DESPRE O NOUĂ GENERALIZARE A METODEI IPERBOLELOR TANGENTE PENTRU REZOLVAREA ECUAŢIILOR FUNCŢIONALE NELINIARE DEFINITE ÎN SPAŢII BANACH

DE

BÉLA JANKÓ

(Cluj)

Lucrare prezentată în şedinţa de comunicări din 11 iulie 1960 a Institutului de calcul din Cluj.

Metoda clasică a lui Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

de rezolvare prin aproximaţii succesive a ecuaţiei $f(x) = 0$, $f(x)$ fiind o funcţie de variabilă reală sau complexă, a fost generalizată de L. V. Kantorovici [1] pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare $P(x) = 0$, definite în spaţiul Banach X în felul următor

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n), \tag{1'}$$

unde $x \in X$ $(n = 0, 1, \ldots)$, iar $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ reprezintă inversa derivatei lui Fréchet $P'(x_n)$, care este o operaţie liniară pentru elementul x_n fixat. Verificarea dacă această inversă există precum şi delimitarea normei ei reprezintă dificultăţi considerabile. Pe lîngă aceasta calcularea efectivă a inverselor Γ_n — la fiecare pas de iteraţie — reprezintă dificultăţi, deoarece calcularea ei este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei liniare

$$P'(x_n)\xi_n = - P(x_n)$$

la fiecare pas de iteraţie. Aici am notat $\xi_n = x_{n+1} - x_n$. Remarcăm totodată că de foarte multe ori inversele Γ_n nici nu pot fi calculate exact.

M. Altman [2, 3] a dat o altă generalizare a metodei clasice a lui Newton, pentru rezolvarea ecuaţiilor funcţionale $F(x) = 0$ definite în spaţiul Banach X,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)Y_n} y_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{1''}$$

unde $F'(x_n)$ este derivata Fréchet a funcționalei $F(x)$, iar șirul de elemente $\{y_n\}$, $y_n \in X$ satisface următoarei condiții care intervine în [2]

$$|F'(x_n)y_n| = \|F'(x_n)\|, \quad \|y_n\| = 1 \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{A}$$

Această metodă este avantajoasă, fiindcă ea permite rezolvarea ecuațiilor funcționale în condiții mai largi, fără a presupune existența inversei derivatei Fréchet, înlesnind astfel calcularea aproximațiilor x_n. Metoda se folosește de fapt la rezolvarea ecuațiilor funcționale $F(x) = 0$, însă ecuația operațională $P(x) = 0$ considerată în spațiul Banach poate fi redusă în totdeauna la o ecuație funcțională echivalentă, punînd $F(x) = \|P(x)\|$.

1. Lucrarea de față tratează o metodă de iterație pentru rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare definite în spații Banach. Considerăm pentru aceasta, metoda iperbolelor tangente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f'(x_n)\, f(x_n)}{2f'^2(x_n) - f''(x_n)\, f(x_n)}, \tag{2}$$

unde $f(x)$ este o funcție de variabilă reală [4, 5]. Această metodă a fost extinsă de M. A. M e r t v e ț o v a [6] pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare $P(x) = 0$ definite în spațiul Banach X și anume în felul următor

$$x_{n+1} = x_n - Q_n \Gamma_n P(x_n),$$

unde $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ și $Q_n = [I - \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)]^{-1}$, iar $P'(x_n)$, $P''(x_n)$ sînt derivatele Fréchet de ordinul 1 respectiv 2 ale operației $P(x)$ pentru elementul $x_n \in X$. Rapiditatea convergenței acestui procedeu este considerabil mai pronunțată decît a metodei lui Newton generalizate. În privința existenței inverselor Γ_n și Q_n se pune aceeași problemă ca și la metoda lui Newton generalizată.

În această lucrare se dă o altă extindere a metodei iperbolelor tangente, pentru rezolvarea ecuațiilor funcționale $F(x) = 0$, în felul următor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F'(x_n)}{F'(x_n)\, y_n - \frac{1}{2}\frac{F''(x_n)\, y_n^2}{F'(x_n)\, y_n} F(x_n)}\, y_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2''}$$

$F'(x_n)$, $F''(x_n)$ fiind derivatele Fréchet ale funcționalei $F(x)$, iar șirul de elemente $\{y_n\}$, $y_n \in X$ satisface relației (A).

