ASUPRA UNEI FORMULE A LUI S. STOILOW *)

DE

CABIRIA ANDREIAN CAZACU
(București)

Lucrare prezentată la sesiunea științifică din 25 aprilie 1960 a Universității ,,C. I. Parhon", București.

În cazul suprafețelor riemanniene normal exhaustibile [1], regiunile maxime [1]) ale oricărei regiuni din suprafața de bază, considerate ca suprafețe de acoperire sînt de asemenea normal exhaustibile. O proprietate analoagă nu se poate formula însă în cazul suprafețelor riemanniene parțial regulat exhaustibile [3]. Se impune astfel în mod natural cercetarea acoperirilor obținute considerînd porțiuni de suprafețe riemanniene parțial regulat exhaustibile, care sînt regiuni maxime ale diferitelor regiuni din suprafața de bază. În acest scop, lărgim în prima parte a lucrării definiția acoperirii parțial regulate, iar în partea a doua extindem pentru aceste acoperiri formula relativă la ramificare stabilită de S. Stoilow [2] [2]), formulă care exprimă conținutul topologic al unor rezultate clasice relativ la proprietățile derivatei unei funcții analitice, ale matematicienilor Denjoy și Alander.

Conform teoriei lui S. Stoilow [2] [3]), acoperirea riemanniană $(S)_T^V$, unde S și V sînt suprafețe orientabile, iar T o transformare interioară a lui V și S, este parțial regulată, dacă pe S există un număr finit de curbe jordaniene γ disjuncte două cîte două, fiecare frontieră comună la două regiuni disjuncte ale mulțimii $S - \gamma$, astfel încît să fie verificate proprietățile :

---

*) Această lucrare se publică și în limba germană în revista ,,Revue de mathématiques pures et appliquées", t V, no. 1, p 59—74 (1961).

[1]) Numim regiune maximă a unei regiuni din suprafața de bază, orice componentă conexă a preimaginii sale de pe suprafața de acoperire [2], p. 108.

[2]) p. 136

[3]) cap. VI, IV, p. 135

(β_1). Dacă P_n este un şir de puncte din V, tinzînd către fr V[4]), atunci $p_n = T_n(P)$, tinde către fr $S \cup \gamma$.[5])

(β_2). Preimaginea fiecărei curbe din γ e compactă în V sau vidă.

Fiecare din regiunile δ_i în care se descompune $S - \gamma$ este acoperită total de V sau nu este acoperită de loc. Să notăm cu n_i gradul acestei acoperiri. Dacă V şi S au caracteristici finite şi dacă ρ, respectiv ρ_i, reprezintă caracteristica lui V şi a regiunii δ_i, atunci formula lui S. Stoilow dă ordinul total de ramificare al acoperirii $(S)_T^V$:

$$r = \rho - \sum_i n_i \rho_i. \tag{1}$$

Această relaţie se reduce la formula lui Hurwitz dacă acoperirea este totală, [2][6]).

I

PROPOZIŢII AUXILIARE

1. În acest paragraf vom considera o suprafaţă riemanniană $(S)_T^V$ care satisface proprietatea (β_1) relativ la o mulţime γ închisă, oarecare din S, $\gamma \neq S$[7]).

P_1. *Orice regiune δ din $S - \gamma$ este acoperită total de fiecare regiune maximă a sa Δ din V.*

Orice regiune în care se descompune $V - T^{-1}(\gamma)$ este regiune maximă pentru una din regiunile în care se descompune $S - \gamma$.

Fie P_n un şir din Δ, tinzînd către fr Δ. Dacă $p_n = T(P_n)$ n-ar tinde către fr δ, ar exista un subşir p_{n_k} tinzînd către un punct $p \in \delta$. Punctele corespunzătoare P_{n_k} nu tind către fr V, conform proprietăţii (β_1) şi relaţiei $\gamma \cap \delta = 0$, deci există un subşir $P_{n_{k_j}}$ tinzînd către un punct P din frontiera relativă a lui Δ. Dar atunci $p = T(P)$ ar aparţine frontierei relative a lui δ, [2][8]), care este inclusă în γ, ceea ce este absurd. Partea a doua a propoziţiei rezultă imediat din proprietăţile transformărilor interioare.

P_2. *Dacă $a \in T(V) - \gamma$, atunci $T^{-1}(a)$ cuprinde un număr finit de puncte din V.*

Proprietatea se demonstrează aplicînd direct raţionamentul din [2][9]): Dacă P_2 nu ar fi adevărată, se construeşte un şir de puncte tinzînd către fr V, a căror proecţii tind către a, ceea ce contrazice (β_1).

---

[4]) Prin frontiera unei suprafeţe înţelegem frontiera ideală [2], cap IV, II. Un şir $P_n \in V$ tinde către fr V, dacă nu există nici un subşir din P_n convergent către un punct din V [2], p. 125.

[5]) Orice punct de acumulare din S al şirului p_n este situat pe γ.

[6]) cap. V, II şi III, p. 132.

[7]) Evident, propritatea (β_1) este verificată atunci pentru orice altă mulţime închisă $\gamma_1 \supset \gamma$.

[8]) p. 108.

[9]) cap. V, II, 2 p. 126.

Din propoziţiile P_1 şi P_2 rezultă consecinţa :

C_1. *Fiecărei componente conexe δ a mulţimii $S - \gamma$ îi corespunde un număr finit n, gradul acoperirii sau numărul foilor lui V peste δ.*

P_3. *Dacă $a \in T(V) \cap \text{fr}\,\gamma$, preimaginea sa $T^{-1}(a)$ constă de asemenea dintr-un număr finit de puncte din V.*

Mai precis, fie δ_i componentele conexe din $S - \gamma$, pe frontiera cărora se găseşte a şi $n = \min n_i$, unde n_i este gradul acoperirii lui V peste δ_i. Atunci $T^{-1}(a)$ constă din cel mult n puncte.

Evident cel puţin pentru o regiune δ_i, de ex. δ_{i_0}, avem $n_{i_0} = n$. Dacă a ar fi acoperit de $n+1$ puncte din V, ar exista o vecinătate a sa v_a formată din puncte acoperite de cel puţin $n+1$ ori de V, după teorema de inversiune a transformărilor interioare [2][10]). Însă $v_a \cap \delta_{i_0} \neq 0$ şi δ_{i_0} este acoperit de n ori.

C_2. *Dacă suprafaţa $(S)_T^V$ verifică proprietatea (β_1) relativ la o mulţime frontieră γ din S, preimaginea fiecărui punct din $T(V)$ este formată dintr-un număr finit de puncte din V.*

Observaţie O_1 : Condiţia ca γ să fie mulţime frontieră e necesară pentru formularea propoziţiei C_2. Dacă γ are puncte interioare, fie d un domeniu jordanian inclus în γ, iar V suprafaţa obţinută racordînd la S, tăiată înt e două puncte interioare lui d, un capăt logaritmic peste int d. Acoperirea obţinută a lui S are proprietatea (β_1) relativ la γ, dar punctele din int d au preimagini infinite.

