O TEOREMĂ DE EXISTENȚĂ A SOLUȚIILOR PERIODICE*)

DE

ION MUNTEANU
(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea științifică din 21—23 aprilie 1960 a Universității „Babeș—Bolyai", Cluj.

Cercetarea matematică a anumitor rețele electrotehnice și radiotehnice, cum este schema generatorului cu lampă, precum și studiul unor scheme mecanice care intervin în problema dinamicii sborului, conduc la sisteme autonome de două ecuații diferențiale, în general neliniare, de forma

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

O serie de rezultate în această direcție, cu aplicații în tehnică, sînt prezentate în ediția a doua a cărții lui Andronov, Vitt și Haikin [1].

În lucrarea de față se indică condiții de realizare a unui regim periodic pentru un caz particular al sistemului amintit de ecuații diferențiale. Anume, folosind metodele bine cunoscute ale lui Levinson și Smith [2], Filipov [3] și Draghilev [4], precum și ideea introducerii unui termen neliniar [5], în lucrare se dă o ușoară generalizare a unei teoreme a lui Draghilev, arătînd că în condiții care se vor preciza în cele ce urmează, sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= h(y) - F(x), \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x) \end{aligned} \tag{1}$$

admite cel puțin o soluție periodică.

Lucrarea nu tratează problema unicității soluției periodice.

---

*) Această lucrare apare și în limba rusă în revista „Mathematica", vol 1 (24), fasc. 2, 1959.

Presupunem că funcţiile $F(u)$, $g(u)$ şi $h(u)$, care intervin în sistemul (1), sînt definite şi continue pe toată axa reală şi satisfac unor condiţii care asigură unicitatea şi prelungibilitatea oricărei soluţii a problemei lui Cauchy pentru sistemul (1). În aceste ipoteze obişnuite se stabileşte următoarea teoremă.

TEOREMĂ. *Dacă*

1°. $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} x$ *şi integrala* $\int_0^x g(\xi)d\xi$ *este divergentă pentru* $|x| \to \infty$;

2°. $\operatorname{sgn} F(x) = -\operatorname{sgn} x$ *pentru* $|x|$ *suficient de mic*;

3°. *există numărul pozitiv* M *şi constantele pozitive* k *şi* k', $k > k'$, *astfel ca*

$$F(x) \geqq k, \qquad \text{pentru } x > M,$$

$$F(x) \leqq -k', \qquad \text{pentru } x < -M;$$

4°. $\operatorname{sgn} h(y) = \operatorname{sgn} y$ *şi* $|h(y)| \to \infty$ *pentru* $|y| \to \infty$; *atunci sistemul de ecuaţii diferenţiale* (1) *admite cel puţin o soluţie periodică.*

În demonstraţia teoremei vom distinge cîteva etape.

a) Din condiţiile 1°, 2° şi 4° ale teoremei rezultă că $g(0) = F(0) = h(0) = 0$, deci originea coordonatelor este un punt singular al sistemului. Acest punct singular este unic.

În planul fazelor (x, y) vom construi un domeniu inelar $\mathcal{J}$ care nu conţine originea şi care se bucură de proprietatea că orice semitraectorie pozitivă a sistemul (1), care pleacă dintr-un punct al domeniului $\mathcal{J}$, va rămîne în acest domeniu pentru toate valorile următoare ale variabilei independente t. În acest domeniu va fi situată soluţia periodică din enunţul teoremei.

b) Construcţia indicată mai sus se va realiza utilizînd familia de curbe de nivel a energiei sistemului (1) şi anume $\lambda(x, y) = c$, unde

$$\lambda(x, y) = G(x) + H(y),$$

în care

$$G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi, \quad H(y) = \int_0^y h(\eta)d\eta.$$

Din condiţiile 1° şi 4° rezultă că funcţia $\lambda(x, y)$ este definită pozitiv, de aceea curba definită implicit de ecuaţia $\lambda(x, y) = c$, cu $c > 0$, este închisă iar domeniul interior delimitat de aceasta conţine originea coordonatelor. În plus, dacă $0 < c' < c''$, atunci curba $\lambda(x, y) = c'$ este situată în domeniul delimitat de curba $\lambda(x, y) = c''$.

