O TEOREMĂ ASUPRA FORMELOR PATRATICE ÎN LEGĂTURĂ CU TEOREMELE LUI APOLLONIUS

DE

D. V. IONESCU

(Cluj)

Comunicare prezentată la Institutul de calcul al Academiei R. P. R. — Filiala Cluj, în ședința din 3 februarie 1960.

Sînt bine cunoscute teoremele lui Apollonius asupra ariei paralelogramului construit pe doi semidiametri conjugați într-o elipsă, sau asupra volumului paralelipipedului construit pe trei semidiametri conjugați într-un elipsoid.

În această lucrare vom da o teoremă generală asupra formelor patratice din care vom deduce ca niște cazuri particulare teoremele lui Apollonius citate mai sus. Vom arăta apoi, făcînd o nouă aplicație, că putem obține și alte noi teoreme de tipul teoremelor lui Apollonius pentru elipsoid și cuadrice în general.

1. Să considerăm formele patratice

$$2f = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \quad 2g = \sum_{i,\,k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k, \tag{1}$$

unde $a_{ik} = a_{ki}$ și $b_{ik} = b_{ki}$.

Să dăm nedeterminatelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valorile $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$, unde $\alpha = 1, 2, \ldots, k$, numărul natural k fiind cel mult n și să considerăm matricele

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1^1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2^1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n^1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1^k} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2^k} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n^k} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial g}{\partial x_1^1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_1^k} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2^1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_2^k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_n^1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_n^2} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n^k} \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

Făcînd produsul acestor matrici, obținem matricea

$$\|X_{rs}\| = \left\| \begin{matrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kk} \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

unde

$$X_{rs} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i^r} \frac{\partial g}{\partial x_i^s}. \tag{4}$$

Teorema pe care o avem în vedere este

TEOREMA 1. *Determinantul Δ_k al matricei (3) este o formă patratică.*

$$\Delta_k = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k), (\beta_1, \dots, \beta_k)} C_{\alpha_1, \dots, \alpha_k;\ \beta_1, \dots, \beta_k} X_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} X_{\beta_1, \dots, \beta_k} \tag{5}$$

de nedeterminatele

$$X_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k} = \left| \begin{matrix} x_{\alpha_1}^1 & x_{\alpha_1}^2 & \dots & x_{\alpha_1}^k \\ x_{\alpha_2}^1 & x_{\alpha_2}^2 & \dots & x_{\alpha_2}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\alpha_k}^1 & x_{\alpha_k}^2 & \dots & x_{\alpha_k}^k \end{matrix} \right|, \tag{6}$$

unde coeficientul $C_{\alpha_1, \dots, \alpha_k;\ \beta_1, \dots, \beta_k}$ este produsul matricelor

$$\left\| \begin{matrix} a_{\alpha_1,1} & a_{\alpha_1,2} & \dots & a_{\alpha_1,n} \\ a_{\alpha_2,1} & a_{\alpha_2,2} & \dots & a_{\alpha_2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\alpha_k,1} & a_{\alpha_k,2} & \dots & a_{\alpha_k,n} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} b_{1,\beta_1} & b_{1,\beta_2} & \dots & b_{1,\beta_k} \\ b_{2,\beta_1} & b_{2,\beta_2} & \dots & b_{2,\beta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,\beta_1} & b_{n,\beta_2} & \dots & b_{n,\beta_k} \end{matrix} \right\| \tag{7}$$

formate cu coeficienti ai formelor patratice (1).

Într-adevăr, după teorema lui Cauchy-Binêt, avem

$$\Delta_k = \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)} \left| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_1}^1} & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_2}^1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_k}^1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_1}^2} & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_2}^2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_k}^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_1}^k} & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_2}^k} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_k}^k} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_1}^1} & \frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_1}^2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_1}^k} \\ \frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_2}^1} & \frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_2}^2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_2}^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_k}^1} & \frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_k}^2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_k}^k} \end{matrix} \right| \tag{8}$$

suma din membrul al doilea fiind extinsă la toate grupările $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ de k numere, toate diferite, luate dintre numerele $1, 2, \dots, n$ astfel ca două grupări să se deosebească cel puțin printr-un număr.