C_3. *Dacă $(S)_T^V$ satisface (β_1) relativ la mulţimea frontieră γ, iar $S - \gamma$ se descompune într-un număr finit de regiuni δ_i (sau, numai un număr finit de regiuni din $S - \gamma$, δ_i, sînt acoperite de V), oricare ar fi $a \in S$, mulţimea $T^{-1}(a)$ e formată din cel mult N puncte din V, unde $N = \max n_i$.*

O_2. Un exemplu în care γ e o mulţime frontieră, $S - \gamma$ constă din o infinitate de regiuni şi oricare ar fi N există puncte din S acoperite de mai mult de N ori, îl constituie suprafaţa riemanniană următoare : Fie S — planul complex (z), γ — mulţimea cercurilor $|z| = R_n$, pentru $\mathcal{R}_n$ un şir crescător de numere pozitive tinzînd către ∞, şi punctul $z = \infty$, iar V — suprafaţa constituită din o foaie peste $S - \{\infty\}$, la care racordăm peste $R_n < |z| < R_{n+1}$, n foi în lungul unei tăieturi ale cărei extremităţi interioare acestei coroane circulare sînt puncte de ramificare de ordinul n. Alegînd exhaustiunea lui V formată de $V_n = T^{-1}(|z| < R_n)$ se stabileşte imediat cu formula (1) că genul lui V_n este 0. Deci V are genul 0 şi o infinitate de elemente frontieră.

2. Fie din nou γ o mulţime închisă arbitrară din S, $\gamma \neq S$. Să notăm cu α şi α' elementele frontierei ideale a lui V respectiv S, [2][11]). În $\overline{S} = S \cup \cup \text{fr}\, S$[12]) mulţimea închisă $\gamma \cup \text{fr}\, S$ se descompune în componente conexe σ.

---

[10]) p. 114.

[11]) p. 85

[12]) Am notat cu $\overline{S}$ (respectiv $\overline{V}$) spaţiu topologic obţinut după H. Freudenthal prin completarea lui S (respectiv V) cu elementele sale frontieră [4], I, § 7, p. 26.

Spaţiul $\bar{S}$ fiind compact, două componente distincte σ_1 şi σ_2 se pot totdeauna separa printr-un compact din $S - \gamma$.

P$_4$. *Dacă P_n e un şir de puncte din V, tinzînd către un element frontieră α a lui V, şirul $p_n = T(P_n)$ tinde către o componentă bine determinată σ a mulţimii $\gamma \cup \mathrm{fr}\, S$.*

Propoziţia P$_4$ se stabileşte printr-un raţionament analog cu cel aplicat în [2][13]. Fie L un drum continuu din V trecînd succesiv prin punctele P_n şi tinzînd către α pe $\bar{V} = V \cup \mathrm{fr}\, V$. Dacă ar exista subşirurile $p_{n_{k'}}$ şi $p_{n_{k''}}$ tinzînd către componentele diferite ale mulţimii $\gamma \cup \mathrm{fr}\, S$: σ' şi σ'', proecţia $T(L)$ ar inters cta de o infinitate de ori un compact $k \subset S - \gamma$, ce separă σ' de σ'' pe $\bar{S}$. Cum fiecare punct din k are preimaginea finită după propoziţia P_2, ar exista pe L un şir P_n^* tinzînd către α, cu proecţii $p_n^* = T(P_n^*)$ diferite două cîte două, aparţinînd lui k, ceea ce contrazice (β_1).

C$_4$. *Propoziţia* P$_4$ *ne permite să stabilim o corespondenţă univocă de la mulţimea $\{\alpha\}$ a elementelor frontieră a lui V la mulţimea $\{\sigma\}$ a componentelor conexe din care e formată $\gamma \cup \mathrm{fr}\, S$ pe $\bar{S}$.*

O$_3$. Se ştie că în cazul acoperirilor parţial regulate $(S)_T^V$, dacă S are ordin de conexiune finit, iar V gen finit, atunci şi V are ordin de conexiune finit, [2][14]. Această proprietate nu se păstrează însă dacă renunţăm la condiţia (β_2), după cum arată următorul exemplu ce satisface proprietatea (β_1) relativ la o mulţime γ astfel încît $S - \gamma$ şi $\{\sigma\}$ cuprind un număr finit de componente conexe : S — planul complex (z), γ — circumferinţa $|z| = R$ $(0 < R < \infty)$, iar $(S)_T^V$ — suprafaţa riemanniană a funcţii $\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$, ($|a|, |b| < R$) din care s-a scos de pe una din foi domeniul de pe $|z| > R$, iar din cealaltă foaie, o mulţime închisă, infinită, total discontinuă de pe γ.

3. Vom analiza acum cazul important în aplicaţii, în care γ e format dintr-un număr finit de curbe jordaniene, disjuncte două cîte două şi un număr finit de arce simple[15]: fiecare jordanian pe S sau partea din S a unui arc jordanian de pe $\bar{S}$, a cărui intersecţie cu $\mathrm{fr}\, S$ este alcătuită din una sau ambele extremităţi. Admitem şi cazul cînd cele două extremităţi ale unui arc coincid. Intersecţia unui arc din γ cu alt arc sau curbă jordaniană din γ conţine cel mult extremităţile arcului. Numim *noduri* extremităţile arcelor din γ cuprinse în S[16]) şi notăm cu $\mathcal{N}$ mulţimea lor.

[13]) p. 129.

[14]) p. 129.

[15]) Convenim să numim arc simplu închis (arc jordanian) imaginea topologică a unui segment, arc simplu deschis (respectiv deschis la unul din capete) imaginea topologică a unui interval deschis (resp. deschis la o extremitate, închis la cealaltă) şi arc simplu unul oarecare din aceste arce.

[16]) Evident, fără a restrînge generalitatea putem înlătura prin înlocuirea cu o curbă jordaniană sau compunerea drumurilor, nodurile care sînt numai extremitate şi origina pentru acelaşi arc sau extremitate comună pentru două arce, fără ca să mai aparţină altor arce sau curbe din γ.

Cum arcele din γ nu-s totdeauna compacte în S, nu putem cere ca acoperirea $(S)_T^V$ să verifice (β_2), ci vom înlocui această condiţie cu proprietatea locală ($L\beta_2$) :

Fie p un punct din γ şi v o vecinătate a sa. Notăm cu k_{pv} componenta conexă ce conţine p, a mulţimii $\gamma \cap v$; k_{pv} este formată din p şi pentru fiecare arc de pe γ ce trece prin p, din subarcul deschis cuprins între p şi primul său punct de intersecţie cu $\mathrm{fr}\, v$.

Spunem că punctul p din γ are *proprietatea* ($L\beta_2$) dacă există o vecinătate $\tilde{v}$ a sa, astfel încît preimaginea mulţimii $k_{p\tilde{v}}$ să aibă componentele conexe relativ compacte în V sau să fie mulţimea vidă.

P$_5$. *Dacă p are proprietatea* ($L\beta_2$) *şi $T^{-1}(p) \neq 0$, fiecare componentă conexă a mulţimii $T^{-1}(k_{p\tilde{v}})$ conţine cel puţin un punct din $T^{-1}(p)$, deci $T^{-1}(k_{p\tilde{v}})$ are un număr finit de componente conexe.*

Fie K o componentă conexă din $T^{-1}(k_{p\tilde{v}})$, Q un punct din K, iar $q = T(Q)$. Considerăm un arc simplu închis l ce uneşte pe $k_{p\tilde{v}}$ punctele q şi p şi transportăm l din Q pe V. Dacă drumul continuu astfel obţinut L nu acopere p, există un prim punct r de la q la p neacoperit (eventual $r = p$). Conform proprietăţii ($L\beta_2$), drumul L este relativ compact pe V. Fie P_n un şir de puncte din L, pentru care $p_n = T(P_n)$ tind către r. Punctele P_n au cel puţin o limită R^*. Din continuitatea transformării T rezultă $T(R^*) = r$. Aplicînd teorema de inversiune a transformărilor interioare [2][17]), deducem că există vecinităţi $\mathcal{V}_{R^*}$ acoperind total v_r. Dacă $P_n \in \mathcal{V}_{R^*}$, iar arcul $p_n r$ e inclus în v_r, din P_n putem transporta acest arc într-un număr finit de modu i peste l, acoperind de fiecare dată r. Unul din aceste arce coincide cu L, ceea ce este absurd.

