ASUPRA UNOR INVARIANŢI ATAŞAŢI UNEI DIRECŢII ÎN SPAŢII BI- ŞI TRIDIMENSIONALE, CU CONEXIUNE AFINĂ

DE

ADOLF HAIMOVICI

Comunicare prezentată la Sesiunea ştiinţifică din 18—21 decembrie 1954 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

§ 1. Urmînd cîteva lucrări pe care le-am publicat de curînd [6—9], ca şi lucrarea lui V. M u r g e s c u [10], ne propunem de data aceasta să găsim invarianţii ce se pot ataşa la transportul paralel al unei direcţii într-un spaţiu cu conexiune afină.

Fie x_n un spaţiu cu conexiune afină, x^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ coordonatele unui punct din acest spaţiu şi X^i o direcţie prin acest punct. Fie Γ^k_{ij} coeficienţii conexiunii spaţiului nostru, funcţii de x^i, derivabile de atîtea ori cît va fi necesar în cursul demonstraţiilor. Condiţia ca direcţia X^i să se deplaseze paralel din punctul x^i în punctul $x^i + dx^i$, este

$$dX^i + \Gamma^i_{ab} X^a \, dx^b = 0, \qquad (i, a, b=1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

Fie $f(x^i, X^i)$ invariantul căutat. Condiţia de invarianţă se scrie evident[1])

$$\frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a + \frac{\partial f}{\partial X^a} dX^a = 0, \qquad (a = 1, \ldots, n).$$

Ţinînd seama de (1), aceasta se scrie

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \Gamma^b_{ai} \frac{\partial f}{\partial X^b} X^a = 0, \qquad (i, a, b = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Condiţia ca f să depindă numai de direcţia vectorului X^i se exprimă prin condiţia de omogeneitate de grad zero

$$X^a \frac{\partial f}{\partial X^a} = 0. \tag{3}$$

---

[1]) Pentru tot ceea ce priveşte teoria spaţiilor cu conexiune afină, vezi [1—3]; pentru teoria ecuaţiilor de ordinul I, vezi [4—5].

Condiţiile de completitate pentru sistemul (2), (3) sînt

$$\left\{\begin{array}{l} R^b_{aij}\, X^a \dfrac{\partial f}{\partial X^b} = 0, \\ R^b_{aij,k}\, X^a \dfrac{\partial f}{\partial X^b} = 0. \\ \cdots\cdots\cdots \\ \left(R^a_{hpq}\, R^k_{a\,rs} - R^a_{h\,rs}\, R^k_{a\,pq}\right) X^h \dfrac{\partial f}{\partial X^k} = 0, \\ \left(R^a_{h\,pq}\, R^k_{a\,rs,t} - R^a_{h\,rs,t}\, R^k_{a\,pq}\right) X^h \dfrac{\partial f}{\partial X^k} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a, h, k, p, q, r, s, t = 1, 2, \ldots, n), \end{array}\right. \tag{4}$$

$R^j_{i\,pq}$, $R^j_{ipq,r}, \ldots$ fiind tensorul lui Riemann-Christoffel şi derivata lui covariantă.

Sistemul complet format din ecuaţiile (2), (3), (4) trebuie să conţină cel mult $2n-1$ ecuaţii liniar independente, avînd în vedere că funcţia f depinde de $2n$ variabile. Cum ecuaţiile (2) sînt independente între ele şi independente de ecuaţiile (3) şi (4), urmează că sistemul format din aceste din urmă ecuaţii care conţin numai derivatele în raport cu X^i trebuie să conţină cel mult $n-1$ ecuaţii liniar independente.

Dacă notăm cu U_i n variabile noi, aceasta înseamnă că spaţiul nostru va admite un singur invariant, dacă între formele

$$X^i U_i,$$
$$R^i_{j\,pq}\, X^j U_i, \ldots$$
$$\left(R^a_{j\,pq}\, R^i_{a\,rs} - R^a_{j\,rs}\, R^i_{a\,pq}\right) X^j U_i, \ldots$$

liniare în U_i, există $n-1$ liniar independente de U_i. Dacă există $n-2$ astfel de forme, vor exista doi invarianţi ş.a.m.d.