Proprietăți. Funcționala $F(x)$ pentru elementele y_n, x_{n+1}, x_n satisface relația

$$F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{2}\frac{F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)\, y_n}{F'(x_n)\, y_n} F(x_n) = -F(x_n), \tag{I}$$

ceea ce se verifică imediat, înlocuind $x_{n+1} - x_n$ cu expresiile lor corespunzătoare din formula (2''). De asemenea se verifică ușor următoarea relație de „comutativitate",

$$F'(x_n)y_n\, F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 = F'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\, F''(x_n)(x_{n+1} - x_n)y_n \tag{II}$$

care se obține în mod analog.

Din proprietățile (I) și (II) rezultă

$$\Phi'_n(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0, \quad \Phi''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

unde am notat

$$\Phi_n(x) = L_n x - F(x)y_n + \frac{1}{2}\frac{F''(x_n)(x - x_n)\, y_n}{F'(x_n)\, y_n} F(x)y_n \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

iar

$$L_n = F'(x_n)y_n - \frac{1}{2}\frac{F''(x_n)\, y_n^2}{F'(x_n)\, y_n} F(x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{4'}$$

Condiții suficiente pentru existența soluției ecuației $F(x) = 0$, precum și condiții pentru ca în acelaș timp șirul $\{x_n\}$ să tindă către o soluție a ecuației $F(x) = 0$ sînt date de teoremele 1, 2 respectiv 1', 2'.

TEOREMA 1. *Să presupunem că pentru aproximația inițială x_0 sînt satisfăcute următoarele condiții :*

1°. *pentru derivata Fréchet $F'(x_0)$ există delimitarea*

$$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0 < +\infty$$

și pe lîngă aceasta mai este satisfăcută condiția (A), *unde aproximațiile x_n se determină succesiv prin metoda* (2'') (*pornind de la aproximația inițială x_0*),

2°. *are loc inegalitatea*

$$\frac{|F(x_0)|}{\left|F'(x_0)\, y_0 - \frac{1}{2}\frac{F''(x_0)\, y_0^2}{F'(x_0)\, y_0} F(x_0)\right|} < \eta_0 < +\infty,$$

3°. *există derivatele Fréchet pînă la ordinul 3 și*

$$\|F''(x)\| \leqslant K < +\infty, \quad \|F'''(x)\| \leqslant N < +\infty$$

pentru orice $x \in S(x_0, r)$, $S(x_0, r)$ fiind o sferă în spațiul lui Banach X de rază $r = 2\eta_0$ și cu centrul în x_0, care este definită de inegalitatea $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta_0$,

4°. $$h_0 = B_0 K \eta_0 \leqslant \frac{1}{2},$$

5°. $$R_0 = \left[\frac{N}{K^2 B_0}(2 + h_0) + 3\right](1 + h_0) \leqslant 9.$$

In aceste condiții ecuația funcțională $F(x) = 0$ admite în sfera $S(x_0, r)$ o soluție x^* spre care tind aproximațiile x_n calculate prin formula (2''), *iar rapiditatea convergenței este caracterizată de delimitarea*

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{n-1}\eta_0.$$

Demonstrație. Arătăm că în trecerea de la x_0 la x_1 condițiile 1°—5° rămîn satisfăcute.

a) Din inegalitatea

$$\|F'(x_1)\| \geqslant \|F'(x_0)\| \left(1 - \frac{\|F'(x_0)-F'(x_1)\|}{\|F'(x_0)\|}\right)$$

şi din formula generalizată a lui Lagrange se obţine (vezi [2])

$$\|F'(x_1)\| \geqslant \|F'(x_0)\|(1 - B_0 K\eta_0) = \|F'(x_0)\|(1 - h_0),$$

de unde rezultă că

$$\frac{1}{\|F'(x_1)\|} \leqslant \frac{B_0}{1-h_0} = B_1 < 2B_0. \tag{5}$$

Astfel condiţia 1^0 este îndeplinită pentru elementul x_1.

