d\Omega_P > \gamma h^2,$$

dacă $h < \varepsilon$

Întrucît mulţimea $\{\omega_h(\rho)\}$ formează o mulţime regulară de funcţii, rezultă că

$$u_h(Q) = \frac{\iint_{\rho<h} \omega_h(\rho)\, u(P)\, d\Omega_P}{\iint_{\rho<h} \omega_h(\rho)\, d\Omega_P} \tag{2.7}$$

tinde aproape în fiecare punct $Q \in \Omega'$ către $u(Q)$, cînd $h \to 0$.

Acum putem trece la demonstrarea teoremei 2.1. Funcţia (2.5) aparţine spaţiului $W_2^{(1)}(\Omega)$, fapt care este evident. De asemenea se observă că aceeaşi funcţie $\xi(P)$ este nulă într-o fîşie din apropierea frontierei Γ. Deci din (2.3) urmează

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \tau}{\partial z}\right] r\, dr\, dz = 0, \tag{2.8}$$

unde prin r şi z am notat coordonatele punctelor P. Aplicînd primului membru al egalităţii (2.8) formula lui Green, obţinem

$$\iint_\Omega u\, A[\xi(P)]\, r\, d\Omega = 0, \tag{2.9}$$

de unde, avînd în vedere (2.6), obţinem

$$\frac{1}{h_1^2}\iint_\Omega \omega_{h_1}(\rho)\ u(P)\ r\, dr\, dz = \frac{1}{h_2^2}\iint_\Omega \omega_{h_2}(\rho)\ u(P)\, r\, dr\, dz. \tag{2.10}$$

Se vede imediat că cei doi membrii ai acestei egalităţi din urmă, converg pentru fiecare punct $Q \in \Omega'$, dacă pentru acest punct converge şirul funcţiilor (2.7). Dar din egalitatea (2.10) putem scrie

$$u(Q) = \frac{1}{h^2}\iint_\Omega \omega_h(\rho)\ u(P)\, r\, dr\, dz,$$

ceea ce ne arată că funcţia $u(Q)$ este ori de cîte ori derivabilă, deoarece membrul al doilea al egalităţii din urmă este indefinit derivabil.

Demonstrăm că funcţia $u(Q)$ satisface aproape peste tot în Ω ecuaţia (1.1). Fie în acest scop $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ o funcţie arbitrară egală cu zero într-o fîşie din apropierea frontierei Γ. Din (2.3) rezultă

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] r\, dr\, dz = 0.$$

Aplicînd formula lui Green, avem

$$\iint_\Omega v\, A(u)\, r\, dr\, dz = 0,$$

de unde rezultă că egalitatea $A(u) = 0$ este satisfăcută aproape peste tot în Ω. Deci teorema 2.1 este demonstrată în întregime.

Urmează să vedem în ce sens este satisfăcută condiţia la limită (1.2) şi dacă soluţia problemei la limită (1.1)—(1.2) este unică.

Cum era de aşteptat, condiţia (1.2) este satisfăcută într-un anumit sens slab. Vom nota cu $\{\Omega_m\}$ un şir de domenii care tind către Ω cînd $m \to \infty$. Presupunem că şirul $\{\Omega_m\}$ este monoton adică $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1} \subset \Omega$. Fie Γ_m frontiera lui Ω_m, pe care o presupunem continuă pe segmente. Pentru $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ arbitrar, avem evident

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] r\, d\Omega = \lim_{m\to\infty}\iint_{\Omega_m}\left[\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] r\, d\Omega = \lim_{m\to\infty}\int_{\Gamma_m} v\frac{\partial u}{\partial v}\, r\, d\sigma.$$

Avînd în vedere (2.3), obţinem următoarea formulă care ne arată în ce sens este satisfăcută condiţia (1.2). Anume

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Gamma_m} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, r\, d\sigma = -\int_\Gamma \gamma\, u\, v r\, d\sigma + \int_\Gamma f v r\, d\sigma. \tag{2.11}$$

Despre unicitatea soluţiei problemei la limită ne putem convinge în felul următor. Să presupunem că avem două soluţii distincte u_1 şi u_2 ale problemei la limită şi presupunem că ele fac parte din spaţiul $W_2^{(1)}(\Omega)$. Funcţia $u = u_1 - u_2$ satisface condiţia

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Gamma_m}\frac{\partial u}{\partial \nu} v\, r\, d\sigma = -\int_\Gamma \gamma\, u\, v\, r\, d\sigma.$$

Înlocuind v prin u, avem

$$\lim_{m\to\infty}\iint_{\Omega_m}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] r\, d\Omega + \int_\Gamma \gamma\, u^2\, r\, d\sigma = 0.$$

Dar avînd în vedere condiţia pusă asupra lui γ în § 1, egalitatea precedentă ne dă $u = 0$ în Ω, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