§. 2. In cazul spaţiilor cu conexiune afină *cu 2 dimensiuni*, ecuaţiile sistemului (4) trebuie să se reducă la ecuaţia (3). Sistemul nostru se reduce la :

$$\left\{\begin{array}{l} X^1 \dfrac{\partial f}{\partial X^1} + X^2 \dfrac{\partial f}{\partial X^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^i} - \Gamma^k_{hi} X^h \dfrac{\partial f}{\partial X^k} = 0, \end{array}\right. \qquad (i, h, k = 1, 2), \tag{5}$$

cu condiţiile :

$$R^2_{1\,12} = R^1_{2\,12} = R^1_{1\,12} - R^2_{2\,12} = 0. \tag{6}$$

Aceste egalităţi se pot uşor interpreta geometric, dacă ne referim la formulele

$$\Delta X^i + R^i_{k\,pq} X^k \left[dx^p,\ dx^q\right] = 0, \tag{7}$$

în care $[dx^p dx^q] = dx^p \delta x^q - dx^q \delta x^p$, unde dx^i, δx^i sînt două deplasări oarecare în spaţiu, iar ΔX^i componentele rotaţiei vectorului X^i, după parcurgerea ciclului $[dx^p,\ dx^q]$.

În adevăr, din (6) şi (7) se deduce pentru cazul nostru

$$X^1 = -R^1_{1\,12} X^1 [dx^1,\ dx^2],$$
$$X^2 = -R^2_{2\,12} X^2 [dx^1,\ dx^2],$$

care ne arată că, după parcurgerea ciclului (dx^1, dx^2), direcţia vectorului X^i rămîne neschimbată. Spaţiul admite un *paralelism absolut*. În acest caz, dacă se aleg drept linii coordonate două familii de linii autoparalele, şi aşa fel încît tangentele la una din familii să fie paralele de-a lungul curbelor celeilalte familii, se capătă

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{12} = 0\,;$$

iar dacă punem

$$\frac{X^1}{X^2} = Y,$$

sistemul se reduce la :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \left(\Gamma^1_{1i} - \Gamma^2_{2i}\right) Y \frac{\partial f}{\partial Y} = 0,$$

a cărui integrală generală este

$$Y\, e^{\int\left(\Gamma^1_{1i} - \Gamma^2_{2i}\right) dx^i} = C.$$

Rezultă deci că invariantul nostru în sistemul de coordonate ales este

$$I = \frac{X^1 e^{\int \Gamma^1_{1i}\, dx^i}}{X^2 e^{\int \Gamma^2_{2i}\, dx^i}}. \tag{I}$$

Dacă spaţiul este fără torsiune, rezultă încă

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{21}\,.$$

§ 3. Să studiem acum problema într-un *spaţiu cu 3 dimensiuni*. În acest caz, pentru ca să existe un singur invariant, este necesar şi suficient ca sistemul (4) să conţină o singură ecuaţie distinctă de ecuaţia (3).

Evident, această ecuaţie este de forma

$$a^j_i X^i \frac{\partial f}{\partial X^j} = 0.$$

Dacă asupra variabilelor X^i facem o transformare liniară

$$Y^i = g^i_j X^j \qquad \det\left\|g^i_j\right\| \neq 0, \tag{8}$$

această ecuaţie se transformă în

$$\bar{a}^k_h Y^h \frac{\partial f}{\partial Y^k} = 0, \tag{9}$$

cu

$$\bar{a}_h^k = h_k^i \, a_i^j \, g_j^k ,$$

unde

$$\| h_i^j \| = \| g_i^j \|^{-1}.$$

Putem dispune de transformarea $\| \bar{a}_i^j \|$ așa fel încît matricea $\| g_i^j \|$ să fie o matrice J o r d a n; vom considera numai următoarele expresii :

$$1) \begin{Vmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{Vmatrix}, \quad 2) \begin{Vmatrix} \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_2 \end{Vmatrix}, \quad 3) \begin{Vmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{Vmatrix}, \quad 4) \begin{Vmatrix} \rho_1 & 1 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 1 \\ 0 & 0 & \rho_1 \end{Vmatrix},$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 diferiți.