Din formulele (1) deducem că

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_r}^s} = \sum_{j=1}^{n} a_{\gamma_r, j}\, x_j^s \qquad (s = 1, 2, \dots, k)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_{\gamma_r}^s} = \sum_{j=1}^{n} b_{\gamma_r, j}\, x_j^s \qquad (s = 1, 2, \dots, k).$$

Avem deci

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_1}^1} & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_2}^1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_k}^1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_1}^2} & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_2}^2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_k}^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_1}^k} & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_2}^k} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_k}^k} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma_1, j}\, x_j^1 & \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma_2, j}\, x_j^1 & \dots & \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma_k, j}\, x_j^1 \\ \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma_1, j}\, x_j^2 & \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma_2, j}\, x_j^2 & \dots & \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma_k, j}\, x_j^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma_1, j}\, x_j^k & \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma_2, j}\, x_j^k & \dots & \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma_k, j}\, x_j^k \end{matrix} \right|$$

Dacă în determinantul din membrul al doilea schimbăm liniile în coloane, observăm că acest determinant este determinantul produsului matricilor

$$\left\| \begin{matrix} a_{\gamma_1, 1} & a_{\gamma_1, 2} & \dots & a_{\gamma_1, n} \\ a_{\gamma_2, 1} & a_{\gamma_2, 2} & \dots & a_{\gamma_2, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\gamma_k, 1} & a_{\gamma_k, 2} & \dots & a_{\gamma_k, n} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{matrix} \right\|.$$

Rezultă atunci, aplicînd teorema lui Cauchy-Binêt, că

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_1}^1} & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_2}^1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_k}^1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_1}^2} & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_2}^2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_k}^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_1}^k} & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_2}^k} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_{\gamma_k}^k} \end{matrix} \right| = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)} \left| \begin{matrix} a_{\gamma_1 \alpha_1} & a_{\gamma_1 \alpha_2} & \dots & a_{\gamma_1 \alpha_k} \\ a_{\gamma_2 \alpha_1} & a_{\gamma_2 \alpha_2} & \dots & a_{\gamma_2 \alpha_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\gamma_k \alpha_1} & a_{\gamma_k \alpha_2} & \dots & a_{\gamma_k \alpha_k} \end{matrix} \right| X_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}. \tag{9}$$

unde suma din membrul al doilea este extinsă la toate grupările $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ de k numere, toate diferite, luate dintre numerele $1, 2, \dots, n$ astfel ca două grupări să se deosebească cel puțin printr-un număr. $X_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ este determinantul definit de formula (6).

În mod analog se găsește că

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x^1_{\gamma_1}} & \dfrac{\partial g}{\partial x^2_{\gamma_1}} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x^k_{\gamma_1}} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x^1_{\gamma_2}} & \dfrac{\partial g}{\partial x^2_{\gamma_2}} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x^k_{\gamma_2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial x^1_{\gamma_k}} & \dfrac{\partial g}{\partial x^2_{\gamma_k}} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x^k_{\gamma_k}} \end{vmatrix} = \sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)} \begin{vmatrix} b_{\gamma_1\beta_1} & b_{\gamma_1\beta_2} & \cdots & b_{\gamma_1\beta_k} \\ b_{\gamma_2\beta_1} & b_{\gamma_2\beta_2} & \cdots & b_{\gamma_2\beta_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{\gamma_k\beta_1} & b_{\gamma_k\beta_2} & \cdots & b_{\gamma_k\beta_k} \end{vmatrix} X_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k} . \quad (10)$$

Făcînd produsul determinanților (9) și (10) și însumînd apoi în raport cu indicii $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$, obținem după formula (8), formula (5), unde

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k} = \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)} \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\gamma_1} & a_{\alpha_1\gamma_2} & \cdots & a_{\alpha_1\gamma_k} \\ a_{\alpha_2\gamma_1} & a_{\alpha_2\gamma_2} & \cdots & a_{\alpha_2\gamma_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\alpha_k\gamma_1} & a_{\alpha_k\gamma_2} & \cdots & a_{\alpha_k\gamma_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{\gamma_1\beta_1} & b_{\gamma_1\beta_2} & \cdots & b_{\gamma_1\beta_k} \\ b_{\gamma_2\beta_1} & b_{\gamma_2\beta_2} & \cdots & b_{\gamma_2\beta_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{\gamma_k\beta_1} & b_{\gamma_k\beta_2} & \cdots & b_{\gamma_k\beta_k} \end{vmatrix}, \quad (11)$$

ceea ce înseamnă că coeficientul $C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k}$ este determinantul produsului celor două matrici (7).