b) Aplicăm formula generalizată a lui Taylor pentru operaţia $\Phi_0(x)$ definită prin (4)

$$\|\Phi_0(x_1) - \Phi_0(x_0) - \Phi'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}\Phi''(x_0)(x_1 - x_0)^2\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|\Phi'''(\xi_0)\|\,\|x_1 - x_0\|^3, \tag{6}$$

unde $\xi_0 = x_0 + \theta_1(x_1 - x_0)$ şi $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$. Ţinînd seamă de formulele (6), (4), (3), (2''), şi (4') şi de condiţiile 1^0-4^0 rezultă că

$$\left|\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{F''(x_0)(x_1 - x_0 y_0)}{F'(x_0)\,y_0}\right) F(x_1)\right| \leqslant \frac{1}{12}\,[N(2 + h_0) + 3B_0K^2]\eta^3,$$

de unde

$$|F(x_1)| \leqslant \frac{N(2+h_0)+3B_0K^2}{12\left(1-\frac{h_0}{2}\right)}\eta_0^3, \tag{7'}$$

iar din (5) şi (7) obţinem

$$\frac{|F(x_1)|}{\|F'(x_1)\|} \leqslant \frac{[N(2+h_0)+3B_0K^2]}{12(1-h_0)\left(1-\frac{h_0}{2}\right)}\,B_0\eta_0^3 = \delta_1. \tag{7'}$$

Folosind această inegalitate cu condiţia $3°$ se ajunge la relaţia

$$\left|\frac{F(x_1)}{L_1}\right| = \eta_1 \leqslant \frac{\delta_1}{1-B_0K\delta_1},$$

apoi mai departe folosind relaţia (7') şi condiţia $5°$ se stabilesc uşor inegalităţile

$$\eta_1 \leqslant 2h_0^2\eta_0 \leqslant \frac{\eta_0}{2}. \tag{8}$$

Prin urmare condiţia $2°$ este îndeplinită pentru aproximaţia x_1.

c) Condiţia $3°$ este de asemenea îndeplinită, deoarece, cum vom vedea mai tîrziu, x_1 şi ζ_0 nu ies din sfera $S(x_0, 2\eta_0)$.

d) Din inegalităţile (8) şi (5) rezultă

$$h_1 \leqslant 4h_0^3 \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2}, \tag{9}$$

prin urmare şi condiţia $4°$ este îndeplinită.

e) În sfîrşit din $B_1 > B_0$ şi $h_1 \leqslant h_0$ rezultă că $R_1 < R_0 \leqslant 9$.

Astfel condiţiile $1°-5°$ rămîn valabile pentru aproximaţia x_1, unde cantităţile B_0, η_0, h_0, R_0 s-au înlocuit cu B_1, η_1, h_1, R_1. Acest fapt ne permite să continuăm determinarea consecutivă a aproximaţiilor x_n şi să delimităm cantităţile legate de ele, anume

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1-h_{n-1}}, \tag{10}$$

$$\eta_n \leqslant 2\,h_{n-1}^2\,\eta_{n-1}, \tag{11}$$

$$h_n \leqslant 4\,h_{n-1}^3, \tag{12}$$

$$R_n = \left[\frac{N}{K^2B_n}(2 + h_n) + 3\right](1 + h_n). \tag{13}$$

Din relaţiile (11) şi (12) rezultă

$$\eta_n \leqslant \frac{1}{2^n}\,(2h_0)^{3^n-1}\,\eta_0. \tag{14}$$

Mai departe, ştiind că $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \eta_n$ şi folosind relaţia (14), avem

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}}\,(2h_0)^{3^n-1}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\eta_0. \tag{15}$$

Astfel X fiind un spaţiu complet, din (15) rezultă că există limita

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Trecînd la limită în (15) pentru $p \to \infty$, se obţine

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}}\,(2\,h_0)^{3^n-1}\,\eta_0. \tag{16}$$

Rămîne să arătăm că x_n şi ζ_{n-1} $(n = 1, 2, \ldots)$ nu ies din sfera $S(x_0, 2\eta_0)$, unde

$$\zeta_{n-1} = x_{n-1} + \theta_n(x_n - x_{n-1}),$$

fapt folosit la punctul c).

În adevăr

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| +$$

$$+ \cdots + \|x_{n-1} - x_n\| \leqslant \eta_0 + \frac{\eta_0}{2} + \cdots + \frac{\eta_0}{2^n} < 2\eta_0,$$

iar în ce priveşte inegalitatea $\|x_0 - \zeta_{n-1}\| < 2\eta_0$ ea se demonstrează analog ca mai înainte.