Să observăm că prin transformarea noastră ecuația (3) își păstrează forma, iar ecuațiile (2) devin

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} - \overline{\Gamma}_{ij}^k Y^i \frac{\partial f}{\partial Y^k} = 0, \tag{10}$$

unde

$$\overline{\Gamma}_{ri}^s = \Gamma_{ji}^k \, g_k^s \, h_r^j - \frac{\partial g_t^s}{\partial x^i} \, h_r^t . \tag{11}$$

Celelalte ecuații ale sistemului (4) vor căpăta forma

$$b_i^j \, Y^i \frac{\partial f}{\partial Y^j} = 0, \qquad c_i^j \, Y^i \frac{\partial f}{\partial Y^j} = 0, \ldots \tag{12}$$

b_i^j, c_i^j fiind funcțiuni de x^i.

Să mai observăm că sistemul nostru rămîne complet după această transformare.

În paragrafele următoare vom analiza fiecare caz în parte.

§ 4. *Cazul I*. Cele două ecuații ale sistemului nostru se pot scrie

$$\begin{cases} Y^1 \dfrac{\partial f}{\partial Y^1} + Y^2 \dfrac{\partial f}{\partial Y^2} + Y^3 \dfrac{\partial f}{\partial Y^3} = 0, \\ Y^1 \dfrac{\partial f}{\partial Y^1} + \sigma Y^2 \dfrac{\partial f}{\partial Y^2} = 0, \end{cases} \qquad \sigma = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1 - \rho_3} \neq 0 \,;\, 1. \tag{13}$$

Fiecare ecuație (12), trebuind să fie o combinație liniară a ecuațiilor (12), va trebui să satisfacă condiții de forma

$$\begin{vmatrix} Y^1 & Y^2 & Y^3 \\ Y^1 & \sigma Y^2 & 0 \\ b_i^1 Y^i & b_i^2 Y^i & b_i^3 Y^i \end{vmatrix} = 0.$$

De aici se deduce :

$$\begin{cases} b_i^j = 0 \quad \text{pentru} \quad i \neq j, \\ b_2^2 - b_3^3 - \sigma \left(b_1^1 - b_3^3 \right) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Pe de altă parte, unica paranteză între ecuațiile (10) și (13) este

$$\left(\sigma \overline{\Gamma}_{2i}^1 Y^2 + \overline{\Gamma}_{1i}^1 Y^1 - \overline{\Gamma}_{ki}^1 Y^k \right) \frac{\partial f}{\partial Y^1} + \Bigg(\sigma \overline{\Gamma}_{2i}^2 Y^2 + \overline{\Gamma}_{1i}^2 Y^1 - \sigma \overline{\Gamma}_{ki}^2 Y^k +$$

$$+ \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} Y^2 \Bigg) \frac{\partial f}{\partial Y^2} + \left(\overline{\Gamma}_{1i}^3 Y^1 + \sigma \overline{\Gamma}_{2i}^3 Y^2 \right) \frac{\partial f}{\partial Y^3} = 0.$$

Aceasta trebuie evident să satisfacă condiții de forma (14), din care se deduce :

$$\overline{\Gamma}_{ki}^j = 0 \quad \text{dacă} \quad k \neq j, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = 0,$$

adică $\sigma = \text{const.}$

Integrala sistemului nostru este $f(I)$, în care

$$I = \left(g_i^1 X^i \right) - \left(g_i^2 X^i \right) \left(g_i^3 X^i \right)^{\sigma - 1} e^{\int \lambda_i \, dx^i} , \tag{II}$$

unde

$$\lambda_i = \overline{\Gamma}_{2i}^2 + \overline{\Gamma}_{3i}^3 - \sigma \left(\overline{\Gamma}_{1i}^1 + \overline{\Gamma}_{3i}^3 \right).$$

Spațiile care satisfac condițiile acestui paragraf au o proprietate importantă. Să observăm că relația (7) exprimă faptul că între un vector oarecare și cel obținut din acesta, după transportul lui paralel de-a lungul unui ciclu, există o corespondență omografică. Cum cele 3 rădăcini caracteristice ale matricii R_{12} sînt distincte, urmează că omografia obținută după parcurgerea unui ciclu situat pe varietatea $dx^3 = 0$ are trei direcții duble distincte. Relațiile (14) ne arată că același lucru se petrece dacă înlocuim ciclul din planul $dx^3 = 0$ printr-un ciclu din planul $dx^2 = 0$ sau $dx^1 = 0$. Deci spațiul admite trei cîmpuri de direcții paralele. Se constată că constanta σ este aceeași pentru toate omografiile.