Teorema 1 este astfel demonstrată.

2. Dacă întroducem notația

$$A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\gamma_1} & a_{\alpha_1\gamma_2} & \cdots & a_{\alpha_1\gamma_k} \\ a_{\alpha_2\gamma_1} & a_{\alpha_2\gamma_2} & \cdots & a_{\alpha_2\gamma_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\alpha_k\gamma_1} & a_{\alpha_k\gamma_2} & \cdots & a_{\alpha_k\gamma_k} \end{vmatrix}$$

și

$$B\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_{\gamma_1\beta_1} & b_{\gamma_1\beta_2} & \cdots & b_{\gamma_1\beta_k} \\ b_{\gamma_2\beta_1} & b_{\gamma_2\beta_2} & \cdots & b_{\gamma_2\beta_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{\gamma_k\beta_1} & b_{\gamma_k\beta_2} & \cdots & b_{\gamma_k\beta_k} \end{vmatrix},$$

formula (11) arată că

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k} = \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)} A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix}. \quad (11')$$

De aici rezultă că matricea $\|C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k}\|$ este produsul matricelor

$$\left\| A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \end{pmatrix} \right\|, \quad (12)$$

$$\left\| B\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix} \right\|. \quad (13)$$

Să notăm cu A determinantul matricei $\|a_{ik}\|$ și cu B determinantul matricei $\|b_{ik}\|$. După teorema bine cunoscută a lui Cauchy, determinanții matricelor (12) și (13) sînt

$$A^{C_{n-1}^{k-1}}, \qquad B^{C_{n-1}^{k-1}}.$$

O demonstrație simplă a acestei teoreme a fost dată de noi în lucrarea [1].

Rezultă atunci că

$$|C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k}| = (AB)^{C_{n-1}^{k-1}} \quad (14)$$

3. Dacă se alege

$$2g = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$

atunci avem

$$B\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix},$$

unde membrul al doilea este egal cu 1 cînd $\gamma_1 = \beta_1, \gamma_2 = \beta_2, \ldots, \gamma_k = \beta_k$ și este egal cu 0 cînd cel puțin unul din indicii lui γ este diferit de indicele lui β corespunzător.

Rezultă atunci din formula (11) că în acest caz

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k} = A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix}.$$

Aplicînd teorema 1, deducem

TEOREMA 2. *Avem identitatea*

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^n x_i^1 \dfrac{\partial f}{\partial x_i^1} & \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_i^1} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^n x_i^k \dfrac{\partial f}{\partial x_i^1} \\ \sum\limits_{i=1}^n x_i^1 \dfrac{\partial f}{\partial x_i^2} & \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_i^2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^n x_i^k \dfrac{\partial f}{\partial x_i^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^n x_i^1 \dfrac{\partial f}{\partial x_i^k} & \sum\limits_{i=1}^n x_i^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_i^k} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^n x_i^k \dfrac{\partial f}{\partial x_i^k} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k),\ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)} A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k \end{pmatrix} X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} X_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k} . \quad (15)$$

ceea ce înseamnă că determinantul din membrul întîi este o formă patratică de nedeterminatele $X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$.

