SOLUŢII MĂRGINITE ŞI SOLUŢII PERIODICE PENTRU ANUMITE SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

DE

ION MUNTEANU

Comunicare prezentată la şedinţa din 24 septembrie 1956 a Filialei Cluj a Academiei R. P. R.

Rezultatele din această notă constituie o generalizare a unei teoreme a lui I. Barbălat [1]. In lucrarea citată se dau condiţii suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii diferenţiale neliniare

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -f(x, y)\,y - g(x) + e(t)$$

să aibă toate soluţiile prelungibile şi mărginite pentru t crescător. Dacă forţa perturbatoare $e(t)$ este mărginită şi periodică, de perioadă ω, atunci sistemul (0) admite cel puţin o soluţie periodică de perioadă ω.

I. Barbălat a obţinut acest rezultat în următoarele condiţii:

1. Funcţiile $f(x, y)$ şi $g(x)$ sînt continue pentru toate valorile argumentelor lor şi satisfac condiţii de unicitate a soluţiilor ecuaţiilor (0); în plus, funcţia $e(t)$ este continuă şi mărginită.

2. Există numărul $a>0$, astfel încît $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$ pentru $|x|>a$.

3. Pentru $|y|<a$, $f(x, y)\,|y|$ tinde la infinit împreună cu distanţa punctului (x, y) de la originea coordonatelor; există un număr $M>0$ astfel încît $f(x,y)>-M$ pentru $x>a$, $0\leqslant y\leqslant a$ şi $x<-a$, $-a\leqslant y\leqslant 0$.

În această notă în locul primei ecuaţii din sistemul (0) se consideră ecuaţia $\dot{x}=h(y)$, unde $h(y)$ este o funcţie a cărei comportare este dată în teorema care urmează, şi se demonstrează că pentru sistemul modificat se menţin concluziile teoremei lui I. Barbălat.

TEOREMĂ. — *Fie dat sistemul de ecuaţii diferenţiale*

$$\begin{cases} \dot{x} = h(y) \\ \dot{y} = -f(x, y)\,y - g(x) + e(t) \end{cases} \tag{1}$$

pentru care sînt îndeplinite următoarele condiţii:

1°. Funcţiile $f(x,y)$, $g(x)$, $h(y)$ şi $e(t)$ sînt continue pentru toate valorile argumentelor lor, iar $e(t)$ este mărginită;

2^0. Există un număr $a>0$ astfel încît $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$ pentru $|x| > a$;

3^0. Dacă $|y| > a$, atunci $f(x,y)\,|y| \to \infty$ pentru $(x^2+y^2)^{1/2} \to \infty$; există un număr $M>0$ astfel încît $f(x,y) > -M$ pentru $\{x > a$ și $0 \leqslant y \leqslant a\}$ și $\{x < -a$ și $-a \leqslant y \leqslant 0\}$;

4^0. sign $h(y) =$ sign y și

$$\int_0^\infty h(y)\,dy = \infty.$$

Atunci există o constantă k depinzînd de funcțiile f, g, h și e astfel încît pentru fiecare soluție x(t), y(t) a sistemului (1) *să existe un număr* τ *cu proprietatea ca pentru* $t \geqslant \tau$ *să avem*

$$|x(t)| < k, \quad |y(t)| < k. \tag{2}$$

Dacă $e(t+\omega) = e(t)$ $(\omega > 0)$ *și este asigurată unicitatea soluțiilor, atunci sistemul* (1) *admite cel puțin o soluție periodică de perioadă* ω.

D e m o n s t r a ț i e. Vom construi în planul fazelor (x, y) o curbă închisă Γ pe care curbele integrale ale sistemului dat o taie din exterior spre interior pentru t crescător. Pentru a construi curba Γ ne vom folosi de funcția

$$U(x, y) = G(x) + H(y) \tag{2}$$

unde

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)\,d\xi, \quad H(y) = \int_0^y h(\eta)\,d\eta. \tag{3}$$

Construcția curbei Γ pentru $x \geqslant 0$.