c) Alegem $|x|$ atît de mic încît să fie îndeplinită condiţia 2°. Atunci derivata funcţiei $\lambda(x, y)$ în virtutea sistemului (1) este o funcţie definită pozitiv. În adevăr,

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = g(x)[h(y) - F(x)] + h(y)[-g(x)] = -g(x)F(x),$$

de unde, potrivit condiţiei 1°, rezultă că

$$\frac{d\lambda}{dt} > 0$$

pentru valorile indicate ale lui $|x|$.

Din acest motiv toate semitraectoriile pozitive care au puncte comune cu curba $\lambda(x, y) = c$, unde c este o constantă pozitivă şi suficient de mică, vor tăia această curbă din interiorul spre exteriorul domeniului delimitat de ea. Rezultă de aici că originea coordonatelor este un punct singular de respingere a semitraectoriilor pozitive. Curba $\lambda(x, y) = c$, astfel construită, va servi ca frontieră interioară a domeniului inelar $\mathcal{J}$.

d) Fie acum a un număr mai mare decît numărul

$$\max\left[k, \sup_{-M \leqq x \leqq M} |F(x)|\right].$$

Construim dreptunghiul cu vîrfurile în punctele $V_1(M, a)$, $V_2(M, -a)$, $V_3(-M, -a)$, $V_4(-M, a)$, (fig. 1). Pe dreapta $x = M$ alegem un punct $Q(M, y_Q)$ astfel încît $y_Q > a$ şi să avem

$$h(y) > a, \quad \text{pentru } y > y_Q.$$

O asemenea alegere a punctului Q este posibilă în virtutea condiţiei 4°. Atunci, notînd cu $f(Q, t)$ traectoria sistemului (1) care iese din punctul Q, avem pentru $0 < x \leqq M$,

$$\frac{dx}{dt} = h(y) - F(x) > a - F(x) > 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = -g(x) < 0. \qquad (2)$$

Din aceste inegalităţi rezultă că semitraectoria negativă $f(Q, t)$ va merge spre stînga în sus şi va traversa perpendicular axa Oy într-un punct $P(0, y)$, fiindcă $\lim_{x \downarrow 0} g(x) = g(0) = 0$. Inegalităţile (2) ne mai arată că semitraectoria pozitivă $f(Q, t)$ este îndreptată, în punctul Q, spre dreapta în jos; în plus, a doua inegalitate din (2) arată că $y(t)$ descreşte pentru t crescător şi $x > M$.

e) Vom arăta acum că există cel puţin un punct $\bar{Q}(\bar{x}, \bar{y})$ situat pe semitraectoria pozitivă $f(Q, t)$, astfel încît $\bar{x} > M$ şi

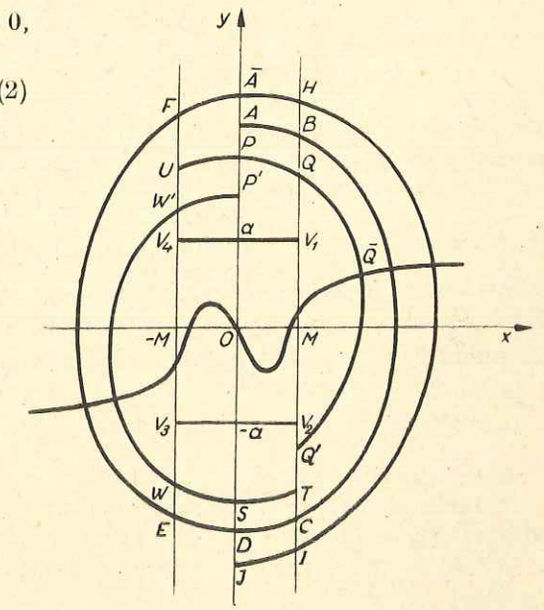

Fig. 1

$$h(\overline{y}) - F(\overline{x}) = 0.$$

În adevăr, potrivit alegerii punctului Q, coordonatele (x, y) ale unui punct suficient de aproape de punctul Q și situat pe semitraectoria pozitivă $f(Q, t)$ verifică inegalitatea $h(y) - F(x) > 0$. Pentru a demonstra egalitatea de mai sus este suficient, pe baza continuității funcției $h(y(x)) - F(x)$, să arătăm că există cel puțin un punct (x_1, y_1), cu $x_1 > M, y_1 > y_Q$ astfel ca