Pe lîngă acestea mai trebuie arătat că limita x^* satisface ecuaţia $F(x) = 0$. Considerăm relaţia (7) pentru cazul n,

$$|F(x_n)| \leqslant \frac{N(2+h_{n-1}) + 3B_{n-1}K^2}{12\left(1 - \frac{h_{n-1}}{2}\right)} \eta_{n-1}^3.$$

Folosindu-ne de faptul că $B_{n-1} < 9$, obţinem

$$|F(x_n)| \leqslant \frac{3}{4} \frac{h_{n-1}^2}{B_{n-1}\left(1 - \frac{h_{n-1}}{2}\right)(1+h_{n-1})} \eta_{n-1} \leqslant \frac{1}{B_0} \frac{\eta_0}{2^{n-1}},$$

prin urmare dacă $n \to \infty$ atunci $|F(x_n)| \to 0$ şi fiindcă $x_n \to x^*$, în baza continuităţii funcţionalei $F(x)$ rezultă că $F(x^*) = 0$.

Observaţii. Această teoremă reprezintă o extindere a teoremei 1 stabilite de M. A. M e r t v e ţ o v a [6], pentru cazul cînd nu există inversa primei derivate pentru elementul x_0. După cum reiese din formula (16) rapiditatea convergenţei a rămas aceeaşi [6].

În teorema precedentă am presupus că pentru elementul x_0 este satisfăcută condiţia $\frac{1}{\| F'(x_0) \|} \leqslant B_0$. Este însă interesant de studiat şi cazul cînd această condiţie este satisfăcută pentru orice element x dintr-un domeniu dat. Atunci celelalte condiţii pot fi slăbite. Teorema următoare se referă la acest caz. Introducem pentru aceasta notaţiile

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} (gh)^{3^i - 1},$$

unde

$$g^2 = \frac{\frac{N(2+h)}{K^2 B} + 3}{12\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2}.$$

Evident că H satisface inegalităţile

$$1 < H < \frac{1}{1 - gh}$$

pentru $gh < 1$.

TEOREMA 2. *Dacă următoarele condiţii sînt îndeplinite*

1°. $\frac{1}{\| F'(x) \|} \leqslant B$ *pentru orice* $x \in S$, *unde* S *este o sferă din spaţiul* X *definită de inegalitatea*

$$\| x - x_0 \| \leqslant H\eta$$

şi pe lîngă aceasta mai este satisfăcută condiţia (A), *unde* x_n *se determină prin metoda* (2''),

2°. *pentru aproximaţia iniţială* x_0 *este satisfăcută inegalitatea*

$$\frac{|F(x_0)|}{\left| F'(x_0)y_0 - \frac{1}{2} \frac{F''(x_0)y_0^2}{F'(x_0)y_0} F(x_0) \right|} \leqslant \eta,$$

η *fiind un număr finit,*

3°. *există derivatele Fréchet pînă la ordinul* 3 *şi avem satisfăcute inegalităţile* $\| F''(x) \| \leqslant K < +\infty$, $\| F'''(x) \| \leqslant N < +\infty$ *pentru orice* $x \in S$,

4°. *sînt îndeplinite relaţiile*

$$h < 2,\ hg < 1 \quad \textit{unde} \quad h = B\eta K,$$

atunci ecuaţia funcţională $F(x) = 0$ *admite o soluţie* $x^* \in S$, *către care converg aproximaţiile* x_n *date prin metoda* (2''). *Rapiditatea convergenţei este caracterizată prin delimitarea*

$$\| x^* - x \| < H\eta(gh)^{3^n - 1}.$$

Demonstraţie. Ţinînd seamă de relaţiile (4), (3), (2''), (4'), (6) şi de condiţiile 1°—3°, obţinem delimitarea

$$\frac{|F(x_1)|}{\| F'(x_1) \|} \leqslant \frac{B}{12\left(1 - \frac{h}{2}\right)} \{N(2 + h) + 3K^2 B\}\eta^3 = \delta_1',$$

de unde găsim că

$$\left| \frac{F(x_1)}{L_1} \right| = \eta_1 \leqslant \frac{\delta_1'}{1 - {}^1/_2 BK\delta_1'}.$$

