ASUPRA FRONTIEREI MARTIN A UNEI SUPRAFEȚE RIEMANNIENE*)

DE

C. CONSTANTINESCU și A. CORNEA

(București)

1. Vom nota cu R o suprafață riemanniană cu funcție Green, cu g_q funcția Green a lui R cu polul în q, cu Δ frontiera Martin a lui R, cu Δ_1 partea minimalelor din Δ și cu K_s funcția Martin relativă la punctul $s \in \Delta$. [2], [3].

TEOREMĂ. *Dacă funcția K_s nu este singulară, atunci*

$$\lim_{p \to s} g_{p_0}(p) = 0.$$

În caz contrar există un șir $\{q_n\}$ care converge la s, astfel încît șirul $\{g_{q_n}\}$ este convergent și

$$u = \lim_{n \to \infty} g_{q_n} \neq 0.$$

Fie ε un număr pozitiv mai mic ca $u(p_0)$, G^ε domeniul

$$G^\varepsilon = \{p \in R \,|\, g_{p_0}(p) < \varepsilon\}$$

și g_q^ε funcția Green a lui G^ε. Din

$$g_q^\varepsilon(p_0) = g_q(p_0) - \varepsilon$$

rezultă $q_n \in G^\varepsilon$, pentru n suficient de mare. Putem presupune, trecînd eventual la un subșir, că șirul $\{g_{q_n}^\varepsilon\}$ este convergent. Vom nota

$$u^\varepsilon = \lim_{n \to \infty} g_{q_n}^\varepsilon.$$

Din

$$u^\varepsilon(p_0) = \lim_{n \to \infty} g_{q_n}^\varepsilon(p_0) = u(p_0) - \varepsilon \neq 0$$

*) Această lucrare se publică și în limba germană în revista „Revue de mathématiques pures et appliquées", tom. V, no 1, p. 21–25 (1960).

rezultă că u^ε nu este identic zero. Întrucît G_ε este un domeniu de tip SO_{HB} și u^ε este nulă pe frontiera relativă a lui G^ε, rezultă că u^ε este singulară. Vom nota cu Eu^ε funcția pe R definită prin relația

$$Eu^\varepsilon = \inf \{v(p) \mid v \in HP(R),\ v \geqslant u^\varepsilon \text{ pe } G^\varepsilon\}.$$

Eu^ε este atunci o funcție singulară, [1].

Din $g_q \geqslant g_q^\varepsilon$ pe G^ε rezultă $u \geqslant u^\varepsilon$ pe G^ε și deci $u \geqslant Eu^\varepsilon$.

Avem

$$Eu^\varepsilon(p_0) \geqslant u^\varepsilon(p_0) = u(p_0) - \varepsilon,$$

$$u(p_0) - Eu^\varepsilon(p_0) \leqslant \varepsilon.$$

Fie $\{\varepsilon_i\}$ un șir descrescător de numere pozitive tinzînd către zero. Putem presupune, trecînd eventual la un subșir al numerelor naturale, că șirurile $\{g_{q_n}^{\varepsilon_i}\}_n$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sînt convergente. Vom nota

$$u^{\varepsilon_i} = \lim_{n\to\infty} g_{q_n}^{\varepsilon_i}.$$

$\{\varepsilon_i\}$ fiind descreșător se poate arăta ușor că $\{Eu^{\varepsilon_i}\}$ este necrescător. Din

$$Eu^{\varepsilon_i} \leqslant u,$$

$$u(p_0) - Eu^{\varepsilon_i}(p_0) \leqslant \varepsilon_i,$$

rezultă

$$\lim_{i\to\infty} Eu^{\varepsilon_i} = u.$$

Prin urmare u este o funcție singulară. Din

$$K_{q_n}(p) = \frac{g_{q_n}(p)}{g_{q_n}(p_0)}$$

rezultă

$$K_s = \frac{u}{u(p_0)}$$

și deci K_s este singulară, ceea ce contrazice ipoteza teoremei.