$$h(y_1) - F(x) < 0.$$

Pentru a stabili aceasta, presupunem contrarul, anume că pentru orice $x > M$ și $y > y_Q$ avem

$$h(y) - F(x) > 0.$$

Dar atunci inegalitățile (2) se mențin și în domeniul $D = \{ x > M, y < y_Q \}$ Fie acum b un număr mai mare decît numărul

$$\max [k, \sup_{y<y_Q} h(y)].$$

Utilizînd condiția 3°, avem

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{h(y)-F(x)} < -\frac{g(x)}{b-k}.$$

Integrînd ultima inegalitate de la M la x, obținem

$$y < y_Q - \frac{1}{b-k}\int_M^x g(\xi)d\xi.$$

De aici se vede, că potrivit condiției 1°, pentru x suficient de mare, y devine negativ. Fie x_1 și y_1 aceste valori. Avem evident, $x_1 < M$ și $y_1 < 0$. Potrivit condiției 4°, avem și $h(y_1) < 0$. De aceea, cu atît mai mlt,

$$h(y_1) - F(x_1) < 0.$$

Contradicția la care am ajuns demonstrează existența a cel puțin un punct $\overline{Q}(\overline{x}, \overline{y})$ pentru care $h(\overline{y}) - F(\overline{x}) = 0$. În plus, tangenta la traectoria $f(Q, t)$, în punctul $\overline{Q}$, este îndreptată vertical în jos, fiindcă

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{\substack{x=\overline{x}\\ y=\overline{y}}} = 0.$$

Pe lîngă acestea, din raționamentul de mai sus rezultă că pentru $x > x_1$ și $y < y_Q$ avem

$$h(y) - F(x) < 0.$$

De altfel, această inegalitate este evidentă pentru $x \geqq 0$ și $y < 0$.

f) Prelungind acum semitraectoria pozitivă $f(Q, t)$ dincolo de punctul $\overline{Q}(\overline{x}, \overline{y})$, vom avea pentru toate valorile următoare ale lui t

$$h(y) - F(x) < 0$$

deci, pentru $x > 0$,

$$\frac{dx}{dt} = h(y) - F(x) < 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = -g(x) < 0.$$

Așadar semitraectoria pozitivă $f(Q, t)$ coboară spre stînga și va atinge dreapta $x = M$, pentru a doua oară, într-un punct $Q'(x', y')$, ale cărui coordonate verifică inegalitatea $h(y') - F(x') < 0$.

g) Luăm pe dreapta $x = -M$ punctul $U(-M, y_U)$, avînd ordonata $y_U > a$, astfel încît $h(y) > a$ pentru $y > y_U$. Considerăm semitraectoria pozitivă $f(U, t)$ care pleacă din acest punct. Pentru $-M \leqq x < 0$ și $y > y_U$ avem

$$\frac{dx}{dt} > 0 \quad \text{și} \quad \frac{dy}{dt} > 0.$$

Prin urmare semitraectoria pozitivă $f(U, t)$ va tăia axa Oy într-un punct V. Se poate presupune că punctul V coincide cu punctul P construit mai sus.

Am construit deci arcul de traectorie $UPQQ'$, unde coorodonatele (x', y') ale punctului Q' verifică inegalitatea $h(y') - F(x') < 0$.

h) În mod analog, urmărind construcția de la punctele *d*) și *g*), vom construi un arc de traectorie, care pleacă dintr-un punct W, situat pe dreapta $x = -M$ și a cărui ordonată $y_W > -a$ este astfel încît $h(y) < -a$, pentru $y > y_W$. Procedînd apoi analog cu cazul arcului $UPQQ'$, vom construi arcul de traectorie $TSWW'$, unde punctul T este situat pe dreapta $x = M$, nu mai sus de punctul Q', punctul S pe axa Oy, iar punctele W și W' pe dreapta $x = -M$. În plus, coordonatele (x'', y'') ale punctului W' verifică inegalitatea $h(y'') - F(x'') > 0$.

i) Relativ la poziția punctelor W' și U, ambele situate pe dreapta $x = -M$, sînt posibile următoarele situații:

α) punctul W' este situat sub punctul U,
β) punctul W' coincide cu punctul U,
γ) punctul W' este situat deasupra punctului U.

