OBSERVAŢII ÎN LEGĂTURĂ CU REPREZENTAREA FRACŢIILOR SUBUNITARE CA SUMA UNOR FRACŢII CU NUMĂRĂTORUL EGAL CU UNITATEA

DE

KISS ERNEST

(Cluj)

Lucrare prezentată la cea de a III-a sesiune ştiinţifică a Societăţii ştiinţelor matematice şi fizice din R.P.R., 12—13 februarie 1960, Bucureşti.

În anul 1957 W. Sierpinski a enunţat conjectura că fracţia subunitară $\frac{5}{b}$ $(b > 5)$ se poate reprezenta ca suma a cel mult trei fracţii cu numărătorul 1.

Dacă pentru numere naturale date a şi b notăm cu $N(a, b)$ cel mai mic număr natural n pentru care există numere naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfăcînd ecuaţia

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x_n},$$

atunci conjectura de mai sus se poate enunţa sub forma $N(5, b) \leqslant 3$.

În cele ce urmează se demonstrează următoarea teoremă:

TEOREMĂ. *Dacă* $b < 10.000$ *atunci* $N(5, b) \leqslant 3$, $N(6, b) \leqslant 3$, $N(7, b) \leqslant 3$, $N(12, b) \leqslant 4$, *iar dacă* $b < 200.000$ *atunci* $N(8, b) \leqslant 4$.

Demonstraţie:

Cazul $a = 5$. În acest caz utilizînd metode cunoscute (a se consulta de exemplu [1]), demonstraţia teoremei revine la studiul descompunerii fracţiilor de forma $\frac{5}{9240\,k + x}$, unde $k = 0, 1$, iar x este unul din numerele tabloului de mai jos

1	181	361	541	841	961	1021	1201	1381	1621
1681	1861	2041	2221	2521	2641	2701	2881	2941	3301
3361	3481	3541	3721	3961	4141	4201	4321	4621	4801
4981	5041	5161	5461	5581	5641	5821	6001	6241	6301
6481	6661	6841	7141	7261	7321	7501	7561	7681	7921
7981	8101	8161	8581	8761	8821	8941	9001		

considerîndu-se numai fracţiile în care numitorul $9240\,k + x$ este număr prim mai mic ca 10 000.

Pentru efectuarea descompunerii se întrebuinţează egalitatea

$$\frac{5}{9240\,k+x}=\frac{1}{1848\,k+\dfrac{x+5m-1}{5}}+\frac{5m-1}{(9240\,k+x)\,(1848\,k+\dfrac{x+5m-1}{5})}$$

şi se aplică apoi ultimului termen din membrul drept al acestei identităţi următoarea teoremă stabilită de autor în lucrarea [1] : Fracţia ireductibilă $\frac{a}{b}$ se poate descompune în suma a două fracţii cu numărătorul 1, dacă şi numai dacă numitorul b are doi divizori relativ primi ai căror sumă este un multiplu al numărului a.

Se constată că în cazul $b = 9240k + x < 10.000$, studiul descompunerii fracţiei $\frac{5}{b}$ se reduce la determinarea numerelor naturale minime m pentru cari teorema citată este aplicabilă.

Rezultatele găsite pentru cele 33 de fracţii ai căror numitori sînt numere prime mai mici ca 10.000 sînt următoarele :

b	m	b	m	b	m	b	m	b	m	b	m	b	m	b	m
181	3	541	6	1021	2	1201	2	1381	2	1621	3	2221	2	2521	2
3301	2	3361	2	3541	2	4201	2	4621	2	4801	1	5581	2	5641	2
5821	2	6301	5	6481	2	6661	1	6841	3	7561	4	8101	3	8161	1
8581	2	8761	2	8821	4	8941	2	9001	2	9241	1	9421	3	9601	2
9781	1														

Cazul $a = 6$. În acest caz aplicînd o metodă similară, problema revine la studiul fracţiilor care au numitorul număr prim de forma $b = 2520\ k + x$, unde x este unul din numerele tabloului de mai jos :

1 61 181 361 421 601 781 901 1081 1261 1321
1441 1621 1681 1861 2041 2161 2341.

Rezultatele găsite în acest caz sînt cuprinse în tabloul de mai jos :

b	m	b	m	b	m	b	m	b	m	b	m	b	m
61	2	181	2	361	2	421	2	601	2	1321	1	1621	2
1861	2	2161	1	2341	1	2521	2	3121	2	3301	1	3781	2
4201	2	4561	2	4861	2	5101	1	5641	2	5821	2	6121	2
6301	2	6361	2	6481	1	6661	2	7561	1	7621	2	7741	2
8161	2	8461	1	8641	2	8821	2	9001	1	9181	2	9241	1
9421	2	9601	2	9721	2	9901	1						

Cazul $a = 7$. În acest caz se găseşte că trebuie să descompunem direct fracţiile cari au numitorul de forma $b = 2310\ k + x$, unde x este unul din numerele tabloului de mai jos

1 43 127 211 337 421 463 547 631 673 757
883 967 1051 1093 1261 1387 1471 1513 1597 1681 1723
1807 1891 1933 2017 2143.