Notăm

$$A = \max_{|x| \leqq a} |g(x)|, \qquad E = \max_{-\infty < t < \infty} |e(t)|.$$

Potrivit condiției 2^0, va exista un număr $x_0 > a$ astfel încît

$$g(x) > 2(Ma + E) \quad \text{și} \quad g(-x) < -2(Ma + E) \tag{4}$$

pentru $x \geqslant x_0$.

Construcția curbei Γ începe cu punctul $P_1(0, y_1)$, unde $y_1 > 0$.

a) Arcul $P_1P_2P_3$ are ecuația

$$U(x, y) + Ax = \text{const.} \tag{5}$$

De-a lungul acestui arc avem, derivînd (5) în raport cu x,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x) + A}{h(y)} < 0;$$

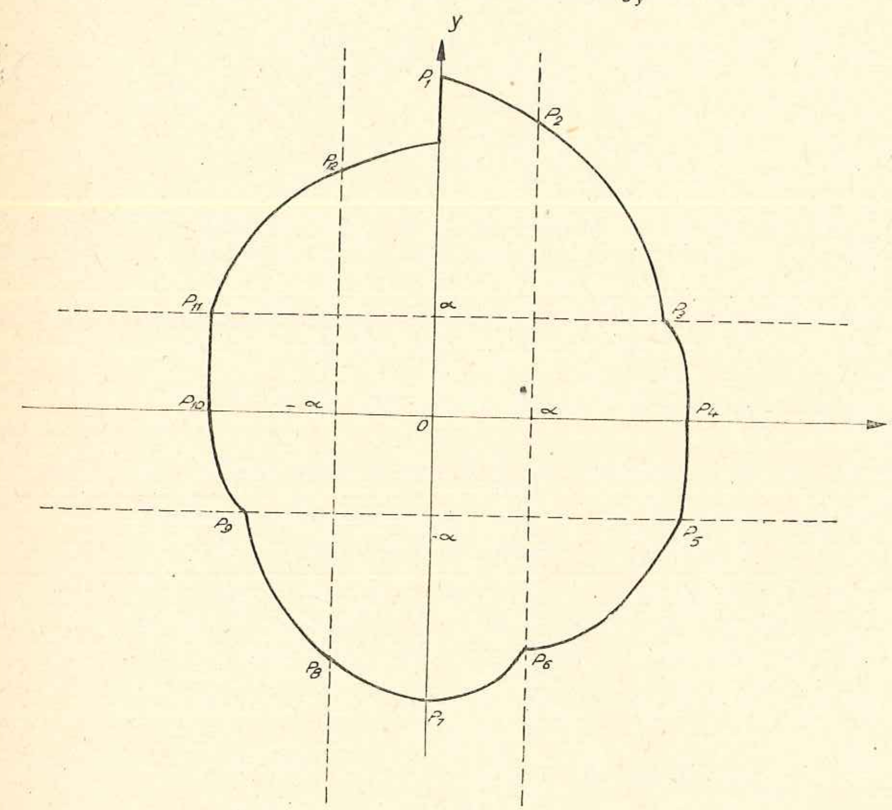
prin urmare arcul $P_1P_2P_3$ descrește pentru x crescător. Acest arc va tăia dreptele $x=a$ și $y=a$ în punctele $P_2(a, y_2)$, respectiv $P_3(x_3, a)$. Să arătăm că aceste puncte există și că $x_3>a$ și $y_2>a$. Pentru aceasta trebuie arătat că dacă punctul P_3 există, atunci neapărat $x_3>a$; apoi trebuie verificată existența punctului P_3.

Într-adevăr, dacă P_3 există și am avea $x_3 \leqslant a$, atunci din

$$H(y_1) = H(a) + G(x_3) + Ax_3 \tag{6}$$

rezultă că pentru $y_1 \to \infty$, $x_3 \to \infty$, ceea ce contrazice ipoteza.