Vom demonstra că în condițiile teoremei *există cel puțin un sistem de arce $UPQQ'$, $TSWW'$, de tipul celor de mai sus, pentru care situația* γ) *nu poate avea loc.*

Pentru demonstrație presupunem contrarul, anume că situația γ) se realizează pentru orice sistem de arce de tipul $UPQQ'$, $TSWW'$ cu proprietățile studiate la puntele *d*)—*h*). Atunci prelungim semitraectoria pozitivă $f(W', t)$ pînă la intersecția ei, în punctul P', cu axa Oy. Considerăm domeniul $\mathcal{G}$, delimitat de curba închisă Γ formată din arcele de traectorie PQQ', $TSWW'P'$ și segmentele de dreaptă PP' și $Q'T$.

Pe baza unicității soluțiilor sistemului (1), semitraectoriile pozitive pot să intre în domeniul $\mathcal{G}$ numai prin puncte ale segmentlui $Q'T$ și pot să iese din $\mathcal{G}$ numai prin puncte ale segmentului PP', traversînd perpendicular acest segment.

j) Vom lua acum ca punct inițial punctul $A(0, y_0)$ situat pe axa Oy deasupra punctului P', și vom construi semitraectoria pozitivă $f(A, t)$ care pleacă din acest punct; ea va avea o alură asemănătoare cu arcele curbei Γ. Anume va intersecta dreapta $x = M$ în punctele B și C, axa Oy în punctul $D(0, y_1)$, dreapta $x = -M$ în punctele E și F și va reveni la axa Oy într-un punct $\overline{A}(0, \overline{y}_1)$.

Observăm că dacă punctul C este situat pe segmentul $Q'T$, atunci semitraectoria pozitivă $f(A, t)$ intră în domeniul $\mathcal{G}$, din care poate ieși numai prin puncte ale segmentului PP'; dar atunci, întrucît punctul P' este situat sub punctul inițial A al acestei semitraectorii, pentru sistemul corespunzător de arce nu se realizează situația γ). În acest caz afirmația de mai sus este demonstrată.

Presupunem deci că punctul C se află sub punctul T de pe dreapta $x = M$.

Dacă punctul $\overline{A}$ se află sub punctul A, atunci afirmația noastră este, de asemenea, demonstrată.

Așadar presupunem că $\overline{y}_1 > y_0$. Fie H punctul de intersecție a semitraectoriei pozitive $f(\overline{A}, t)$ cu dreapta $x = M$, I punctul în care $f(\overline{A}, t)$ taie pentru a doua oară dreapta $x = M$ și, în sfîrșit, $I(0, y_2)$ punctul în care $f(\overline{A}, t)$ intersectează semiaxa negativă Oy. Întrucît am presupus că $\overline{y}_1 > y_0$, avem $y_2 < y_1 < 0$.

Pentru a ajunge la o contradicție vom delimita în prealabil variația funcției $\lambda(x, y)$, definită mai sus și apoi a traectoriei sistemului (1).

k) Vom calcula derivata $\frac{d\lambda}{dy}$ de-a lungul unei traectorii.

Avem

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{dx}{dy} = h(y) + g(x)\frac{h(y) - F(x)}{-g(x)} = F(x)$$

Așadar, pentru $x \neq 0$,

$$\frac{d\lambda}{dy} = F(x).$$

Notăm $\lambda(R) = \lambda(x_R, y_R)$ și integrăm ultima egalitate de-a lungul arcului BC și apoi de-a lungul arcului EF. Avem,

$$\lambda(C) - \lambda(B) = \int_B^C F(x)dy = -\int_C^B F(x)dy \leqq -k(y_B - y_C)$$

și

$$\lambda(F) - \lambda(E) = \int_E^F F(x)dy < k'(y_F - y_E).$$

Vom calcula acum derivata $\frac{d\lambda}{dx}$ de-a lungul unei traectorii.