Folosind inegalitatea $\delta_1' < \eta$, se ajunge uşor la delimitarea

$$\| x_2 - x_1 \| \leqslant \frac{B}{12\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2} \{N(2 + h) + 3K^2 B\} \| x_1 - x_0 \|^3,$$

sau

$$\| x_2 - x_1 \| \leqslant \frac{h^2}{12\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2} \left\{ \frac{N(2+h)}{K^2 B} + 3 \right\} \| x_1 - x_0 \|.$$

Se obţine analog

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \frac{B}{12\left(1 - \frac{h}{2}\right)^2} \{N(2 + h) + 3K^2 B\} \| x_n - x_{n-1} \|^3.$$

Din această relaţie de recurenţă se stabileşte uşor inegalitatea

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant (gh)^{3^n - 1}\eta.$$

Inegalitățile

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \ldots +$$

$$+ \|x_{n-1} - x_n\| \leqslant \eta \sum_{i=1}^{n-1} (gh)^{3^i-1} < H\eta$$

arată că aproximațiile x_n aparțin sferei S, iar ζ_{n-1} aparține de asemenea domeniului S.

Din relația

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} (gh)^{3^i-1}\eta < H\eta(gh)^{3^n-1}$$

rezultă că x_n tinde către o limită $x^* \in S \subset X$, deoarece X este un spațiu complet. Astfel trecînd la limita pentru $p \to \infty$, obținem

$$\|x^* - x_n\| < H\eta(gh)^{3^n-1}.$$

Faptul că x^* satisface ecuația $F(x) = 0$, rezultă din relația

$$|F(x_n)| \leqslant \frac{N(2+h) + 3K^2B}{12\left(1-\frac{h}{2}\right)} \|x_n - x_{n-1}\|^3.$$

Observații. a) Această teoremă reprezintă o extindere a teoremei lui V. E. Mirakov [7], rapiditatea convergenței rămînînd aceeași.

În ce privește condiția 1°, dacă proprietatea (A) nu are loc, atunci condiția 1° poate fi înlocuită cu următoarea condiție utilizată în lucrarea [3]:

$$\sup_{x \in S} \frac{1}{\|F'(x)\|} = A < B \qquad 1^*)$$

și pe lîngă aceasta are loc proprietatea

$$|F'(x_n)y_n| \geqslant \|F'(x_n)\| - \varepsilon, \quad \|y_n\| = 1, \qquad (A')$$

unde ε este un număr pozitiv mic care satisface inegalitatea

$$\varepsilon < \min\left(\frac{1}{A}, \frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right).$$

În aceste condiții se obține ușor delimitarea

$$\frac{1}{|F'(x_n)y_n|} \leqslant B.$$

Astfel demonstrația teoremei 2, folosind condiția 1*) în loc de 1°, se face în mod analog ca și mai înainte.

2. *Aplicații*. Fie X un spațiu Hilbert real. Considerăm ecuația operațională

$$P(x) = 0,$$

unde $P(x)$ este o operație neliniară definită pe domeniul S și cu valori în X. Introducem notațiile $F(x) = (P(x), P(x)) = \|P(x)\|^2$ și $Q(x_n) = \bar{P}'(x_n)P(x_n)$, unde $\bar{P}'(x_n)$ este operatorul adjunct al operatorului $P'(x_n)$, iar $P'(x_n)$ este derivata Fréchet a operației $P(x)$ pentru elementul x_n. În acest caz avem

$$F'(x_n)\Delta x = 2(Q(x_n), \Delta x), \quad F''(x_n)\Delta x^2 = 2(Q'(x_n)\Delta x, \Delta x).$$

Dacă se alege ca în lucrarea [3]

$$y_n = \frac{Q(x_n)}{\|Q(x_n)\|},$$

atunci se observă că condiția (A) este îndeplinită. În adevăr

$$F'(x_n)y_n = 2\left(Q(x_n), \frac{Q(x_n)}{\|Q(x_n)\|}\right) = 2\|Q(x_n)\| = \|F'(x_n)\|,$$

iar formula de iterație (2″) se prezintă sub forma următoare

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|P(x_n)\|^2}{2\|Q(x_n)\|^2 - \frac{\|P(x_n)\|^2}{\|Q(x_n)\|^2}(Q'(x_n)Q(x_n), Q(x_n))} Q(x_n). \qquad (2''')$$