Curba Γ este situată sub curba C, de ecuație $\int_y^{y_1} h(y)\,dy = Ax$, care trece



Graficul curbei Γ.

prin punctul $P_1(0, y_1)$. Dar pentru y_1 fix curba C taie dreapta $y = a$, prin urmare și Γ va tăia dreapta $y=a$.

Pentru traiectoriile T, care pleacă din puncte ale arcului $P_1P_2P_3$, avem

$$\frac{d}{dt}[U(x,y) + Ax] = h(y)\,[-f(x,y)\,y - g(x) + e(t)] + g(x)\,h(y) + Ah(y) =$$
$$= h(y)\,[-f(x,y)\,y + A + \varepsilon(t)].$$

Scriind relaţia (6) pentru un punct curent de pe $P_1P_2P_3$, avem

$$H(y_1) = H(y) + G(x) + Ax$$

de unde rezultă că pentru $y_1 \to \infty$ avem $y \to \infty$ sau $x \to \infty$; prin urmare $(x^2 + y^2)^{1/2} \to \infty$; dar atunci $yf(x, y) \to \infty$ şi deci pentru y_1 suficient de mare avem $E + A < yf(x, y)$.

Aşadar

$$\frac{d}{dt}[U(x, y) + Ax] < 0$$

şi toate traiectoriile T intersectează arcul $P_1P_2P_3$ de la dreapta spre stînga.

b) Arcul P_3P_4, unde $P_4 = P_4(x_4, 0)$, are ecuaţia

$$U(x, y) - (Ma + E)\,x = \text{const.} \tag{7}$$

şi panta

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\Gamma = \frac{Ma + E - g(x)}{h(y)}.$$

Întrucît pentru y_1 destul de mare avem $x_3 \geqslant x_0$, rezultă potrivit inegalităţilor (4), că această pantă este negativă. Pe de altă parte, panta traiectoriilor T care trec prin puncte ale arcului P_3P_4, este

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_T = \frac{-f(x), y)y - g(x) + E}{h(y)}$$

Din condiţia 3° rezultă $-f(x,y)y < My \leqslant Ma$ şi deci

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_T < \left(\frac{dy}{dx}\right)_\Gamma$$

Deci traiectoriile T taie arcul P_3P_4 de la dreapta spre stînga.

În plus, întrucît $x_4 > x_3$, rezultă că $x_4 \to \infty$ cînd $y_1 \to \infty$.

c) Arcul P_4P_5 al curbei Γ este format din segmentul de dreaptă $x = x_4$, care uneşte punctele P_4 şi $P_5(x_4, -a)$. Întrucît pentru $y < 0$ avem $\dot{x} = h(y) < 0$, rezultă că traiectoriile T taie P_4P_5 de la dreapta spre stînga.

d) Arcul P_5P_6 al curbei Γ, unde $P_6(a, y_6)$ are ecuaţia

$$U = \text{const.} \tag{8}$$

Acest arc taie cu siguranţă dreapta $x = a$, deoarece derivînd (8) obţinem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{h(y)} > 0,$$

şi $y_6 \to -\infty$ cînd $x_5 \to \infty$. Pentru traiectoriile T, care pleacă din puncte ale acestui arc, avem

$$\frac{dU}{dt} = h(y)\,[-f(x, y)\,y - g(x) + e(t)] + g(x)\,h(y) =$$
$$= h(y)\,[-f(x, y)\,y + e(t)] < 0,$$

unde ultima inegalitate se obţine din condiţia 3°.

e) Arcul P_6P_7, cu $P_7(0, y_7)$, are ecuaţia

$$U + Ax = \text{const.} \tag{9}$$

În acest caz de asemenea avem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x) + A}{h(y)} > 0$$

şi $y_7 \to -\infty$ cînd $y_6 \to -\infty$. Pentru traiectoriile T care taie acest arc, avem

$$\frac{d}{dt}(U + Ax) = h(y)\,[-f(x, y)\,y + e(t) + A] < 0.$$

Aşadar traiectoriile T taie arcul P_6P_7 de la dreapta spre stînga.