Avem

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\partial\lambda}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial\lambda}{\partial x} = h(y)\frac{-g(x)}{h(y) - F(x)} + g(x) = -\frac{g(x)F(x)}{h(y) - F(x)}$$

Fie $-M \leqq x \leqq M$. Introducem numerele

$$L_{PQ} = \int_P^Q \left| \frac{g(x)\,F(x)}{h(y) - F(x)} \right| dx, \quad L_{TS} = \int_T^S \left| \frac{g(x)\,F(x)}{h(y) - F(x)} \right| dx,$$

$$L_{SW} = \int_S^W \left| \frac{g(x)\,F(x)}{h(y) - F(x)} \right| dx, \quad L_{UP} = \int_U^P \left| \frac{g(x)\,F(x)}{h(y) - F(x)} \right| dx,$$

unde integrările se fac de-a lungul arcelor indicate de traectorie. Notăm cu $L = \max(L_{PQ}, L_{TS}, L_{SW}, L_{UP})$. Considerăm integrala

$$|\lambda(B) - \lambda(A)| = \left| \int_A^B \frac{-g(x)\,F(x)}{h(y) - F(x)} dx \right|.$$

Conform condiției 4° putem alege punctul B astfel încît $y_B > y_P$ și

$$\inf_{y_B \leqq y \leqq y_A} h(y) > \sup_{y_Q \leqq y \leqq y_P} h(y)$$

Atunci oricare ar fi $x \in [0, M]$, coordonatele punctelor (x, y_{PQ}), (x, y_{AB}), luate respectiv pe arcele de traectorie PQ, AB, verifică inegalitatea

$$h(y_{PQ}) - F(x) < h(y_{AB}) - F(x).$$

Din acest motiv

$$|\lambda(B) - \lambda(A)| < \left| \int_P^Q \frac{-g(x)\,F(x)}{h(y) - F(x)} dx \right| \leqq L_{PQ} \leqq L.$$

Așadar

$$|\lambda(B) - \lambda(A)| < L.$$

În mod analog se arată că

$$|\lambda(D) - \lambda(C)| < L, \quad |\lambda(E) - \lambda(D)| < L, \quad |\lambda(\overline{A}) - \lambda(F)| < L.$$

De aici rezultă că numărul $2L$ mărginește variația valorii absolute a funcției $\lambda(x, y)$ de-a lungul oricărei traectorii situate în domeniile

$$\mathcal{B}_1 = \{-M \leqq x \leqq M,\ h(y) > a\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{-M \leqq x \leqq M,\ h(y) < -a\}.$$

l) Vom arăta acum că şi variaţia lui y este mărginită în domeniile $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$. În adevăr, din relaţia $\lambda(x, y) = H(y) + G(x)$ rezultă că, pentru $\bar{y} \cdot \bar{\bar{y}} > 0$, $|h(\bar{y})| > a$, $|h(\bar{\bar{y}})| > a$, avem

$$H(\bar{y}) - H(\bar{\bar{y}}) = \bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}} + \int_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}} g(\xi)\, d\xi.$$

Dar, pe baza teoremei de medie a calculului integral, avem şi

$$H(\bar{y}) - H(\bar{\bar{y}}) = \int_{\bar{\bar{y}}}^{\bar{y}} h(\eta) d\eta = (\bar{y} - \bar{\bar{y}}) h(\eta),$$

unde $\eta \in [\bar{\bar{y}}, \bar{y}]$. De aceea, ţinînd sema de faptul stabilit la punctul *k*), şi anume că în domeniile $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ are loc inegalitutea $|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}| < 2L$, deducem

$$|\bar{y} - \bar{\bar{y}}| \leqq \frac{|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}| + \int_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}} |g(\xi)| d\xi}{|h(\eta)|} < \frac{2L + 2M \cdot \max\limits_{-M \leqq \leqq M} |g(x)|}{a}$$