Avînd în vedere felul cum a fost obținută a doua ecuație (13), rezultă încă că două omografii, caracterizate prin cicluri diferite, conțin în fasciculul lor identitatea. De aici se poate trage concluzia că în fiecare punct există două direcții plane așa fel încît omografia asociată lor este identitatea.

§ 5. *Cazul II* este caracterizat prin ecuațiile :

$$\begin{cases} Y^1 \dfrac{\partial f}{\partial Y^1} + Y^2 \dfrac{\partial f}{\partial Y^2} + Y^3 \dfrac{\partial f}{\partial Y^3} = 0, \\ Y^2 \dfrac{\partial f}{\partial Y^1} + \tau Y^3 \dfrac{\partial f}{\partial Y^3} = 0, \end{cases} \qquad \tau = \rho_2 - \rho_1 ; \tag{15}$$

Se poate alege factorul arbitrar care intră în τ așa ca $\tau=1$, ceea ce vom presupune realizat. Condițiile (14) se înlocuiesc prin

$$\begin{cases} b_1^2 = b_1^3 = b_2^3 = b_3^1 = b_3^2 = b_2^2 - b_1^1 = 0, \\ \tau\, b_2^1 = b_2^2 - b_3^3, \end{cases} \tag{16}$$

cu alte cuvinte celelalte ecuații (4) sînt combinații liniare ale ecuațiilor (15).

Paranteza dintre ecuațiile (10) și (15) este identică cu a doua ecuație (15), după ce impunem condițiile (16) de completitate a sistemului format din aceste ecuații. Se obține

$$\begin{cases} \overline{\Gamma}_{1i}^2 = \overline{\Gamma}_{1i}^3 = \overline{\Gamma}_{2i}^3 = \overline{\Gamma}_{3i}^1 = \overline{\Gamma}_{3i}^2 = 0, \\ \overline{\Gamma}_{1i}^1 - \overline{\Gamma}_{2i}^2 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Integrala generală a sistemului nostru este în aceste ipoteze : $f(I)$, în care

$$I = \frac{Y^2}{Y^3} e^{\frac{Y^1}{Y^2} - \int \lambda_i \, dx^i}$$

cu notația :

$$\lambda_i = \overline{\Gamma}_{3i}^3 - \overline{\Gamma}_{2i}^2 - \overline{\Gamma}_{2i}^1.$$

Revenind la primele variabile, găsim forma invariantului fundamental :

$$I = \frac{g_i^2 X^i}{g_i^3 X^i} e^{\frac{g_i^2 X^i}{g_i^2 X^i} - \int \lambda_i \, dx^i} . \tag{III}$$

Aceste spații se pot caracteriza geometric ca și cele precedente, cu singura deosebire că omografia atașată unui ciclu admite numai două direcții duble și un plan dublu. Spațiul admite două cîmpuri de direcții paralele, de asemenea un cîmp de direcții plane care se conservă prin paralelism.

§ 6. *Cazul III.* Ecuațiile sistemului sînt

$$\frac{\partial f}{\partial Y^3} = 0, \qquad Y^1 \frac{\partial f}{\partial Y^1} + Y^2 \frac{\partial f}{\partial Y^2} = 0.$$

Ecuațiile analoage cu (14) sînt :

$$b_1^2 = b_2^1 = b_1^1 - b_2^2 = b_3^1 = b_3^2 = 0. \tag{18}$$

Construind parantezele, obținem ecuația unică

$$\overline{\Gamma}_{3i}^h \frac{\partial f}{\partial Y^h} = 0.$$

Condiția de conpletitate impune :

$$\overline{\Gamma}_{3i}^1 = \overline{\Gamma}_{3i}^2 = 0 \tag{19}$$

După cum se vede, problema se reduce la cea bidimensională, pentru vectorii cu $Y^3=0$, adică pentru vectorii din planul

$$g_i^3 X^i = 0,$$

cu singura deosebire că un vector cu $Y^3=0$ nu rămîne cu ultima componentă nulă după transportul paralel.