În condițiile de față teoremele 1 și 2 pot fi formulate astfel

TEOREMA 1′. *Dacă pentru aproximația inițială x_0 avem îndeplinite condițiile*

1′) *există operația $Q(x_0)$ pentru care avem delimitarea*

$$\frac{1}{\|Q(x_0)\|} \leqslant 2B_0$$

2′) *are loc inegalitatea*

$$\frac{\|P(x_0)\|^2}{\left|2\|Q(x_0)\| - \frac{\|P(x_0)\|^2}{\|Q(x_0)\|^3}(Q'(x_0)Q(x_0), Q(x_0))\right|} \leqslant \eta_0$$

3′) *există derivatele Fréchet $Q'(x)$, $Q''(x)$ și pe lîngă aceasta $\|Q'(x)\| \leqslant K$, $\|Q''(x)\| \leqslant N$ pentru $x \in S$.*

4′) $\quad 2B_0K\eta_0 \leqslant 1$ *și* 5′) $R_0 \leqslant 9$,

atunci ecuația operațională $P(x) = 0$ admite o soluție $x^* \in S$ către care tind aproximațiile determinate prin formula de iterație (2‴) și există delimitarea

$$\|x^* - x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0.$$

TEOREMA 2'. *Dacă avem satisfăcute condițiile*

1'') *există operația* $Q(x)$ *pentru care avem*

$$\frac{1}{\| Q(x) \|} \leqslant 2B,$$

pentru orice $x \in S \subset X$, *unde sfera* S *este definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant H\eta$,

2'') *pentru aproximația* x_0 *este satisfăcută relația*

$$\frac{\| P(x_0) \|^2}{\left| 2 \| Q(x_0) \| - \frac{\| P(x_0) \|^2}{\| Q(x_0) \|^3} (Q'(x_0)\, Q(x_0), Q(x_0)) \right|} \leqslant \eta,$$

3'') *pentru derivatele Fréchet* $Q'(x)$ *și* $Q''(x)$ *există delimitările* $\| Q'(x) \| \leqslant K$, $\| Q''(x) \| \leqslant N$ *pentru* $x \in S$,

4'') *sînt îndeplinite inegalitățile* $h < 2$, $hg < 1$, *unde* $h = B\eta K$, *iar* g *este dată de relația* (17), *atunci ecuația operațională* $P(x) = 0$ *admite o soluție* $x^* \in S$ *spre care converg aproximațiile* x_n *date de formula* (2'''), *iar rapiditatea convergenței este dată de relația*

$$\| x^* - x_n \| < H\eta (gh)^{3^n - 1}.$$

О НОВОМ ОБОБЩЕНИИ МЕТОДА КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде дается обобщение метода касательных гипербол для решения нелинейных функциональных уравнений $F(x) = 0$, определенных на пространствах Банаха в том случае когда не существует обратных $[P'(x)]^{-1}$ и Q_n.

SUR UNE NOUVELLE GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DES HYPERBOLES TANGENTES POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES NON-LINÉAIRES DÉFINIES DANS DES ESPACES DE BANACH

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur a donné une extension de la méthode des hyperboles tangentes pour la résolution des équations fonctionnelles non-linéaires $F(x) = 0$, définies dans des espaces de Banach pour le cas où n'existent pas les inverses $[P'(x)]^{-1}$ et Q_n.

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. Канторович, *О метода Ньютона.* Труды мат. Ин-та и. В. А. Стеклова, XXVIII, 104—114 (1949).
2. M. Altman, *Concerning Approximate Solutions of Non-Linear Functional Equations.* Bulletin de l'Acad. Polon., V, 5, 461—465 (1957).
3. M. Altman, *On the Approximate Solution of Non-Linear Functional Equations.* Bulletin de l'Acad. Polon., V, *5*, 457—460 (1957).
4. E. Bodewig, *On Types of Convergence and on the Behavior of Approximations in the Neighborhood of a Multiple Root of an Equation.* Quarterly of Applied Mathematics, VII, 3, 325—333 (1949).
5. Г. С. Салехов, *О сходимости процесса касательных гипербол,* Доклады Акад. Наук СССР, 82, *4*, 525—528 (1952).
6. М. А. Мертвецова, *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений,* Доклады Акад. Наук. 88, *4*, 611—614 (1953)
7. В. Е. Мираков, *О сходимости метода касательных гипербол для нелинейных функциональных уравнений при условии типа коши.* Труды московского физ.-техн. ин-та, I, 204—213 (1958).

Primit la 16 iulie 1960.