C$_5$. *Dacă γ e compact în S, proprietatea* (β_2) *este echivalentă cu* ($L\beta_2$) *pentru toate punctele lui* γ, căci γ se poate acoperi cu un număr finit de mulţimi $k_{p\tilde{v}}$.

Numim *excepţionale* punctele din γ, care nu au proprietatea ($L\beta_2$). Mulţimea $\mathcal{E}$ a acestor puncte este *închisă* în S, deoarece dacă p are proprietatea ($L\beta_2$), orice $q \in k_{p\tilde{v}}$ are aceiaşi proprietate. În mod analog, putem defini pentru orice submulţime $\gamma^* \subset \gamma$ cu aceleaşi proprietăţi ca şi γ, în particular pentru cu be jordaniene sau arce din γ, puncte *excepţionale* relativ la γ^*, înlocuind γ cu γ^*. Fie $\mathcal{E}_{\gamma^*}$ mulţimea acestor puncte. Evident $\mathcal{E} = \bigcup_{\gamma^*} \mathcal{E}_{\gamma^*}$, reuniunea fiind extinsă asupra tuturor curbelor sau arcelor γ^* din γ.

O$_4$. *Dacă $p \in \bar{\mathcal{E}}$, există o vecinătate a sa w, astfel încît*

1. *regiunile maxime ale ei relativ la puncte din $T^{-1}(p)$ să fie relativ compacte în V*[18]), *şi*

2. *$T^{-1}(k_{pw})$ să aibă componentele conexe relativ compacte în V.*

[17]) p. 114

[18]) Observaţia O$_{4,1}$ este o consecinţă a teoremei de inversiune şi, e valabilă pentru orice acoperire $(S)_T^V$, dacă $T^{-1}(p)$ e o mulţime finită.

P_6. *Orice subarc* $l \subset \gamma - \mathcal{E}$ *este acoperit total de fiecare componentă conexă a preimaginii sale; fiecare acoperă orice punct din* l *cu acelaşi număr de puncte, iar* V *acoperă* l *cu un număr* s *de foi.*

Fie p_0 şi p două puncte din l, iar l^* un arc jordanian unind pe l, p_0 cu p. Acoperim l^* cu un număr finit de vecinătăţi w_j relativ la punctele $p_0, p_1, \ldots, p_N = p$ conform observaţiei O_4. Din P_5 rezultă însă că reuniunea regiunilor maxime ale vecinătăţilor w_j în raport cu punctele din $\bigcup_{j=0}^{N} T^{-1}(p_j)$ include $T^{-1}(l^*)$. Dar orice componentă conexă a reuniunii acestor regiuni acoperă total regiunea $\bigcup_{j=0}^{N} w_j$ deci l^* este acoperit total de V cu s foi, s fiind numărul punctelor din $T^{-1}(p_0)$ socotite cu ordinul de multiplicitate respectiv. Cum p este arbitrar în l, proprietatea P_6 este demonstrată.

P_7. *Cînd transportăm un arc simplu* l *de pe* γ *pe* V, *dacă* L *este un drum continuu astfel obţinut,* L *acoperă total* l *sau tinde către* fr V (şi anume către un element bine determinat din fr V). *In ultimul caz, există un punct* $r \in l \cap \mathcal{E}$ *astfel încît pentru orice şir* $R_n \in L$, *tinzînd către* fr V *şirul* $r_n = T(R_n)$ *să tindă către* r.

Propoziţia se stabileşte în mod analog cu P_5, observînd că în cazul cînd L nu ar acoperi total l şi nu ar tinde către fr V, ar exista un prim punct r neacoperit pe l şi un şir $R_n \in L$, tinzînd către un punct $R \in V$, în timp ce r_n tind către r, deci $T(R) = r$.

P_8. *Dacă* $p \in \mathcal{E}$, *pentru fiecare vecinătate a sa* v, *există cel puţin un arc simplu deschis la o extremitate, necompact* L *din* $T^{-1}(\gamma \cap v)$, *astfel încît cînd punctul* $\widetilde{P}$ *din* L *tinde către* fr. V, *proiecţia sa* $\widetilde{p}$ *tinde către un punct excepţional bine determinat* $r \in \gamma \cap v$. (Eventual $r = p$).

Într-adevăr, pentru orice vecinătate v, $T^{-1}(k_{pv})$ are o componentă conexă necompactă. Mulţimea k_{pv} fiind formată dintr-un număr finit de arce simple, unul din ele cel puţin, fie l, are o componentă conexă a mulţimii $T^{-1}(l)$ necompactă. Folosind P_7, deducem atunci existenţa arcului L şi a lui r.

P_9. *Fie* L *un arc simplu din* $T^{-1}(\gamma)$ *imaginea topologică a intervalului* $0 \leq t < 1$. *Atunci atît* L *cît şi drumul continuu* $T(L)$ *tind către un punct bine determinat din* $\overline{V}$ *respectiv* $\overline{S}$, *cînd* t *tinde către* 1.

Dacă $T(L)$ ar avea două puncte limită [19] pe $\overline{S}$, pe orice compact din S ce le separă, ar exista un punct limită, deci putem presupune cele două puncte q_1 şi q_2 pe S. Evident q_1 şi $q_2 \in \gamma$. Fie v o vecinătate a lui q_1, care nu conţine q_2, iar P_{hn} $(h = 1, 2)$ şiruri de puncte de valori t_{hn} crescînd către 1 cu proprietatea $t_{1n} < t_{2n} < t_{1n+1}$ astfel încît $p_{1n} \in v$, iar $p_{2n} \overline{\in} v$. După teorema lui Hahn şi Mazurkiewicz, pentru n suficient de mare, $p_{1n} \in k_{q_1 v}$, deci între p_{1n} şi p_{2n}, $T(L)$ va intersecta odată frontiera lui $k_{q_1 v}$, care constă dintr-un număr finit de puncte. Pe V ar exista atunci o infinitate de puncte cu proecţia în unul din aceste puncte, ceea ce contrazice C_2. În concluzie, $T(L)$ are extremităţi bine determinate pe $\overline{S}$. Drumul L nu poate avea nici el două puncte limită pe $\overline{V}$, căci ar exista o infinitate de puncte limită pe V, proectate în acelaşi punct din S (punctul limită a lui $T(L)$). Prin urmare, L se va termina într-un punct bine determinat din $\overline{V}$.

[19] Prin punct limită înţelegem un punct p astfel încît există şirurile t_n tinzînd către 1 şi $p(t_n)$ din $T(L)$ tinzînd către p.

O_5. *Pe* $T^{-1}(\gamma)$ *există un număr finit de arce* L *simple închise disjuncte două cîte două, care nu se mai pot prelungi pe* $T^{-1}(\gamma)$ *în una din extremităţile lor,* $Q \in V$. Într-adevăr, $T(Q)$ este un nod din γ, care e extremitate a unui singur arc din γ fără să fie şi origină pentru acest arc sau să aparţină unei curbe jordaniene din γ. Există însă un număr finit de astfel de noduri, iar preimaginea lor e finită.