Prin aceasta am demonstrat că variaţia lui y de-a lungul unei traectorii situate în unul din domeniile $\mathcal{B}_1$ sau $\mathcal{B}_2$ este mărginită :

$$|\bar{y} - \bar{\bar{y}}| < N,$$

unde N este egal cu numărul

$$\frac{2L + 2M \cdot \max\limits_{-M \leqq \leqq M} |g(x)|}{a}$$

m) Vom evalua acum diferenţa $\lambda(J) - \lambda(D)$. Deoarece am presupus că $\bar{y}_1 > y_0$, avem şi $y_2 < y_1 < 0$. Dar atunci, pe de o parte

$$\lambda(J) - \lambda(D) > 0, \tag{3}$$

fiindcă

$$\lambda(J) - \lambda(D) = \lambda(0, y_2) - \lambda(0, y_1) = H(y_2) - H(y_1) = \int_{y_1}^{y_2} h(\eta) d\eta =$$

$$= \int_{y_2}^{y_1} [-h(\eta)] d\eta > 0\,;$$

pe de altă parte vom arăta că are loc şi inegalitatea inversă : $\lambda(J) - \lambda(D) < 0$. Ajungem în acest fel la o contradicţie, care nu poate fi înlăturată decît suprimînd presupunerea că $y_2 < y_1$, adică presupunem că $\bar{y}_1 > y_0$, adică admitem $\bar{y}_1 \leqq y_0$. Dar atunci pentru arcul $ABCDEFA$, analog sistemului $UPQQ'$, $TSWW'$, situaţia γ) referitoare la punctele $\bar{A}$ şi A nu poate avea loc şi deci, afirmaţia de la punctul *i*) va fi demonstrată.

Rămîne să arătăm deci că $\lambda(J) - \lambda(D) < 0$. În adevăr, ţinînd seama de delimitările stabilite la punctele *k*) şi *l*), avem

$$\lambda(E) - \lambda(D) < L, \tag{4}$$
$$\lambda(F) - \lambda(E) < k'(y_F - y_E) < k'(\bar{y}_1 + |y_2|), \tag{5}$$
$$\lambda(H) - \lambda(F) < 2L, \tag{6}$$
$$\lambda(I) - \lambda(H) < -k(y_H - y_I).$$

Întrucît $y_H > \bar{y}_1 - N$ şi $y_I > y_2 + N$, ultima inegalitate se scrie

$$\lambda(I) - \lambda(H) < -k(\bar{y}_1 - y_2 - 2N) = -k(\bar{y}_1 + |y_2| - 2N). \tag{7}$$

La inegalităţile precedente se adaugă şi următoarea

$$\lambda(J) - \lambda(I) < L. \tag{8}$$

Adunăm inegalităţile (4), (5), (6), (7), (8) :

$$\lambda(J) - \lambda(D) < 4L + 2Nk - (k - k')(\bar{y}_1 + |y_2|)$$

de unde, întrucît $\bar{y}_1 > y_0$, avem

$$\lambda(J) - \lambda(D) < 4L + 2Nk - (k - k')y_0. \tag{9}$$

Alegem acum numărul y_0 mai mare decît numărul

$$\frac{4L + 2Nk}{k - k'}.$$

Pentru o asemenea alegere a lui y_0, valoarea lui L poate fi considerată aceeaşi ca la punctul *k*), iar inegalitatea (9) devine

$$\lambda(J) - \lambda(D) < 0,$$

ceea ce contrazice inegalitatea (3).

n) Contradicţia la care s-a ajuns arată că dacă se alege numărul y_0 astfel încît să verifice, pe lîngă condiţiile precedente, şi condiţia

$$y_0 > \frac{4L + 2Nk}{k - k'},$$

atunci are loc inegalitatea $\bar{y}_1 \leqslant y_0$.