Dacă un șir $\{q_n\}$ pe R converge în sens Martin către un punct $s \in \Delta$, există un element frontieră α (în sens Kerékjártó—Stoilow [4] pag. 85—87), astfel încît $\{q_n\}$ converge către α. Vom spune că s este situat pe α. Vom nota cu $\Delta_1(\alpha)$ mulțimea punctelor din Δ_1 situate pe α. Se poate arăta, că dacă s este situat pe α, atunci reprezentarea canonică a lui K_s are forma

$$K_s = \int_{\Delta_1(\alpha)} K_r d\nu(r).$$

COROLAR. *Dacă $\Delta_1(\alpha)$ conține numai puncte s pentru care K_s este mărginită, atunci*

$$\lim_{p\to\infty} g_{p_0}(p) = 0.$$

Corolarul rezultă din teorema precedentă și din observația că, pentru orice s situat pe α, K_s este cvasimărginită.

2. Vom nota cu $d(p, q)$ distanța hiperbolică între punctele $p, q \in R$.

LEMĂ. *Pentru orice $u \in HP(R)$ avem*

$$e^{-2d(p,q)} u(p) \leqslant u(q) \leqslant e^{2d(p,q)} u(p).$$

Fie $|t| < 1$ suprafața universală de acoperire a lui R și φ funcția care realizează acoperirea lui R de către $|t| < 1$, cu $q = \varphi(0)$. Fie t un punct pentru care

$$\varphi(t) = p, \quad d(p, q) = \frac{1}{2} \log \frac{1+|t|}{1-|t|}.$$

Din inegalitățile lui Harnack

$$\frac{1-|t|}{1+|t|}\, u(\varphi(t)) \leqslant u(\varphi(0)) \leqslant \frac{1+|t|}{1-|t|}\, u(\varphi(t))$$

rezultă imediat inegalitățile căutate.

LEMĂ. *Fie C un compact pe R, astfel încît $R' = R - C$ este conex și $d'(p, q)$ distanța între p și q $(p, q \in R')$ măsurată în metrica hiperbolică a lui R'. Dacă $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ sînt două șiruri de puncte pe R', ce tind către frontiera ideală a lui R, astfel încît*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(p_n, q_n) < \infty,$$

atunci

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(p_n, q_n) = \lim_{n\to\infty} d'(p_n, q_n).$$

Fie, ca mai sus, $|t| < 1$ suprafața universală de acoperire a lui R, φ funcția care realizează acoperirea lui R de către $|t| < 1$ și $p = \varphi(0)$. Dacă notăm cu $d(p, C)$ distanța hiperbolică între p și C, atunci $\varphi^{-1}(R')$ conține cercul $|t| < \operatorname{th} d(p, C)$. Să notăm cu $d\sigma$ (respectiv $d\sigma'$) metrica hiperbolică a lui R (respectiv R'). În punctul p avem

$$d\sigma' \leqslant \frac{|dt|}{\operatorname{th} d(p, C)} = \frac{d\sigma}{\operatorname{th} d(p, C)}.$$

Fie γ un arc jordanian rectificabil pe R și $d(\gamma, C)$ distanța hiperbolică între γ și C. Atunci

$$\int_\gamma d\sigma'(p) \leqslant \int_\gamma \frac{d\sigma(p)}{\operatorname{th} d(p, C)} \leqslant \frac{1}{\operatorname{th} d(\gamma, C)} \int_\gamma d\sigma(p).$$

Dacă alegem pe γ_n aşa fel ca

$$\int_{\gamma_n} d\sigma(p) = d(p_n, q_n),$$

atunci

$$d'(p_n, q_n) \leqslant \int_{\gamma_n} d\sigma'(p) \leqslant \frac{d(p_n, q_n)}{\operatorname{th} d(\gamma_n, C)}.$$

Din

$$d(\gamma_n, C) \geqslant d(p_n, C) - d(p_n, q_n)$$

rezultă

$$\lim_{n\to\infty} d(\gamma_n, C) = \infty$$

şi deci

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d'(p_n, q_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(p_n, q_n).$$

Din $d\sigma \leqslant d\sigma'$ rezultă imediat şi inegalitatea inversă şi deci egalitatea.