Din relaţiile (6), (7), (8) şi (9) rezultă

$$\begin{cases} -H(y_1) = -H(a) - G(x_3) - Ax_3 \\ G(x_4) - (Ma + E)\,x_4 = H(a) + G(x_3) - (Ma + E)\,x_3 \\ H(y_6) + G(a) = H(-a) + G(x_4) \\ H(y_7) = G(a) + H(y_6) + Aa. \end{cases} \tag{10}$$

Adunînd aceste egalităţi, obţinem

$$H(y_7) - H(y_1) = A(a - x_3) + H(-a) + (Ma + E)(x_4 - x_3)$$

Ţinînd seama de a doua egalitate din (10) şi de inegalitatea

$$G(x_4) - G(x_3) = \int_{x_3}^{x_4} g(x)\,dx > 2(Ma + E)(x_4 - x_3)$$

avem

$$(Ma + E)(x_4 - x_3) < H(a). \tag{11}$$

Expresia pentru $H(y_7) - H(y_1)$ devine, ţinînd seama de (11),

$$H(y_7) - H(y_1) < A(a - x_3) + H(a) + H(-a) \tag{12}$$

În semiplanul stîng curba Γ este constituită din curbele

$P_7P_8P_9$ de ecuaţie $U - Ax = \text{const.}$
P_9P_{10} ,, ,, $U + (Ma + E)\,x = \text{const.}$
$P_{10}P_{11}$,, ,, $x = x_{10}$,
$P_{11}P_{12}$,, ,, $U = \text{const.}$
$P_{12}P_{13}$,, ,, $U - Ax = \text{const.}$

şi se arată, în mod analog cu cazul $x \geqslant 0$, că traiectoriile taie toate aceste arce de la stînga spre dreapta. Analog obţinem relaţia

$$H(y_{13}) - H(h_7) < A(-a + x_9) + H(a) + H(-a). \tag{13}$$

Adunînd inegalităţile (12) şi (13), obţinem

$$H(y_{13}) - H(y_1) < A(x_9 - x_3) + 2H(a) + 2H(-a). \tag{14}$$

Pentru $y_1 \to \infty$, avem $x_3 \to \infty$ şi $x_9 \to -\infty$. Prin urmare

$$H(y_{13}) - H(y_1) < 0 \text{ sau} \int_{y_{13}}^{y_1} h(y)\,dy > 0,$$

de unde rezultă $y_{13} < y_1$.

Completînd acum arcul $P_1P_2 \ldots P_{13}$ cu segmentul de dreaptă $\overline{P_{13}P_1}$ obţinem curba închisă Γ, pe care toate curbele integrale care o ating o intersectează din exterior spre interior, rămînînd pentru t crescător în domeniul Δ mărginit de Γ.

Mai departe, repetînd întocmai consideraţiile făcute de I. B a r b ă l a t în articolul său (cu singura schimbare ca peste tot unde intervine ecuaţia $\dot{x} = y$, ea să se înlocuiască cu $\dot{x} = h(y)$), se arată că o traiectorie T, care pleacă dintr-un punct exterior domeniului Δ cu necesitate va intra peste un interval finit de timp în Δ. Fie τ momentul în care o traiectorie T intersectează domeniul Δ. Atunci, notînd cu $k = \max \{y_1, x_4, |y_7|, |x_{10}|\}$ avem, pentru orice $t \geqslant \tau$

$$|x(t)| < k \quad \text{şi} \quad |y(t)| < k$$

şi prima parte a teoremei este demonstrată.

Existenţa cel puţin a unei soluţii periodice rezultă din teorema de punct fix a lui Brouwer.