4. P_{10}. *Fie* $(S)_T^V$ *o acoperire cu proprietatea* (β_1) *relativ la o mulţime* γ *de tipul considerat la nr.* **3**. *Dacă* V *are caracteristică finită, există un număr finit de puncte excepţionale pe* γ.

În cazul contrar ar exista un arc l din $\gamma - \mathcal{H}$ conţinînd o infinitate de puncte excepţionale p_n. Putem presupune (extrăgînd eventual un subşir şi schimbînd numerotarea) că p_n formează un şir tinzînd monoton către un punct π din $\overline{S}$. Pentru fiecare arc $p_{2n-1}\, p_{2n+1}$ există, conform propoziţiei P_8, un arc simplu L_n necompact în V cu o extremitate într-un punct din V şi cealaltă într-un punct din fr V şi a cărei proecţie cînd ne apropiem de fr V tinde către un punct excepţional r_n de pe arcul deschis $p_{2n-1}\, p_{2n+1}$ Două arce L_n sînt evident disjuncte.

Conform consecinţei C_3, mulţimea $V - T^{-1}(\gamma)$ cuprinde un număr finit de regiuni. De aci rezultă că $T^{-1}(\gamma)$ nu poate fi formată dintr-o infinitate de componente conexe diferite. Într-adevăr, în cazul contrar, ar exista după O_5 o infinitate de componente distincte fără arce simple terminate în puncte din V. Dar pe o astfel de componentă sau putem considera un circuit sau putem alege un arc simplu necompact în ambele capete, care după propoziţia P_9 se va termina în puncte din fr V, deci va fi o transversală pe V. Pe V am avea deci o infinitate de circuite sau transversale, situate pe $T^{-1}(\gamma)$ şi disjuncte două cîte două, care ar împărţi V într-o infinitate de regiuni, deoarece caracteristica lui V este finită [20]).

Prin urmare, o infinitate de arce L_n se găsesc pe aceeaşi componentă conexă din $T^{-1}(\gamma)$ şi cum V are un număr finit de elemente frontieră, putem presupune că duc la acelaşi element α. Să considerăm V pe un tor generalizat, iar α fie un punct din acest tor. În vecinătatea parametrică a lui α : $|z| \to 1$, $\alpha \leftrightarrow 0$, orice curbă jordaniană c_r corespunzătoare unui cerc $|z| = r$ intersectează un număr finit de L_n, deoarece altfel atît ea cît şi curbele c_ρ, $\rho \to r$, ar conţine un punct din $T^{-1}(\pi)$, ceea ce contrazice

[20] Pentru demonstrare folosim teorema de adunare a caracteristicilor [5].

consecința C_2. Luînd un șir descrescător $r_\nu \downarrow 0$, ales astfel încît c_{r_ν} să intersecteze cel puțin un L neconsiderat în etapele anterioare și interpretînd succesiv L_n ce intersectează c_{r_ν} ca transversale în regiuni deja formate în interiorul lui c_{r_1} prin tăiere în lungul arcelor L_n considerate anterior, stabilim[21] că $\{L_n\}$ separă în interiorul lui c_{r_1} o infinitate de regiuni simple conexe, disjuncte două cîte două din V, ceea ce este absurd. Prin urmare nu pot exista o infinitate de arce L_n, deci avem numai un număr finit de puncte excepționale pe γ.

C_6. *In condițiile propoziției* P_{10}, *suprafața riemanniană* $(S)_T^V$ *are un număr finit de puncte de ramificare.*

Într-adevăr, $T^{-1}(\gamma)$ descompune V într-un număr finit de regiuni Δ fiecare acoperind total o regiune $T(\Delta) = \delta$ din $S - \gamma$. Mulțimea $T^{-1}(\gamma)$ nu poate avea o infinitate de componente conexe și pe ea nu se pot considera o infinitate de circuite, de transversale sau de arce terminate[22] în puncte din V sau cu o extremitate într-un punct din V, cealaltă într-un punct din fr V[23] cum rezultă în mod analog ca în demonstrația propoziției P_{10}. Deci, pe γ se proectează un număr finit de puncte de ramificare. Atunci, fiecare Δ are caracteristica finită și acoperirea $(\delta)_T^\Delta$ un număr finit de puncte de ramificare[24].

P_{11}. *Fie* $(S)_T^V$ *o acoperire cu proprietățile* (β_1) *relativ la o mulțime* γ *de tipul considerat la nr.* **3** *și* $(L\beta_2)$ *exceptînd un număr finit de puncte din* γ. *Dacă* S *are caracteristică finită, iar* V *gen finit, atunci* $(S)_T^V$ *are un număr finit de puncte de ramificare și* V *un număr finit de elemente frontieră.*

În fiecare regiune $\delta \subset S - \gamma$ se proectează un număr finit de ramificări, conform propoziției P_1, consecinței C_1 și propoziției din [2][25], deoarece δ are caracteristică finită și regiunile sale maxime au gen finit. Pe fiecare arc simplu l în care se descompune $\gamma - (\mathcal{E} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{M})$ (unde $\mathcal{M}$ e o mulțime formată din cîte un punct pe fiecare curbă jordaniană din γ, disjunctă față de $\mathcal{E} \cup \mathcal{N}$) se proectează însă de asemenea un număr finit de ramificări. Într-adevăr, l e pe frontiera a două regiuni δ' și δ'' sau a unei singure regiuni δ din $S - \gamma$. În δ' și δ'', respectiv δ de ambele părți ale lui l, putem construi arcele simple l' și l'' cu aceleași extremități ca și l, suficient de apropiate de l ca regiunile limitate de l și l', respectiv l și l'' în δ', δ'' sau δ să fie simplu conexe și închiderile lor relativ la δ', δ'' respectiv δ să nu conțină proecția nici unui punct de ramificare din $(S)_T^V$. Fie d regiunea simplu conexă limitată de l' și l'' și conținînd l. Regiunile maxime ale lui d relativ la puncte din $T^{-1}(p_0)$ cu $p_0 \in l$ acoperă total d, deci ca și mai sus, conțin un număr finit de puncte de ramificare. Însă ele sînt în număr finit.

---

[21]) Folosim din nou teorema de adunare a caracteristicilor.
[22]) În sensul observației O_5.
[23]) Arce analoage cu L_n din demonstrația propoziției P_{10}.
[24]) Rezultă de asemenea și că $T(V)$ are caracteristică finită.
[25]) p. 129.

Dacă V ar avea o infinitate de elemente frontieră, ar exista o regiune Δ din $V - T^{-1}(\gamma)$ de gen finit, dar cu o infinitate de elemente frontieră, deoarece $T^{-1}(\gamma)$ cuprinde un număr finit de curbe jordaniene sau arce simple, două avînd în comun cel mult extremitățile. Dar aceasta este absurd, căci $\delta = T(\Delta)$ are caracteristică finită și este acoperit total de Δ.

În cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{R}$ mulțimea punctelor de ramificare.

II

GENERALIZAREA FORMULEI LUI S. STOILOW.

5. În această secțiune considerăm acoperirea $(S)_T^V$ cu proprietatea (β_1) relativ la o mulțime γ de tipul analizat la nr. **3**, în cazul cînd V are caracteristică finită.