Vom nota cu $\hat{R} = R \cup \Delta$ spaţiul topologic al lui Martin. Pentru două mulţimi deschise $\hat{G}_1$, $\hat{G}_2$ din $\hat{R}$ notăm

$$\rho(\hat{G}_1, \hat{G}_2) = \inf\{d(p, q) \mid p \in \hat{G}_1 \cap R,\ q \in \hat{G}_2 \cap R\}$$

şi pentru două puncte r, s din Δ definim

$$\rho(r, s) = \sup\{\rho(\hat{G}_1, \hat{G}_2) \mid \hat{G}_1, \hat{G}_2 \text{ deschise în } \hat{R},\ r \in \hat{G}_1,\ s \in \hat{G}_2\}.$$

TEOREMĂ. *Avem*

$$e^{-4\rho(r,s)} K_r \leqslant K_s \leqslant e^{4\rho(r,s)} K_r.$$

Este suficient să considerăm cazul $\rho(r, s) < \infty$. Fie $\{p_n\}$ (respectiv $\{q_n\}$) un şir de puncte pe R care converge către r (respectiv s) şi astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = \rho(r, s).$$

Fie p_0 punctul distins, cu ajutorul căruia s-a construit frontiera Martin şi p un punct arbitrar. Vom lua drept mulţime C în lema precedentă mulţimea $C = \{p_0, p\}$. Funcţiile g_p, g_{p_0} sînt armonice şi pozitive pe $R' = R - C$ şi deci

$$e^{-2d'(p_n, q_n)} g_p(p_n) \leqslant g_p(q_n) \leqslant e^{2d'(p_n, q_n)} g_p(p_n),$$

$$e^{-2d'(p_n, q_n)} g_{p_0}(p_n) \leqslant g_{p_0}(q_n) \leqslant e^{2d'(p_n, q_n)} g_{p_0}(p_n).$$

De aici rezultă

$$e^{-4d'(p_n, q_n)} K_{p_n}(p) \leqslant K_{q_n}(p) \leqslant e^{4d'(p_n, q_n)} K_{p_n}(p).$$

Întrucît

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d'(p_n, q_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(p_n, q_n) = \rho(r, s),$$

rezultă

$$e^{-4\rho(r,s)} K_r(p) \leqslant K_s(p) \leqslant e^{4\rho(r,s)} K_r(p).$$

p fiind arbitrar, teorema este demonstrată.

Din această teoremă deducem imediat că $\rho(r, s) = 0$ *implică* $r = s$

COROLAR. *Dacă* $s \in \Delta_1$ *şi* $r \neq s$, *atunci* $\rho(r, s) = \infty$.

О МАРТЕНОВОЙ ГРАНИЦЕ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исследуется поведение функции Грина на мартеновой границе и соотношения между мартеновой границей и гиперболической метрикой.

SUR LA FRONTIÈRE MARTIN D'UNE SURFACE RIEMANNIENNE

RÉSUMÉ

L'auteur étudie le comportement de la fonction de Green à la frontière Martin et les relations entre la frontière Martin et la métrique hyperbolique.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Heins, *On the Lindelöf principle.* Ann. of Math. **61**, 440–473 (1955).
2. R. S. Martin, *Minimal positive harmonic functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **49**, 137–172 (1941).
3. M. Parreau, *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann.* Ann. Inst. Fourier, **3**, 103–198 (1952).
4. S. Stoïlow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques.* 2e ed., Gauthier Villars, Paris, 1956.

Primit la 19. II. 1960.