3. Pentru calcularea aproximativă a soluţiei problemei la limită (1.1)—(1.2) ne putem folosi de metoda generalizată a lui Ritz. Aproximaţia de ordinul n a soluţiei $u(r, z)$, pe care o vom nota cu $u_n(r, z)$, o vom căuta sub forma

$$u_n(r, z) = \sum_{p,q=0}^{n} a_{pq} r^p z^q. \tag{3.1}$$

Coeficienţii a_{pq} îi determinăm punînd condiţia ca funcţia $F(u_n) = F(a_{pq})$ să aibă minimum pentru valorile lui a_{pq}. Aproximaţiile $u_n(r, z)$ le obţinem deci rezolvînd sistemul liniar de ecuaţii

$$\frac{\partial F}{\partial a_{pq}} = 0, \quad (p, q = 0, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Este evident că soluţiile aproximative u_n tind către soluţia exactă u a problemei la limită în metrica spaţiului $W_1^{(1)}(\Omega)$, iar în baza teoremelor de scufundare ale lui S. L. S o b o l e v putem afirma că funcţiile u_n tind către u şi în medie pătratică.

О ПРОБЛЕМЕ ВОЗНИКНУТОЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ПАРОВЫХ КОТЛОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

При изучении термических напряжений, появляющихся в котельных трубах паровых котлов с вынужденным пропуском необходимо знание термического поля. Это приводит к следующей граничной задаче: определить функцию $u(r, z)$ в прямоугольнике Ω данном неравенствами $r_0 < r < r_0 + s$, $-L < z < L$, таким образом, чтобы она выполняла следующие условия.

$$A(u) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

и следующие граничные условия.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{r = r_0 + s} = \frac{Q}{k}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{z = \pm 1} = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{r = r_0} = \frac{h_i}{k}\, u\Big|_{r = r_0} \quad (i = 1, 2),$$

где ν — внешняя нормаль к границе Γ области Ω, Q — тепловой поток, k — коэффициент теплопроводности, h_2 — коэффициент теплопередачи для пара, а h_1 для воды.

В настоящей работе показывается существование решения вышепоставленной проблемы и указан метод её приближения.

À PROPOS D'UN PROBLÈME SURVENU À LA PROJECTION DES CHAUDIÈRES À VAPEUR

RÉSUMÉ

A l'étude des tensions thermiques qui se produisent dans les tuyaux de bouillage des chaudières à vapeur avec passage forcé il est nécessaire de connaître le champ thermique qui, à son tour, nous conduira au problème de limite suivant. Que l'on détermine la fonction $u(r, z)$ dans le rectangle Ω donné par les inégalité $r_0 < r < r_0 + s$, $-L < z < L$, de manière qu'elle satisfasse les conditions suivantes :

$$A(u) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

et les conditions de limite suivantes :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{r = r_0 + s} = \frac{Q}{k}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{z = \pm 1} = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{r = r_0} = \frac{h_i}{k}\, u\Big|_{r = r_0} \quad (i = 1, 2),$$

où μ est la normale extérieure à la frontière Γ du domaine Ω, Q représente le flux de chaleur, k le coefficiente de conductibilit thermique, h_2 est le coefficient de transfert thermique pour la vapeur et h_1 pour l'eau.

Dans le présent travail l'auteur montre l'existence de la solution du probléme ci-dessus et indique une méthode pour son approximation.

BIBLIOGRAFIE

1. G. C ă l u g ă r e a n u, *Asupra unei probleme de propagarea căldurii*. Studii şi cercet. ştiinţ. (Cluj), **III**, nr. 3—4, p. 10—17 (1952).
2. G. C ă l u g ă r e a n u, F. R a d o, *Asupra unei probleme de propagare a căldurii*. Bul. ştiinţ., Acad. R. P. R., Sect. matem. şi fiz., **IV**, p. 17—30 (1954).
3. D. V. I o n e s c u, L. N é m e t i, *Integrarea unei ecuaţii cu derivate parţiale care intervine în problema calculului tensiunilor termice în tuburile fierbătoare ale cazanelor cu trecere forţată şi ale cazanelor cu radiaţie*. Studii şi cercet. ştiinţ. (Cluj), **IV**, nr. 1—2, p. 73—78 (1953).
4. E. E. L e v i, *Sulle equazioni lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali*. Rend. del Circolo matem. Palermo, **24**, p. 275—317 (1907).
5. L. N é m e t i, *Tensiuni în tuburi cu pereţi subţiri în cazul unui cîmp termic simetric faţă de axă*. Studii şi cercet. ştiinţ. (Cluj), **II**, nr. 1—2, p. 64—72 (1958).
6. С. Л. С о б о л е в, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Ленинград 1950.
7. С. Л. С о б о л е в, *Общая теория дифракции волн на римановых пространствах*, Труды мат. инст. им. Стеклова IX, стр. 39—105 (1935).

Primit la 17. IX. 1959.