Conform propoziției P_{10} și consecinței C_6, mulțimile $\mathcal{N}$, $\mathcal{E}$ și $\mathcal{R}$ sînt finite. Notăm cu γ' o mulțime de curbe jordaniene de pe γ, disjuncte două cîte două, conținînd toate curbele jordaniene din $\gamma - (\mathcal{E} \cup \mathcal{N})$ și numim *circuite* curbele din γ'. Mulțimea $\mathcal{E}_{\gamma'}$ a punctelor excepționale relativ la aceste circuite, dacă există, descompune unele sau chiar toate circuitele în subarce simple. De asemenea mulțimea $\mathcal{E} \cup \mathcal{N}$ descompune $\gamma - \gamma'$ în subarce simple. Notăm mulțimea tuturor acestor subarce cu γ'' și le numim convențional *transversale*. O transversală poate avea în comun cu alta sau cu un circuit cel mult extremitățile; ea este fie un arc jordanian pe S, fie un arc simplu deschis la una sau ambele extremități, care sînt elemente din fr S.

Fie δ_i regiunile în care se descompune $S - \gamma$ și peste care V are $n_i \neq 0$ foi, ρ_i caracteristica lui δ_i (finită, conform consecinței C_6), s_j numărul foilor lui V peste transversala γ_j'' din γ, (conform propoziției P_6) și ν_k numărul punctelor din V ce se proectează peste un punct $p_k \in \mathcal{E}_{\gamma'} \cup [(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}) - \gamma']$, socotite cu ordinul lor de multiplicitate.

TEOREMĂ *Dacă suprafața riemaniană* $(S)_T^V$ *are proprietatea* (β_1) *relativ la mulțimea* γ *(nr.* 3*) și dacă* V *are caracteristică finită, ordinul total de ramificare al acoperirii este*

$$r = \rho - \sum_i n_i \rho_i - \sum_j s_j + \sum_k \nu_k, \tag{2}$$

unde ρ *este caracteristica lui* V, *iar* ρ_i, n_i, s_j *și* ν_k *au semificațiile de mai sus: sumele fiind extinse la toate regiunile* δ_i *din* $(S - \gamma) \cap T(V)$, *transversalele* γ_j'' *din* γ'' *respectiv punctele* $p_k \in \mathcal{E}_{\gamma'} \cup [(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}) - \gamma']$.

Dacă γ constă numai din circuite și nu există puncte excepționale, (2) devine formula (1) stabilită de S. Stoilow.

Pentru a demonstra formula (2) vom folosi formula de adunare a caracteristicilor lui L. Ahlfors [5].

6. Analizăm mai întîi cazul: $\mathcal{E} \cup \mathcal{N} \subset \gamma'$, $\mathcal{R} \cap \gamma = 0$.

Preimaginea fiecărui circuit pe care nu există puncte excepționale relativ la el este formată dintr-un număr finit de circuite, disjuncte două cîte două. Aceasta rezultă din propoziția P_6, printr-un raționament analog cu cel aplicat în [2] [26]).

Dimpotrivă dacă pe un circuit γ'_h se găsesc puncte excepționale relativ la el, $T^{-1}(\gamma'_h)$ constă din circuite și transversale [27]) (cel puțin una) pe V, disjuncte două cîte două, conform propozițiilor P_6 și P_7. Ne propunem să evaluăm numărul acestor transversale. Dacă pe γ'_h se găsesc $m \geqq 1$ puncte din $\mathcal{E}_{\gamma'_h}$: p_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ circuitul γ'_h este descompus în m transversale γ''_k ; presupunem p_k și p_{k+1} extremitățile lui γ''_k.[28]) Preimaginea fiecărui γ''_k considerat ca arc deschis, constă din s_k arce simple Γ_{ki}. Arcele Γ_{ki} sînt disjuncte două cîte două și au extremități în puncte din $\bigcup_k T^{-1}(p_k)$ sau din fr. V. Fiecare punct din $\bigcup_k T^{-1}(p_k)$ este extremitate la două arce unul peste γ''_{k-1}, altul peste γ''_k. Prin urmare, $\nu_k \leqq s_k$ și s_{k-1}. Să considerăm unul din arcele Γ_{ki}. Dacă atunci cînd $p \in \gamma''_k$ tinde către p_k, preimaginea sa $P_i \in \Gamma_{ki}$ tinde către fr V, atunci Γ_{ki} contribuie cu o unitate în s_k dar nu contribuie în ν_k, în timp ce dacă P_i tinde către un punct $P_{k_j} \in T^{-1}(p_k)$ în s_k și ν_k intervine cîte o unitate provenind din Γ_{ki}, sespectiv P_{k_j}. Diferența $s_k - \nu_k$ arată deci cîte transversale din $T^{-1}(\gamma'_h)$ au ca proecție un arc ce se termină în p_k, venind dinspre γ''_k. Analog, diferența $s_{k-1} - \nu_k$ dă numărul transversalelor din $T^{-1}(\gamma'_h)$ a căror proecție se termină în p_k, venind dinspre γ''_{k-1}. Dar orice transversală din $T^{-1}(\gamma'_h)$ are două extremități, fiecare proectată într-un punct p_k, deci numărul transversalelor din $T^{-1}(\gamma'_h)$ este :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(s_k + s_{k-1} - 2\nu_k) = \sum_{k=1}^{m} s_k - \sum_{k=1}^{m} \nu_k . \text{ [29])}$$

Același raționament se aplică tuturor circuitelor din γ'. În concluzie, $T^{-1}(\gamma')$ cuprinde $\sum_j{}' s_j - \sum_k \nu_k$ transversale unde prima sumă este extinsă la toate transversalele de pe circuite, iar a doua la toate punctele excepționale.

Să tăiem S în lungul circuitelor γ' și V în lungul circuitelor și transversalelor din $T^{-1}(\gamma')$. Obținem astfel din S regiunile S_l iar din V regiunile V_u de caracteristică ρ^u finită. Din formula de adunare a caracteristicilor rezultă

$$\rho = \sum_u \rho^u + \sum_j{}' s_i - \sum_k \nu_k . \tag{3}$$

[26]) p. 114 — 115,

[27]) Am numit arcele din γ'' transversale, numai datorită legăturii lor cu transversalele propriu-zise de pe V.

[28]) Dacă este necesar, schimbăm numerotarea punctelor p_k și arcelor γ''_k. În această demonstrație, indicii sînt luați modulo m.

[29]) Dacă $m = 1$ raționamentul rămîne valabil, indicii fiind luați modulo 1.

În S_l arcele simple γ''_j rămase din γ sînt efectiv transversale. Preimaginea arcului γ''_j este formată din s_j arce simple, disjuncte două cîte două, fiecare avînd extremitățile fie pe fr V fie pe $T^{-1}(\gamma')$, deci $T^{-1}(\gamma''_j)$ este formată din s_j transversale disjuncte din $\bigcup_u V_u$.

Să tăiem $\bigcup_l S_l$ în lungul tuturor transversalelor din $\gamma'' - \gamma'$ și $\bigcup_u V_u$ în lungul preimaginilor lor. Obținem astfel regiunile δ_i din $T(V) - \gamma$ și regiunile Δ^u_{il} din $V_u \cap T^{-1}(\delta_i)$, de caracterisitică ρ^u_{il} și acoperind δ cu n^u_{il} foi.