Dacă punem

$$Z = \frac{Y^1}{Y^2}$$

ecuațiile (10) se reduc la :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} + \left(\alpha_i Z^2 + \beta_i Z + \gamma^i\right) \frac{\partial f}{\partial Z} = 0,$$

în care

$$\alpha_i = \overline{\Gamma}_{1i}^2, \ \beta_i = \overline{\Gamma}_{2i}^2 - \overline{\Gamma}_{1i}^1, \ \gamma_i = -\overline{\Gamma}_{2i}^1.$$

Integrarea ecuației de mai sus se reduce la integrarea ecuațiilor Riccati

$$\frac{dz}{dx^i} = \alpha_i z^2 + \beta_i z + \gamma_i .$$

Soluția acestor două ecuații este invariantul căutat.

Dacă $\varphi(x^i)$ este o integrală particulară a sistemului acesta, atunci invariantul nostru va fi :

$$I = \frac{Y^2}{Y^1 - \varphi Y_0} e^{(2\varphi\,\alpha_i + \beta_i)\,dx^i} + \int \alpha_i \, e^{(2\varphi\,\alpha_i + \beta_i)\,dx^i} dx^i. \tag{IV}$$

Spațiul care satisface condițiilor (18) și (19), se bucură de proprietatea că vectorii cu componente date de

$$\overline{Y}^3 = \overline{R}_i^2 \, Y^i$$

se transformă după transportul lor paralel de-a lungul unui ciclu oarecare, în ei înșiși. Spațiul admite deci un cîmp de vectori paraleli.

§ 7. *Cazul IV.* Ecuațiile sistemului se reduc în acest caz la :

$$\begin{cases} Y^2 \dfrac{\partial f}{\partial Y^1} + Y^3 \dfrac{\partial f}{\partial Y^2} = 0 \\ Y^1 \dfrac{\partial f}{\partial Y^1} + Y^2 \dfrac{\partial f}{\partial Y^2} + Y^3 \dfrac{\partial f}{\partial Y^4} = 0 . \end{cases} \tag{20}$$

Condițiile (14) se transformă în condițiile

$$b_1^1 = b_2^2 = b_3^3, \ \ a_2^1 = a_3^2, \ \ a_3^1 = a_1^2 = a_1^3 = a_2^3 = 0. \tag{21}$$

Paranteza între (10) și (20) ne dă

$$\overline{\Gamma}_{1i}^3 = \overline{\Gamma}_{2i}^3 = \overline{\Gamma}_{1i}^2 = \overline{\Gamma}_{3i}^2 - \overline{\Gamma}_{2i}^1 = 0,$$
$$2\,\overline{\Gamma}_{2i}^2 = \overline{\Gamma}_{1i}^1 + \overline{\Gamma}_{3i}^3 .$$

Integrala sistemului nostru este $f(I)$, în care

$$I = \frac{Y^1}{Y^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{Y^2}{Y^3}\right)^2 + \int \overline{\Gamma}_{3i}^{1}\, dx^i,$$

sau :

$$I = \frac{\left(2\, g_i^1\, g_j^3 - g_i^2\, g_j^2\right) X^i X^j}{2\, g_i^3\, g_j^3 X^i X^j} + \int \overline{\Gamma}_{3i}^{1}\, dx^j \tag{V}$$

Spaţiul admite în acest caz un singur cîmp de vectori paraleli.

§ 8. Să presupunem acum că printre ecuaţiile (3) şi (4) există una singură indepedentă. Vom avea atunci

$$R^j_{i\,pq} = R^i_{i\,pq} - R^j_{j\,pq} = 0.$$

Spaţiul admite deci paralelism absolut. În acest caz vor exista doi invarianţi de forma

$$f(x^i,\ U^1,\ U^2),$$

unde :

$$U^1 = \frac{X^1}{X^3},\quad U^2 = \frac{X^2}{X^3}.$$

Aceşti invarianţi sînt două integrale ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \left(\Gamma^1_{1i} U^1 + \Gamma^1_{2i} U^2 + \Gamma^1_{3i}\right)\frac{\partial f}{\partial U^1} - \left(\Gamma^2_{1i} U^1 + \Gamma^2_{2i} U^2 + \Gamma^2_{3i}\right)\frac{\partial f}{\partial U^2} + $$
$$+ \left(\Gamma^3_{1i} U^1 + \Gamma^3_{2i} U^2 + \Gamma^3_{3i}\right)\left(U^1 \frac{\partial f}{\partial U^1} + U^2 \frac{\partial f}{\partial U^2}\right) = 0.$$

