DESPRE UNELE CLASE DE VARIETĂŢI n-DIMENSIONALE ÎN SPAŢIILE SEPARABILE ALE LUI HILBERT

DE

GERGELY EUGEN

(Cluj)

Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică din 25 martie 1960 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

Într-o lucrare anterioară [1] am introdus varietăţi n-dimensionale în spaţiile separabile ale lui Hilbert, H, varietăţi pe care le-am definit ca mulţimea elementelor spaţiului H de forma $y = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)e_i$, unde funcţiile $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sînt funcţii reale definite într-un domeniu D al spaţiului euclidian E_n cu n dimensiuni, satisfăcînd în domeniul D condiţia $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 < \infty$, iar $\{e_i\}$ reprezintă un sistem ortonormal al spaţiulu H. În lucrarea amintită, întroducînd în aceste varietăţi noţiunea lungimii de arc, am demonstrat, că pentru un n oarecare există varietăţi în care este realizabilă o geometrie de tip A. D. Alexandrov.

În lucrarea de faţă se consideră varietăţile n-dimensionale în care componentele elementelor de bază e_i, adică f_i, sînt forme algebrice sau funcţii care reprezintă sumele unor serii de forme algebrice şi se studiază domeniile de definiţie din E_n precum şi mulţimea elementelor din H, care alcătuiesc aceste varietăţi.

*

a) Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0$ coordonate omogene în spaţiul E_n. Componentele elementului $y \in H$, le notăm cu f_i şi presupunem că ele au forma

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i; \quad f_i = \sum_{\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = k} a^i_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \tag{1}$$

unde k este gradul *comun* al formelor f_i. Astfel varietatea n-dimensională V_n constă în acest caz din elementele $y \in H$ de forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_n=k} a^i_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \right) e_i, \tag{2}$$

unde

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a^i_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n})^2 < \infty, \tag{2'}$$

pentru valorile fixate $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Prin permutarea sumelor din (2) se obține reprezentarea :

$$y = \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_n=k} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a^i_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} e_i \right). \tag{3}$$

Astfel varietățile sînt caracterizate prin matrici avînd o infinitate de linii :

$$\begin{pmatrix} a^1_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} & a^1_{\alpha^1_0, \alpha^1_1, \dots, \alpha^1_n} & \dots & a^1_{\alpha^l_0, \alpha^l_1, \dots, \alpha^l_n} \\ a^2_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} & a^2_{\alpha^1_0, \alpha^1_1, \dots, \alpha^1_n} & \dots & a^2_{\alpha^l_0, \alpha^l_1, \dots, \alpha^l_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{4}$$

în care suma pătratelor elementelor dintr-o coloană oarecare formează cîte o serie convergentă (vezi (2')).

Introducînd pentru elementele din H notația

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a^i_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}) e_i = E_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n},$$

relația (3) se transcrie

$$y = \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_n=k} E_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \tag{5}$$

și ea ne dă reprezentarea elementelor din H care alcătuiesc varietatea V_n cu f_i date de (1).

Astfel, fiecare varietate V_n de acest fel este legată de elementele $E_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \in$ $\in H$ $(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k)$ și este caracterizată de acestea.

b) În continuare presupunem componentele f_i date ca în (1), ale căror grade nu sînt neapărat egale pentru toți indicii i, ci satisfac doar condiția de a nu depăși un număr dat K.

Atunci varietatea V_n este caracterizată tot de o matrice, avînd o infinitate de linii, în unele sau într-o infinitate dintre ele figurînd elemente nule, începînd de la un anumit indice. Condiția (2') trebuie să fie satisfăcută și în acest caz pentru toate coloanele. Astfel elementele din H se reprezintă tot sub forma (5), unde însă însumarea se face în raport cu indicele α pentru toate valorile $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ satisfăcînd inegalitatea $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leqslant K$.

c) Să studiem acum varietățile V_n, pentru care suma $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ referitoare la componentele elementelor bazei, nu este mărginită. În acest caz f_i ar reprezenta pentru unele valori ale indicelui i, forme de grad finit, iar pentru altele, serii convergente de forme avînd gradul k din ce în ce mai mare și tinzînd la infinit. Întrucît sumele $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n+\dots\dots$ (unde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ sînt numere întregi) formează o mulțime numărabilă, obținem și în acest caz o matrice caracteristică pentru varietățile în cauză, avînd o mulțime infinită, numărabilă de coloane, astfel încît oricare ar fi coloana matricei, seria pătratelor elementelor ei este convergentă.

În acest caz funcțiile f_i pot fi dezvoltate în serii de forme.

Analog ca în (5), elementele varietății V_n vor avea forma

$$y = \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_n} E_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n} x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \tag{6}$$

iar mulțimea elementelor $E_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}$ este o mulțime numărabilă.

*

În cele ce urmează vom stabili domenii de definiție a varietăților V_n, în cazurile a), b), c).