Aplicînd din nou formula de adunare a caracteristicilor și ținînd seama că numărul total al transversalelor cu care am tăiat suprafețele V_u este $\sum_j{}'' s_j$, unde suma este relativă la toate transversalele din $\gamma'' - \gamma'$, putem scrie :

$$\sum_u \rho^u = \sum_{ilu} \rho^u_{il} + \sum_j{}'' s_j . \tag{4}$$

Din (3) și (4) rezultă :

$$\rho = \sum_{ilu} \rho^u_{il} + \sum_j s_j - \sum_k \nu_k , \tag{5}$$

suma a doua fiind extinsă la toate transversalele din γ''.

Fie r^u_{il} ordinul de ramificare al acoperirii $(\delta_i)^{\Delta^u_{il}}_T$. După formula lui Hurwitz, [2] [30]) avem

$$r^u_{il} = \rho^u_{il} - n^u_{il}\,\rho_i . \tag{6}$$

Însă $r = \sum_{ilu} r^u_{il}$ și $n_i = \sum_{lu} n^u_{il}$, deci din (5) și (6), obținem (2).

7. Vom analiza acum, revenind la condițiile generale din teorema enunțată la nr. 5, proprietățile locale ale acoperirii $(S)^V_T$ în vecinătatea unui punct $a \in \gamma$. Fie v o vecinătate a lui a, limitată de o curbă jordaniană c, suficient de restrînsă, astfel ca în $\overline{v}$ să nu se găsească nici un punct din $\mathcal{E} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{R}$ diferit de a și astfel ca $\overline{v} \cap \gamma$ să fie formată din $N(\geqq 1)$ arce jordaniene cu o extremitae în a și cealaltă pe c, al căror unic punct comun este extremitatea din a și care împart v în N sectoare. Mai mult, alegem v astfel încît componentele conexe necompacte $\mathcal{V}$ din $T^{-1}(v)$ să nu conțină puncte din $T^{-1}(a)$ ceea ce este posibil după O_{41}.

Acoperirea $(S)^{\mathcal{V}}_T$ satisface (β_1) relativ la $v \cap \gamma \cup c$ după cum se verifică imediat, folosind ipotezele teoremei noastre și proprietățile domeniilor maxime [2] [31]). Notăm cu d_i sectoarele în care γ descompune v, și cu a_i extremitățile arcelor din $\gamma \cap v$, de pe c : arcul $a\,a_i$ separă sectoarele d_{i-1} și d_i $(i=1, \ldots, N \pmod N)$. După P_1 și P_6, fiecare d_i este acoperit de $\mathcal{V}$ cu m_i $(\geqq 0)$ foi și fiecare arc $a\,a_i$ cu t_i $(\geqq 0)$ foi. Din proprietățile trans-

[30]) p. 132.

[31]) p. 108—109.

formărilor interioare, rezultă $t_i \leqq m_{i-1}$ și m_i. Acoperirea $(S)_T^{\mathcal{V}}$ nu prezintă ramificări.

P_{12}. *$\mathcal{V}$ este sau simplu conex, separat de $V - \mathcal{V}$ printr-o transversală $\mathcal{C}$ sau dublu conex, cu frontiera formată dintr-un element din* fr V *și un circuit $\mathcal{C}$ de pe V.*

Alegem $m_1 = \max\limits_i m_i$ ($\geqq 1$) și distingem trei posibilități, dacă $N \geqq 2$:

$$1) \quad t_1 = t_2 = 0.$$

Atunci $\mathcal{V}$ acoperă doar primul sector, total și fără ramificări, deci este simplu conex și separat de $V - \mathcal{V}$ printr-un arc simplu $\mathcal{C}$ proiectat peste arcul $a_1\, a_2$ de pe c din frontiera lui d_1.

$$2) \quad t_1 = 0, \ t_2 \neq 0.$$

Luăm pe $\overline{v} \cap \gamma \cup c$ ca circuit fr $(v - \overline{d}_1)$, cu punctele a și a_2 excepționale, pentru care $\nu = 0$ și transversalele $a\, a_3 \ldots a\, a_N$ (și $a_1\, a_2$ cu $s = 0$). Formula (2) se aplică deoarece sîntem în cazul considerat în nr. **6** și notînd cu $\rho_{\mathcal{V}}$ caracteristica lui $\mathcal{V}$, care este finită conform propoziției P_{11} aplicată acoperirii $(v)_T^{\mathcal{V}}$, putem scrie :

$$0 = \rho_{\mathcal{V}} + \sum_{i=1}^{N} m_i - \sum_{i=2}^{N} t_i,$$

de unde rezultă că $\rho_{\mathcal{V}} = -1$. $\mathcal{V}$ acoperă cu o foaie un număr ($\leqq N$) de sectoare adiacente din v.

$$3) \quad t_1 \neq 0, \ t_2 \neq 0.$$

Luăm din nou ca circuit fr $(v - \overline{d}_1)$ care prezintă acum punctele excepționale a, a_1 și a_2 cu $\nu = 0$. Formula (2), nr. **6**. ne dă :

$$0 = \rho_{\mathcal{V}} + \sum_{i=1}^{N} m_i - \sum_{i=1}^{N} t_i$$

de unde $\rho_{\mathcal{V}} = 0$ sau -1. În primul caz, $\mathcal{V}$ acoperă total și neramificat $v - \{a\}$, are pe frontieră un element din fr V și ca frontieră relativă la V un circuit $\mathcal{C}$ peste c. În cazul al doilea, un sector din v (realizat eventual prin gruparea mai multor sectoare adiacente din $v - \gamma$) este acoperit de m_1 ori, iar complementul său în raport cu v (care se poate reduce și la un arc $a\, a_i$) este acoperit de $m_1 - 1$ ori ; frontiera relativă a lui $\mathcal{V}$ pe V este în acest caz o transversală $\mathcal{C}$ din V, cu proecția pe c.

Dacă $N = 1$, adăugînd la arcul $a\, a_1$ din $v \cap \gamma$ un arc auxiliar $a\, a_2^*$, $(a_2^* \neq a_1,\ a_2^* \in c)$ putem repeta discuția de mai sus.

8. Folosind P_{12}, vom demonstra teorema dela nr. **5** în forma generală. Să notăm cu $\mathcal{R}^* = (\mathcal{R} \cap \gamma) - (\mathcal{E} \cup \mathcal{N})$ și să izolăm punctele $p_k \in \mathcal{E} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{R}^*$

prin regiuni v_k cu proprietățile indicate la nr. **7** și astfel încît $\overline{v}_{k_1} \cap \overline{v}_{k_2} = 0$ pentru $k_1 \neq k_2$. Fie $\widetilde{V}$ suprafața obținută din V extrăgînd domeniile maxime necompacte ale domeniilor $\overline{v}_k$. Acoperirea $(S)_T^{\widetilde{V}}$ are proprietatea (β_1) relativ la $\widetilde{\gamma} = \bigcup\limits_k c_k \cup (\gamma - \bigcup\limits_k v_k)$, unde am notat cu $c_k =$ fr v_k și i se poate aplica formula (2), deoarece satisface condițiile dela nr. **6**. Într-adevăr, pe $\widetilde{\gamma}$ nu se proiectează puncte de ramificare ale acoperirii. Considerăm drept circuite pe $\widetilde{\gamma}$ curbele c_k și circuitele γ' din γ, care nu intersectează mulțimea $\mathcal{E} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{R}^*$. Toate celelalte arce din $\widetilde{\gamma}$ sînt transversale. Prin construcție, pe circuitele din $\widetilde{\gamma}$ nu se află puncte excepționale relativ la ele ; de asemenea pe transversalele din $\widetilde{\gamma}$ nu avem puncte excepționale sau noduri. Să aplicăm deci acoperirii $(S)_T^{\widetilde{V}}$ formula (2). Ținînd seama că punctele de ramificare ale acoperirilor $(S)_T^{V}$ și $(S)_T^{\widetilde{V}}$ sînt aceleași și că V și $\widetilde{V}$ au aceeași caracteristică, după cum rezultă din P_{11} și din teorema de adunare a caracteristicelor, avem