Coeficienţii din această formă patratică au proprietatea de simetrie

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_k\\ \beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\\ \alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_k\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Într-adevăr

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_k\\ \beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{\alpha_1\beta_1} & a_{\alpha_1\beta_2} & \dots & a_{\alpha_1\beta_k}\\ a_{\alpha_2\beta_1} & a_{\alpha_2\beta_2} & \dots & a_{\alpha_2\beta_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{\alpha_k\beta_1} & a_{\alpha_k\beta_2} & \dots & a_{\alpha_k\beta_k}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{\beta_1\alpha_1} & a_{\beta_2\alpha_1} & \dots & a_{\beta_k\alpha_1}\\ a_{\beta_1\alpha_2} & a_{\beta_2\alpha_2} & \dots & a_{\beta_k\alpha_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{\beta_1\alpha_k} & a_{\beta_2\alpha_k} & \dots & a_{\beta_k\alpha_k}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{\beta_1\alpha_1} & a_{\beta_1\alpha_2} & \dots & a_{\beta_1\alpha_k}\\ a_{\beta_2\alpha_1} & a_{\beta_2\alpha_2} & \dots & a_{\beta_2\alpha_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{\beta_k\alpha_1} & a_{\beta_k\alpha_2} & \dots & a_{\beta_k\alpha_k}\end{vmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\\ \alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_k\end{pmatrix}.$$

4. Să presupunem că formele patratice considerate la nr. 1 sînt ermitice, adică avem

$$\left.\begin{aligned} f&=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,x_i\overline{x_k} \qquad (a_{ik}=\overline{a_{ki}})\\ g&=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\,x_i\overline{x_k} \qquad (b_{ik}=\overline{b_{ki}}).\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

În acest caz, dacă se consideră matricea

$$\| X_{rs} \|, \tag{18}$$

unde

$$X_{rs}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i^r}\,\frac{\partial g}{\partial \overline{x_i^s}}, \tag{19}$$

se arată ca mai sus, că notînd

$$X_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k}=\begin{vmatrix}x_{\alpha_1}^1 & x_{\alpha_1}^2 & \dots & x_{\alpha_1}^k\\ x_{\alpha_2}^1 & x_{\alpha_2}^2 & \dots & x_{\alpha_2}^k\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{\alpha_k}^1 & x_{\alpha_k}^2 & \dots & x_{\alpha_k}^k\end{vmatrix}, \tag{20}$$

determinantul matricei (18) este

$$D_k=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k),(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k)} C_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k;\,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k}\,\overline{X}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k}\,X_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k}, \tag{21}$$

unde

$$C_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k;\,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k}=\sum_{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k)}\overline{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_k\\ \gamma_1\,\gamma_2\dots\gamma_k\end{pmatrix}\overline{B}\begin{pmatrix}\gamma_1\,\gamma_2\dots\gamma_k\\ \beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\end{pmatrix}, \tag{22}$$

Dacă se alege

$$g=x_1\overline{x}_1+x_2\overline{x}_2+\dots+x_n\overline{x}_n,$$

atunci

$$X_{rs}=\sum_{i=1}^{n}x_i^s\frac{\partial f}{\partial x_i^r}$$

şi

$$B\begin{pmatrix}\gamma_1\,\gamma_2\dots\gamma_k\\ \beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix}\gamma_1\,\gamma_2\dots\gamma_k\\ \beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\end{pmatrix}$$

unde simbolul din membrul al doilea este egal cu 1 dacă $\gamma_1=\beta_1$, $\gamma_2=\beta_2,\dots,\gamma_k=\beta_k$ şi este egal cu 0 dacă cel puţin un indice γ este diferit de indicele β corespunzător.

În acest caz formula (21) ne conduce la o identitate analoagă cu identitatea (15) şi anume

$$\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^1\frac{\partial f}{\partial x_i^1} & \sum_{i=1}^{n}x_i^1\frac{\partial f}{\partial x_i^1} & \dots & \sum_{i=1}^{n}x_i^k\frac{\partial f}{\partial x_i^1}\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^1\frac{\partial f}{\partial x_i^2} & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\frac{\partial f}{\partial x_i^2} & \dots & \sum_{i=1}^{n}x_i^k\frac{\partial f}{\partial x_i^2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^1\frac{\partial f}{\partial x_i^k} & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\frac{\partial f}{\partial x_i^k} & \dots & \sum_{i=1}^{n}x_i^k\frac{\partial f}{\partial x_i^k}\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k),(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k)}\overline{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_k\\ \beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\end{pmatrix}\overline{X}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k}\,X_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k} \tag{23}$$