p) Aşadar semitraectoria pozitivă $f(A, t)$ care iese din punctul $A(0, y_0)$, intră, după ce taie pentru a doua oară semiaxa pozitivă Oy în punctul $\bar{A}(0, \bar{y}_1)$, în domeniul $\mathcal{D}$ (sacul lui Bendixon), delimitat de arcul de traectorie $A\bar{A}$ şi de segmentul $A\bar{A}$ situat pe axa Oy şi avînd extremităţile y_0 şi $\bar{y}_1$, $y_0 > \bar{y}_1$. (În cazul cînd $y_0 = \bar{y}_1$, atunci traectoria $f(A, t)$ este închisă, deci este o soluţie periodică şi teorema este demonstrată). Din acest domeniu semitraectoriile pozitive nu pot ieşi, fiindcă prin segmentul $A\bar{A}$ semitraectoriile pozitive pot numai să intre în domeniul $\mathcal{D}$.

Să notăm acum cu $\mathcal{E}$ domeniul mărginit de curba închisă $\lambda(x,y) = c$ construită la punctul c). Domeniul inelar $\mathcal{J} = \mathcal{D} - \mathcal{E}$ nu conține nici un punct singular al sistemului (1) și orice semitraectorie pozitivă care iese dintr-un punct al acestui domeniu rămîne, potrivit celor demonstrate mai sus, în $\mathcal{J}$ pentru toate valorile următoare ale lui t. Dar atunci, pe baza cunoscutei teoreme a lui Bendixon-Poincaré, în domeniul inelar $\mathcal{J}$ se găsește cel puțin o soluție periodică a sistemului de ecuații diferențiale date.

Teorema este demonstrată.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Работа содержит обобщение одной теоремы Драгилева [3]. Именно устанавливается:

Теорема. *Если*

1°. $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} x$ *и интеграл* $\int_x^x g(\xi)d\xi$ *расходится при* $|x| \to \infty$;

2°. $\operatorname{sgn} F(x) = -\operatorname{sgn} x$ *при достаточно малом* $|x|$;

3°. *существуют положительные числа* M, k, k'', $k > k''$, *такие, что* $F(x) \geqq k$ при $x > M$, $F(x) < -k''$ *при* $x < -M$;

4°. $\operatorname{sgn} h(y) = \operatorname{sgn} y$ *и* $|h(y)| \to \infty$ *при* $|y| \to \infty$; *тогда система дифференциальных уравнений* (1) *имеет хотя бы одно периодическое решение.*

UN THÉORÈME D'EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES

RÉSUMÉ

Le travail contient une généralisation d'un théorème de A. V. Draguileff [3]. On établit notamment

Théorème. *Si*

1°. $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} x$ *et l'intégrale* $\int_x^x g(\xi)d\xi$ *diverge quand* $|x| \to \infty$;

2°. $\operatorname{sgn} F(x) = -\operatorname{sgn} x$ *quand* $|x|$ *est suffisamment petit*;

3°. *il existe les nombres positifs* M, k, k', $k > k'$, *de manière que* $F(x) \geqslant k$ *quand* $x > M$, $F(x) < -k'$, *quand* $x < -M$;

4°. $\operatorname{sgn} h(y) = \operatorname{sgn} y$ *et* $|h(y)| \to \infty$ *quand* $|y| \to \infty$; *alors le système d'équations différentielles* (1) *a au moins une solution périodique.*

BIBLIOGRAFIE

1. Андронов А. А., Витт А. А., и Хайкин С. Э., *Теория колебаний.* Москва, 1959 г.
2. Levinson N., Smith O. K., *A general equation of relaxation oscillation.* Duke Math. J., **9** (1942).
3. Филиппов А. Ф., *Достаточные условия существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка.* Матем. сб., **30(72)**, 171—180 (1952).
4. Драгилёв А. В., *Периодические решения дифференциального уравнеия нелинейных колебаний.* Прикл. мат. и мех. **16**, 85—88 (1952).
5. Munteanu I., *Soluții mărginite și soluții periodice pentru anumite sisteme de ecuații diferențiale.* Stud. și cerc. de mat. (Cluj), **VIII**, 1—2, 125—131 (1957).

Primit la 26. XII. 1959.