$$r = \rho - \sum_{\lambda} \widetilde{n}_\lambda\, \widetilde{\rho}_\lambda - \sum_{\mu} \widetilde{s}_\mu, \tag{7}$$

unde $\widetilde{\delta}_\lambda$ reprezintă regiunile din $T(\widetilde{V}) - \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{n}_\lambda$ numărul foilor lui $\widetilde{V}$ peste $\widetilde{\delta}_\lambda$, $\widetilde{\rho}_\lambda$ caracteristica lui $\widetilde{\delta}_\lambda$, $\widetilde{\gamma}''_\mu$ transversalele din $\widetilde{\gamma}$, iar $\widetilde{s}_\mu$ numărul foilor lui $\widetilde{V}$ peste $\widetilde{\gamma}''_\mu$.

Să remarcăm că fiecare regiune δ_i din $T(V) - \gamma$ corespunde unei singure regiuni $\widetilde{\delta}_\lambda$; δ_i și $\widetilde{\delta}_\lambda$ diferă printr-un număr finit de sectoare din v_k, simplu conexe, disjuncte între ele, fiecare separat de $\widetilde{\delta}_\lambda$ printr-o transversală din δ_i, prin urmare, $\rho_i = \widetilde{\rho}_\lambda$; de asemenea $n_i = \widetilde{n}_\lambda$. Celelalte regiuni $\widetilde{\delta}_\lambda$ coincid fiecare cu cîte un v_k ; pentru ele $\widetilde{\rho}_\lambda = -1$, iar $\widetilde{n}_\lambda = \nu_k$. Rezultă deci :

$$\sum_{\lambda} \widetilde{n}_\lambda \widetilde{\rho}_\lambda = \sum_{i} n_i\, \rho_i - \sum_{p_k \in \mathcal{E} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{R}^*} \nu_k. \tag{8}$$

Orice transversală $\widetilde{\gamma}''_\mu$ provine dintr-un γ''_j sau un γ'_h.

În primul caz, după cum γ''_j este pe un arc sau pe un circuit din γ', γ''_j poate conține puncte de ramificare respectiv puncte de ramificare și noduri (care pot fi eventual excepționale dar nu pentru γ'_h ce include γ''_j). Fie N''_j numărul acestor puncte și p_k unul dintre ele. Atunci γ''_j se descompune în $N''_j + 1$ arce $\widetilde{\gamma}''_\mu$, pentru care $\widetilde{s}_\mu = s_j$, iar $\nu_k = s_j$. Deci $\Sigma\, \widetilde{s}_\mu$ extinsă la aceste arce $\widetilde{\gamma}''_\mu$ este egală cu $\sum\limits_j s_j\, (N''_\mu + 1) = \sum\limits_j s_j + \sum\limits_{p_k \in M_1} \nu_k$, unde M_1

conține punctele din $\mathcal{R}^*$ interioare arcelor din γ'' și nodurile de pe curbele γ'_h care nu aparțin lui $\mathcal{E}_{\gamma'}$, pentru curbele γ'_h din γ', care intersectează $\mathcal{E}_{\gamma'}$.

În cazul al doilea, să presupunem că circuitul γ'_h pe care se află $\tilde{\gamma}''_\mu$ conține N'_h puncte de ramificare sau noduri (care nu aparțin lui $\mathcal{E}_{\gamma'_h}$) și că este acoperit de s'_h foi. Prin urmare, pe γ'_h există N'_h transversale $\tilde{\gamma}''_\mu$ cu $\tilde{s}_\mu = s'_h$ și N'_h puncte p_k cu $\nu_k = s'_h$. Atunci $\sum \tilde{s}_\mu$ extinsă la arce $\tilde{\gamma}''_\mu$ din această a doua categorie este egală cu $\sum\limits_{\gamma'_h} N'_h s'_h = \sum\limits_{p_k \in M_2} \nu_k$, unde M_2 conține punctele din $\mathcal{R}^*$ și nodurile de pe curbele γ'_h din γ', ce nu intersectează $\mathcal{E}_{\gamma'}$.

În concluzie, $M_1 \cup M_2$ conține $\mathcal{R}^*$ și nodurile de pe γ', care nu aparțin mulțimii $\mathcal{E}_{\gamma'}$, și cum $(\mathcal{E} \cap \gamma') - \mathcal{E}_{\gamma'} \subset \mathcal{N} \cap \gamma'$, rezultă că

$$(\mathcal{R}^* \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{N}) - (M_1 \cup M_2) = \mathcal{E}_{\gamma'} \cup [(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}) - \gamma']$$

Prin urmare,

$$\sum_\mu \tilde{s}_\mu = \sum_j s_j + \sum_k \nu_k, \tag{9}$$

unde $\sum\limits_k \nu_k$ se referă la punctele $p_k \in \mathcal{E}_{\gamma'} \cup [(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}) - \gamma']$.

Relațiile (7), (8) și (9) implică însă (2).

9. O_6. În formula (2) putem considera toate punctele $p_k \in \mathcal{E} \cup (\mathcal{N} - \gamma')$, dar trebuie să socotim și transversalele noi ce apar în acest mod pe unele circuite γ'.

Alegerea circuitelor γ' poate fi efectuată în general în moduri diferite. Putem alege un sistem maximal de circuite pe care să nu existe puncte excepționale relativ la ele. Arcele și celelalte curbe jordaniene din γ se descompun în transversale. În acest caz $\gamma' \cap \gamma'' = 0$.

O_7. Printr-un raționament analog cu cel folosit la nr. **6** pentru evaluarea transverselor de pe circuite, rezultă că un punct este excepțional pentru un arc simplu de pe γ cu o extremitate în acel punct, dacă și numai dacă numărul punctelor din preimaginea sa este mai mic decît numărul foilor ce acoperă arcul.

O_8. Dacă în teorema dela nr. **5** adăugăm și ipoteza ca S să aibă caracteristică finită putem considera în (2) toate regiunile din $S - \gamma$, fiecare avînd caracteristică finită. Evident, numai cele din $T(V)$ vor aduce însă o contribuție efectivă.

10. Importanța formulei (2) stabilită în această lucrare constă în valabilitatea ei pentru acoperirile realizate de domenii poliedrice dintr-o suprafață riemanniană oarecare pe suprafața de bază sau suprafața acoperită de ele. Vom putea evalua ramificarea suprafețelor deschise generale, aplicînd formula (2) domeniilor poliedrice ale unui șir de exhaustiune, ceea ce este necesar în diferite probleme de teoria repartiției valorilor, problema tipului și altele. Odată stabilită pe această cale ramificarea anumitor tipuri

de suprafețe riemanniene deschise, vom putea trage concluzii relativ la suprafețele ce admit exhaustiuni prin astfel de suprafețe deschise. În particular, metoda e aplicabilă diferitelor clase ale lui L. I. V o l k o v î s k i, [6] [32], de suprafețe cu puncte de ramificare care se apropie.