Dacă spaţiul este fără torsiune, se ştie că se poate alege un sistem de coordonate aşa fel ca toţi coeficienţii conexiunii să fie nuli. În acest caz, cei doi invarianţi sînt

$$I_1 = \frac{X^1}{X^3},\quad I_2 = \frac{X^2}{X^3}. \tag{VI}$$

B I B L I O G R A F I E

1. Gh. V r ă n c e a n u, *Lecţii de geometrie diferenţială*. Ed. Acad. R.P.R., 1952.
2. A. P. N o r d e n, *Prostranstva affinoi sveaznosti*. G.I.T.T.L., Moscova—Leningrad, 1950.
3. P. K. R a ş e v s k i, *Rimanova gheometria i tenzornîi analiz*. G.I.T.T.L., Moscova, 1953.
4. E. G o u r s a t, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre*. Paris, Gauthier-Villars, 1921.
5. V. I. S m i r n o v, *Kurs vîsşei matematiki*, t. IV, G.I.T.T.L., Moscova—Leningrad, 1951.
6. A. H a i m o v i c i, *Spaţii cu metrică unghiulară* (I). Comunicările Acad. R. P. R., t. I, p. 157—163, 1951.
7. — *Spaţii cu metrică unghiulară* (II). Studii şi cercetări ştiinţifice, Acad. R.P.R. — Filiala Iaşi, 1951, t. II, p. 66,

8. A. H a i m o v i c i, *Asupra unor invarianţi ataşaţi unei perechi de vectori în spaţii cu conexiune afină cu două dimensiuni*. Bul. şt. Acad. R.P.R. — Secţia mat.-fiz., 1954. t. VI, p. 31—48.
9. — *Spaţii cu conexiune afină care admit noţiunea de arie*. Studii şi cercetări ştiinţifice Acad. R.P.R. — Filiala Iaşi, t. VI, 1955 p. 123—133.
10. V. M u r g e s c u, *Spaţii cu metrică unghiulară*. Studii şi cercetări ştiinţifice, Acad. R.P.R. Filiala Iaşi, An AI, (1955), p. 185—199.

О НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТАХ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ ОДНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ, ПРОСТРАНСТВА АФФИНОЙ СВЯЗНОСТИ

(Краткое содержание)

Автор изучает пространства аффиной связности допускающие — для каждого направления — инвариант параллельного переноса. Уравнения задачи являются (2), (3), (4). Условие существования одинственного инварианта данного типа выражается допущением n—2 линейных независимых уравнений соотношениями (3) и (4).

Двухмерные пространства допускающие таких инварианты являются пространства с абсолютным параллелизмом. Выбирая частные координаты, этот инвариант дан через (I).

Трехмерные пространства допускающие такие инварианты имеют одно, два или три поля параллельных направлений. Тогда инварианты будут (II), (III), (IV) или (V).

Если в трехмерном пространстве существуют два инварианта данного типа тогда оно с абсолютным параллелизмом.

SUR QUELQUES INVARIANTS ATTACHÉS À UNE DIRECTION D'UN ESPACE BI- ET TRIDIMENSIONNEL À CONNEXION AFFINE

(Résumé)

L'auteur étudie les espaces à connexion affine qui admettent pour chaque direction un invariant au transport parallèle de cette direction. Les équations du problème sont (2), (3), (4). La condition pour qu'il y ait un seul invariant du type cherché, est que parmi les équations (3) et (4) en existent n-2 linéairement indépendantes.

Les espaces à deux dimensions qui admettent tels invariants sont ceux à parallélisme absolu. Dans un système particulier de coordonnées, cet invariant est donné par (I).

Les espaces à trois dimensions qui admettent tels invariants admettent un, deux ou trois champs de directions parallèles. Les invariants sont alors (II), (III), (IV) ou (V).

Si l'espace à trois dimensions admet deux invariants du type considéré, il doit être à parallèlisme absolu.