Academia R.P.R. — Filiala Cluj
Institutul de calcul

B I B L I O G R A F I E

1. I. B a r b ă l a t. *Soluţii mărginite şi soluţii periodice pentru anumite ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul al doilea. Nota I.* Bul. ştiinţific Acad. R.P.R., Secţ. mat.-fiz., tomul V, nr. 3, 1953, p. 393–400.

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕМЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНИХ УРАВНЕНИЙ

(Краткое содержание)

В работе [1] И. Барбэлат дает достаточные условия для ограниченности всех решений системы (0) и существования, по крайном мере, одного периодического решения. В данной работе мы рассматривали вместо первого уравнения системы (0) $\dot{x} = y$ уравнение $\dot{x} = h(y)$ и показано, что утверждения теоремы Барбэлата сохраняются и в этом, более общем, случае. Доказывается.

Теорема. Пусть для системы дифференциальных уравнений (1) выполнены условия:

1°. Функции $f(x, y), g(x), h(y)$ и $e(t)$ — неперывны для всех значений своих нргументов, причем $e(t)$ — органичена;

2°. Существует число $a > 0$ такое, что $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$ для $|x| > a$;

3°. Если $|y| > a$, тогда $f(x, y)\,|y| \to \infty$ для $(x^2+y^2)^{1/2} \to \infty$; существует число $M > 0$ такое, что $f(x, y) > M$ для $x > a$, $0 \leqslant y \leqslant a$ и $x < -a \leqslant y \leqslant 0$;

4°. $\operatorname{sign} h(y) = \operatorname{sign} y$ и $\int_0^\infty h(y)\,dy = \infty$.

Тогда существует постоянная k, зависящая от функций f, g, h и e такая, что для каждого решения $\{x(t), y(t)\}$ системы (1) существует число τ, обладающее свойством, что для $t \geqslant \tau$ имеем

$$|x(t)| < k, \quad |y(t)| < k.$$

Если сверх того, $e(t + \omega) = e(t)$ $(\omega < 0)$ и обеспечена единственность решений, тогда система (1) допускает, по крайе мере, одно периодическое решние, периода ω.

SOLUTIONS BORNÉES ET SOLUTIONS PÉRIODIQUES POUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(Résumé)

En [1] I. B a r b ă l a t donne des conditions suffisantes pour que le système (0) admette toutes les solutions bornées et au moins une solution périodique. Dans ce travail on substitue la première équation $\dot{x} = y$ du système (0) par l'équation $\dot{x} = h(y)$ et l'on montre que les conclusions du théorème de I. Barbălat se maintiennent. On démontre le théorème:

Théorème. Si pour le systeme d'équations différentielles (1) les conditions suivantes sont satisfaites:

1°. Les fonctions $f(x, y)$, $g(x)$, $h(y)$ et $e(t)$ sont continues pour toutes les valeurs des arguments, en plus, $e(t)$ est bornée;

2°. Il existe un nombre $a > 0$ tel que $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$ pour $|x| > a$.

3°. Si $|y| > a$, alors $f(x, y)\,|y| \to \infty$ *pour* $(x^2 + y^2)^{1/2} \to \infty$; il existe un nombre $M > 0$ tel que $f(x, y) > -M$ pour $\{x > a,\ 0 \leqq y \leqq a\}$ et $\{x < -a,\ -a \leqq y \leqq 0\}$.

4°. sign $h(y) = \operatorname{sign} y$ et $\int_0^\infty h(y)\,dy = \infty$.

Alors il existe une constante k dépendente des fonctions f, g, h et e telle que pour chaque solution $x(t)$, $y(t)$ du sistème (1) il existe un nombre τ avec la propriété pour que pour $t \geqslant \tau$ on ait

$$|\dot{x}(t)| < k, \ |y(t)| < k.$$

Si $e(t + \omega) = e(t)$, $(\omega > 0)$ et si l'unicité des solutions et assurée, alors le système (1) admet au moins une solution périodique, de période ω.