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ С. СТОЙЛОВА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В случае нормально исчерпываемых римановых поверхностей [1], максимальные области ([2], стр. 108) всякой области основной поверхности, рассмотренные как поверхности наложения, являются тоже нормально исчерпываемыми. Аналогичное свойство не верно для частично регулярно исчерпываемых поверхностей [3]. Поэтому, в настоящей работе мы обобщим определение частично регулярного наложения ([2], стр. 135).

Риманова поверхность $(S)^V_T$ (где T — внутреннее отображение: $V \to S$) удовлетворяет условие (β_1) относительно замкнутого множества $\gamma \subset S$, $\gamma \neq S$ если для каждой последовательности $P_n \in V$ без предельных точек в V, последовательность $p_n = T(R)$ не имеет предельных точек в $S - \gamma$

Во-первых мы доказываем некоторые свойства этих поверхностей $(S)^V_T$. Например: каждая максимальная область подобласти $\delta \subset S - \gamma$ покрывает δ тотально ([2], стр. 132); всякая точка $a \in \overline{S - \gamma}$ имеет конечное число прообразов, и т.д.

В следующем, допускаем что γ состоит из конечного числа жордановых кривых попарно непересекающихся, и жордановых дуг с определенными концами в точках или в граничных элементах поверхности S. Концы принадлежащие S назовем узлами и обозначим их множество через $\mathcal{N}$. По предположению, пересечение одной дуги из γ с другой или с кривой из γ содержится в $\mathcal{N}$. Точка $p \in \gamma$ удовлетворяет свойство $(L\beta_2)$ если существует своя окрестность v так чтобы прообраз связной компонентой множества $v \cap \gamma$ которая содержит p, был бы компактном относительно V или пустым.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество точек $p \in \gamma$ неудовлетворяющих свойство $(L\beta_2)$. Если $(S)^V_T$ проверяет условие (β_1) и V имеет конечную характеристику ρ, тогда $\mathcal{E}$ конечное множество. Пусть γ' множество жордановых криывх попарно непересекающихся из γ, которое содержит все жордановые кривые из $\gamma - (\mathcal{E} \cup \mathcal{N})$ и $\mathcal{E}_{\gamma'}$ множество точек $p \in \gamma'$ неудовлетворяющих $(L\beta_2)$ относительно γ'. Обозначим через γ''_j простые дуги образованы на $\gamma' - \mathcal{E}_{\gamma'}$, и на $(\gamma - \gamma') - (\mathcal{E} \cup \mathcal{N})$, через δ_i области на которые разбивается $S - \gamma$ и через p_k точки множества $\mathcal{E}_{\gamma'} \cup [(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}) - \gamma']$.

[32]) cap. III.

Тогда мы устанавливаем следующее обобщение формулы С. Стойлова ([2], стр. 136):

$$r = \varrho - \sum_i n_i \varrho_i - \sum_j s_j + \sum_k \nu_k,$$

где r—порядок разветвления покрытия $(S)_V^T$, ρ_i —характеристика δ_i, а n_i, s_j и ν_k соответственно числа листов V над δ_i, γ_j'' и p_k.

SUR UNE FORMULE DE S. STOÏLOW

RÉSUMÉ

Dans le cas des surfaces de Riemann normalement exhaustibles [1], les régions maximales ([2], p. 108) de chaque région de la surface de base, considérées comme surfaces de recouvrement, sont aussi normalement exhaustibles. Une telle propriété ne subsiste pas pour les surfaces de Riemann à exhaustion partiellement régulière [3]. C'est pourquoi que nous généralisons dans ce travail la définition des recouvrements partiellement réguliers ([2], p. 135).

La surface de Riemann $(S)_T^V$, (T transformation intérieure de V en S), satisfait à la condition (β_1) par rapport à l'ensemble fermé $\gamma \subset S$, $\gamma \neq S$, si quelque soit la suite de points $P_n \in V$ sans point d'accumulation dans V, la suite $p_n = T(P_n)$ n'admet aucun point limite dans $S - \gamma$.

A cet égard, nous établissons au commencement du travail certaines propriétés de $(S)_T^V$. Par exemple : toute région maximale d'une région $\delta \subset S - \gamma$, recouvre δ totalement ([2], p. 132) ; chaque point $a \in \overline{S - \gamma}$ a un nombre fini de pré-images, etc.

Dorénavant, supposons γ formé par un nombre fini de courbes de Jordan, disjointes deux à deux, et par un nombre fini d'arcs de Jordan, ayant des extrémités en des points ou des éléments-frontière bien déterminés de S. Les extrémités appartenant à S seront appelées noeuds, et leurs ensemble désigné par $\mathcal{N}$. Un arc γ peut avoir en comun avec un autre arc ou une courbe de γ seulement des noeuds.

Le point $p \in \gamma$ satisfait à la condition $(L\,\beta_2)$ s'il existe une voisinage v de p telle que la pré-image de la composante connexe de $v \cap \gamma$, qui contient p, soit relativement compacte dans V ou l'ensemble vide. Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $p \in \gamma$, qui ne satisfont pas à la condition $(L\beta_2)$. Si la surface $(S)_T^V$ verifie la propriété (β_1) et V a la caractéristique finie ρ, alors $\mathcal{E}$ est un ensemble fini.

Soit γ' un ensemble de courbes de Jordan de γ, disjointes deux à deux, qui contient toutes les courbes de Jordan de $\gamma - (\mathcal{E} \cup \mathcal{N})$ et $\mathcal{E}_{\gamma'}$, l'ensemble des points de γ', qui ne remplissent pas $(L\beta_2)$ par rapport à γ'. Notons par γ_j'' les arcs de Jordan de $\gamma' - \mathcal{E}_{\gamma'}$ et $(\gamma - \gamma') - (\mathcal{E} \cup \mathcal{N})$, par δ_i les regions de $S - \gamma$ et par p_k les points de $\mathcal{E}_{\gamma'} \cup [(\mathcal{E} \cup \mathcal{N}) - \gamma']$.

Alors, nous établissons la généralisation suivante de la formule de S. Stoilow ([2], p. 136)

$$\gamma = \rho - \sum_i n_i \rho_i - \sum_j s_j + \sum_k \nu_k,$$

où r représente l'ordre de ramification du recouvrement $(S)_T^V$, ρ_i la caractéristique de δ_i, n_i, s_j et ν_k le nombre des feuilles de V sur δ_i, γ_j'' et p_k respectivement.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Stoïlow, *Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces*. Compositio Math., **7**, *2*, p. 428—435 (1940).
2. S. Stoïlow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*. Paris, Gauthier Villars, 1956 (deuxième edition).
3. C. Andreian Cazacu, *Suprafețe riemanniene parțial regulat exhaustibile*. Studii și cercetări matematice, **10**, *2*, p. 307—323 (1959).
4. A. Pfluger, *Theorie der Riemannschen Flächen*. Berlin, Gottingen, Heidelberg, Springer, 1957.
5. L. Ahlfors, *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*. Acta Math., **65**, p. 157—194 (1935).
6 Л. И. Волковыский, *Исследование по проблеме типа*. Труды мат. инст. им. Стеклова, Москва-Ленинград XXXIV, 1950.

Primit la 19. II. 1960.