Forma patratică din membrul al doilea al formulei (23) este ermitică. Într-adevăr, avem

$$\overline{A}\begin{pmatrix}\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_k\\ \beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\overline{a}_{\alpha_1\beta_1} & \overline{a}_{\alpha_1\beta_1} & \dots & \overline{a}_{\alpha_1\beta_k}\\ \overline{a}_{\alpha_2\beta_1} & \overline{a}_{\alpha_2\beta_2} & \dots & \overline{a}_{\alpha_2\beta_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \overline{a}_{\alpha_k\beta_1} & \overline{a}_{\alpha_k\beta_2} & \dots & \overline{a}_{\alpha_k\beta_k}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{\beta_1\alpha_1} & a_{\beta_2\alpha_1} & \dots & a_{\beta_k\alpha_1}\\ a_{\beta_1\alpha_2} & a_{\beta_2\alpha_2} & \dots & a_{\beta_k\alpha_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{\beta_1\alpha_k} & a_{\beta_2\alpha_k} & \dots & a_{\beta_k\alpha_k}\end{vmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\,\beta_2\dots\beta_k\\ \alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_k\end{pmatrix}$$

5. Identitatea (15) conţine teoremele lui Apollonius relativ la aria paralelogramului construit de doi semidiametri conjugaţi la o conică sau la volumul paralelipipedului construit pe trei semidiametri conjugaţi la o cuadrică.

Astfel să considerăm elipsa

$$2f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 1,$$

unde

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Pe elipsă să luăm punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ astfel ca direcţiile OM_1, OM_2 să fie conjugate, adică să avem

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0.$$

În acest caz avem

$$\sum x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 1, \quad \sum x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$\sum x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \sum x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1.$$

Identitatea (15) se reduce la

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2,$$

de unde rezultă că

$$\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{\delta}},$$

adică avem teorema lui Apollonius: *aria paralelogramului construit pe semidiametrii conjugaţi OM_1 şi OM_2 este constantă.*

Să considerăm iperbola

$$2f = a_{11}x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}y^2 = 1,$$

unde

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} < 0.$$

La un punct M_1' (x_1, y_1) de pe iperbolă să facem să corespundă punctul M_2' (x_2, y_2) de pe iperbola conjugată $2f = -1$, astfel ca direcţiile OM_1', OM_2' să fie conjugate.

Aplicînd identitatea (15) vom avea

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2,$$

de unde rezultă că

$$\left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{-\delta}},$$

adică teorema lui Apollonius: *aria paralelogramului construit pe semidiametrii conjugaţi OM_1', OM_2' este constantă.*

În mod analog se obţine teorema lui Apollonius pentru cuadrice, relativă la volumul paralelipipedului construit pe trei semidiametri conjugaţi.

6. După cum s-a arătat mai sus, din identitatea (15) se deduc teoreme de tip Apollonius, analoage cu cele demonstrate la nr. **5**. pentru cuadrice în spaţii cu mai multe dimensiuni, luînd în identitatea (15), $k = n$.

Însă se pot obţine şi alte teoreme de tip Apollonius din identitatea (15), luînd $k < n$. Vom da un exemplu alegînd în identitatea (15), $k = 2$, $n = 3$ şi considerînd elipsoidul

$$2f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{24}$$

Să luăm pe elipsoid punctele $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ astfel ca direcţiile OM_1 şi OM_2 să fie conjugate. Identitatea (15) arată că

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{b^2c^2} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{c^2a^2} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \frac{1}{a^2b^2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2,$$

ceea ce înseamnă că dacă notăm cu $\overrightarrow{OP}$ produsul vectorial al vectorilor $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ şi cu X, Y, Z coordonatele punctului P, locul geometric al punctului P, cînd direcţiile OM_1, OM_2 variază, este elipsoidul

$$\frac{X^2}{b^2c^2} + \frac{Y^2}{c^2a^2} + \frac{Z^2}{a^2b^2} = 1, \tag{25}$$

ataşat elipsoidului (24).