În cazurile a) și b) domeniul de definiție este întreg spațiul $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ fiindcă după cum arată formula (5), y are sens pentru orice punct $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ din E_n.

Dimpotrivă în cazul c), y dat de formula (6) are sens numai pentru punctele unui segment, în direcția $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Dacă $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ este un punct de convergență pentru varietatea V_n definită de relația (6), atunci și toate punctele $(kx_0, kx_1, \dots, kx_n)$, $k < 1$ sînt puncte de convergență în direcția definită de vectorul $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Astfel, odată cu un punct de convergență P_0, toate punctele segmentului OP_0 sînt de asemenea puncte de convergență. În fiecare direcție ce pleacă din O, punctele de convergență P_0 au un supremum M și deci toate punctele segmentului OM — și numai acestea — sînt puncte de convergență, adică puncte de definiție pentru V_n.

Rezultă de aici că *domeniul de definiție pentru o varietate V_n, în cazul* c), *este un domeniu stelat în E_n cu centrul în O.*

*

În vederea caracterizării mulțimii elementelor din H ale varietăților V_n studiate mai înainte, le vom împărți după valoarea lui k, adică după gradul formelor care intervin în componentele f_i.

În cazurile a) și b), aceste mulțimi reprezintă ,,poliedre complete'' în H, determinate de elementele $E_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n}$. Notăm mulțimea elementelor unui astfel de ,,poliedru'' cu $P_s(E_1, E_2, \dots, E_s)$, unde E_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ sînt elementele dintr-un șir oarecare (numărul s depinde de k).

Dacă $s < n$, atunci fiecare punct al acestui poliedru este imaginea unei mulţimi infinite de puncte din E_n, şi deci varietatea V_n este alcătuită din toate punctele P_s acoperite de o infinitate de ori. Această afirmaţie rezultă îndată scriind egalitatea (6) sub forma

$$y = l_1E_1 + l_2E_2 + \ldots + l_sE_s \tag{7}$$

şi ţinînd apoi seama de faptul că ea este satisfăcută pentru toate valorile date $l_1, l_2, \ldots, l_s$, realizate de o mulţime infinită de valori $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Dacă $s = n$, atunci relaţia (7) nu poate fi satisfăcută decît numai pentru un număr finit de puncte $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, şi deci poliedrul $P_s(E_1, E_2, \ldots, E_s)$ este acoperit numai de un număr finit de ori.

În sfîrşit dacă $s > n$, în domeniul definit de relaţia (7), există puncte care nu aparţin varietăţii V_n, aceasta fiind numai o parte din (7).

În cazul c) are loc inegalitatea $s > n$ care arată că elementele varietaţilor V_n sînt întotdeauna numai părţi stricte ale spaţiului H, şi aceste elemente sînt determinate în acest caz de $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$

Astfel, cazurile interesante sînt numai acelea în care $s > n$.

Observaţie. În spaţiul separabil al lui Hilbert, pentru două elemente a şi b este totdeauna valabilă inegalitatea

$$|(a, b)| \leqslant \|a\| \; \|b\|,$$

adică

$$\frac{|(a, b)|}{\|a\| \; \|b\|} \leqslant 1$$

şi astfel putem determina unghiul format de două elemente prin formula

$$\varphi = \arccos \frac{|(a, b)|}{\|a\| \; \|b\|}, \tag{8}$$

întocmai ca şi în cazul spaţiilor liniare normate de dimensiune finită, în care normarea se face cu ajutorul produsului scalar.

În lucrarea [1] citată anterior, am dovedit că pentru fiecare n, există varietăţi V_n în care putem introduce o geometrie de tip A.D. Alexandrov. Într-o geometrie de acest fel, se pot defini unghiurile formate de două curbe. Observaţia făcută anterior, după cum uşor se constată, exprimă tocmai faptul că definiţia unghiului introdus de A.D. Alexandrov coincide cu definiţia dată de relaţia (8), dacă bineînţeles această relaţie se referă la unghiul tangentelor curbelor în punctul dat al V_n.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ n-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГИЛЬБЕРТА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Автор исследует многообразия V_n (введенные в [1]), где f_i являются формами конечной степени или рядами таких форм. В труде уточняются области определения этих многообразий, а также строй множества их составных элементов пространства H.

SUR QUELQUES CLASSES DES VARIÉTÉS n-DIMENSIONNELLES DANS LES ESPACES SÉPARABLES DE HILBERT

RÉSUMÉ

L'auteur traite des variétés V_n (introduites dans [1]), f_i étant des formes de degré fini ou des séries de telles formes. Il précise les domaines de définition de ces variétés ainsi que la structure de l'ensemble des éléments de l'espace H qui les composent.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Gergely, *Probleme din geometria varietăţilor n-dimensionale în spaţiile separabile ale lui Hilbert*. Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **XI**, 1, 15–21 (1960).

Primit la 18. VI. 1960.