Teoreme analoage se pot obţine înlocuind elipsoidul (24) cu un iperboloid cu o pînză şi cu iperboloidul conjugat.

ОДНА ТЕОРЕМА О КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ В СВЯЗИ С ТЕОРЕМАМИ АПОЛЛОНИУСА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей статье дается теорема (теорема 1) о квадратичных формах, из которой вытекает тождество (15), которое, в частных случаях $n=2$, $n=3$, ведет к теоремам Аполлониуса относительно площади параллелограмма, построенного на двух сопряженных полудиаметрах эллипса или относительно объёма параллелипипеда, построенного на трех сопряженных полудиаметрах эллипсоида.

В первой теореме доказывается, что *если рассматриваются квадратичные формы* (1) *и придаются неопределенным* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *значения* $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$, *где* $\alpha = 1, 2, \ldots, k$ *с* $k \geqslant n$, *то определитель* Δ_k *произведения матриц* (2) *является квадратичной формой* (5) *от* $X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ *где* $X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ *даётся формулой* (6), *коэффициенты которой даются формулами* (11) *и* (11′).

Если $2g = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, то теорема 1 ведет к тождеству (15).

В случае эрмитовых квадратичных форм, получается тождество (23), аналогичное с тождеством (15). Второй член тождества (23) является эрмитовой квадратичной формой.

В качестве применения показывается, что тождество (15), в случаях $n=2$ и $k=2$, $n=3$ и $k=3$, ведет к вышеупомянутым теоремам Аполлониуса.

Но из тождества (15) можно выводить и другие теоремы типа Аполлониуса, взяв $n=k$, где n есть любое натуральное число, или взяв $k<n$. В качестве примера доказывается, что если на эллипсоиде (24) берутся точки M_1 и M_2, таким образом, чтобы направления OM_1 и OM_2 явились сопряженными, то геометрическое место точки P, где $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} \times \overrightarrow{OM_2}$ является эллипсоидом (25), присоединенным к эллипсоиду (24).

UN THÉORÈME SUR LES FORMES QUADRATIQUES RELATIF AUX THÉORÈMES D'APOLLONIUS

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on donne un théorème sur les formes quadratiques, d'où il résulte une identite (15) qui dans les cas particuliers $n=2$, $n=3$ conduit aux théorèmes d'Apollonius relativement à l'aire du parallélogramme construit sur deux semidiamètres conjugués à une ellipse ou au volume du parallélipipède construit sur trois semi-diamètres conjugués à un elipsoïde.

On démontre dans le premier théorème que *si l'on considère les formes quadratiques* (1) *et si l'on donne aux indéterminées* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *les valeurs* $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$ *où* $\alpha = 1, 2, \ldots, k$ *avec* $k \leqslant n$, *le déterminant* Δ_k *du produit des matrices* (2) *est une forme quadratiques* (5) *de* $X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ *où* $X_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ *est donné par la formule* (6) *dont les coefficients sont donnés par la formule* (11) *ou* (11′).

Si $2g = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, le premier théorème conduit à l'identité (15).

Dans le cas des formes hermitiques (17) on obtient l'identité (23) analogue à l'identité (15). Le second membre de l'identité (23) est encore une forme hermitique.

Comme application on montre que l'identité (15) conduit dans les cas $n=2$, $k=2$ et $n=3$, $k=3$ aux théorèmes d'Apollonius cités plus haut.

Mais de l'identité (15) on peut déduire aussi d'autres théorèmes du type d'Apollonius en prenant $n=k$, où n est un nombre naturel quelconque, ou en prenant $k<n$. Comme exemple on démontre que si l'on prend sur l'ellipsoïde (24) les points M_1, M_2 tels que les directions OM_1, OM_2 soient conjuguées, le lieu du point P ou $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} \times \overrightarrow{OM_2}$ est l'ellipsoïde (25) attaché à l'ellipsoïde (24).

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Forma canonică a unui determinant şi aplicaţiile ei.* Studii şi Cercetări de Matematică Cluj, X, 33–45 (1959).

Primit la 27 iunie 1960