Rezultatele găsite în acest caz sînt cuprinse în tabloul următor :

b	m	b	m	b	m	b	m	b	m	b	m	b	m
43	4	127	2	211	2	337	2	421	2	463	2	547	2
631	9	673	3	757	2	883	2	967	2	1051	2	1093	3
1471	4	1597	2	1723	2	1933	3	2017	1	2143	2	2311	2
2437	2	2521	2	2647	2	2731	6	2857	2	3067	2	3361	4
3571	2	3697	1	3823	4	3907	2	4201	4	4243	2	4327	2
4621	2	4663	2	4831	2	4957	2	5167	2	5503	4	5881	1
6007	5	6091	2	6133	3	6217	2	6301	1	6343	2	6427	2
6553	4	6637	2	6763	2	7057	2	7351	2	7393	3	7477	2
7561	1	7687	2	8191	5	8317	1	8443	1	8527	1	8737	2
8821	4	8863	2	9241	2	9283	2	9661	4	9787	2	9871	1

Observaţie. Se constată uşor că în cazurile precedente e suficient să ne mărginim la cazul cînd b este număr prim şi la cazurile particulare

$$\frac{5}{6},\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{9},\ \frac{6}{25},\ \frac{7}{8},\ \frac{7}{10},\ \frac{7}{12},\ \frac{7}{15},\ \frac{7}{25}$$

care admit descompuneri imediate.

Cazul $a = 8$. În acest caz trei fracţii cu numărătorul 1 nu sînt suficiente pentru efectuarea descompunerii pentru orice b.

Într-adevăr fracţia $\frac{8}{11}$ nu se poate descompune în trei fracţii cu numărătorul egal cu unitatea.

Să presupunem că este posibilă descompunerea

$$\frac{8}{11}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$$

şi să presupunem că fracţia $\frac{1}{x_1}$ este cea mai mare dintre cele trei fracţii.

În acest fel avem

$$\frac{8}{11}>\frac{1}{x_1}\geqslant\frac{8}{33},\ \text{adică}\ 2\leqslant x_1\leqslant 4$$

şi în baza teoremei citate, se arată că fracţiile

$$\frac{8}{11}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2.11},\quad \frac{8}{11}-\frac{1}{3}=\frac{13}{3.11},\quad \frac{8}{11}-\frac{1}{4}=\frac{21}{4.11}$$

nu se pot descompune în cîte două fracţii cu numărătorul 1.

În cele ce urmează, afară de cazurile speciale $b = 9,\ 15,\ 21,\ 25,\ 35$ şi 49, trebuesc examinate şi în acest caz numai descompunerea fracţiilor în cazul cînd b este număr prim.

Demonstraţia se bazează pe următoarea lemă :

LEMA. *Dacă $4 < b < 200\,000$ şi b este un număr prim atunci în descompunerea*

$$\frac{4}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

două din numerele x_1, x_2, x_3 sînt pare.

Afirmaţia lemei se demonstrează imediat, în baza egalităţii

$$4\, x_1x_2x_3 = b(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

Ţinînd seamă de faptul că în cazul $4 < b < 200\,000$ fracţia $\frac{4}{b}$ se poate descompune în trei fracţii cu numărătorul 1 (a se vedea [1]), în baza lemei avem

$$\frac{8}{b} = 2 \cdot \frac{4}{b} = 2\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{2y_2} + \frac{1}{2y_3}\right) = \frac{2}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}.$$

În continuare se vede imediat că $\frac{2}{y_1}$ se poate descompune în două fracţii cu numărătorul 1, de exemplu dacă $y_1 = 2k+1$, avem descompunerea $\frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$ şi astfel s-a demonstrat că dacă b satisface inegalitatea $8 < b < 200\,000$, atunci $N(8, b) \leqslant 4$.

Cazul $a = 12$. Se observă că fracţia $\frac{12}{13}$ nu se poate descompune în trei fracţii cu numărătorul 1, iar în baza lemei şi în baza celor stabilite cu ocazia examinării cazului $a = 6$, urmează că dacă $12 < b < 10.000$, atunci $N(12, b) \leqslant 4$.

Observaţie. În baza celor de mai sus, conjectura lui W. Sierpinski şi o conjectură mai veche al lui P. Erdős se pot sintetiza şi complecta în felul următor :

Dacă $4 \leqslant a \leqslant 7$, atunci $N(a, b) \leqslant 3$, iar dacă $8 \leqslant a \leqslant 12$, atunci $N(a, b) \leqslant 4$.

ПРИМЕЧАНИЯ В СВЯЗИ С ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ДРОБЕЙ МЕНЬШЕ ЕДИНИЦЫ В ВИДЕ СУММЫ ДРОБЕЙ С ЧИСЛИТЕЛЕМ РАВНЫМ ЕДИНИЦЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Доказывается следующая теорема:

В случае $b < 10\,000$, если $a = 5, 6, 7$, дробь $\frac{a}{b}$ можно разлагать на три дроби с числителем равным единице; в случае $b < 10\,000$ дробь $\frac{12}{b}$, а в случае $b < 200\,000$ дробь $\frac{8}{b}$ можно разлагать на четыре дроби с числителем равным единице.

В заключении высказывается предположение: *если* $4 \leqslant a \leqslant 7$, *то* $N(a, b) \leqslant 3$, *а если* $8 \leqslant a \leqslant 12$, *то* $N(a, b) \leqslant 4$.

REMARQUES RELATIVES À LA REPRÉSENTATION DES FRACTIONS SUBUNITAIRES EN SOMME DES FRACTIONS AYANT LE NUMÉRATEUR ÉGAL À L'UNITÉ

RÉSUMÉ

On démontre le théorème :

Lorsque $b < 10\,000$, si $a = 5, 6, 7$, la fraction $\frac{a}{b}$ peut être décomposée en trois fractions ayant le numérateur égal a l'unité, lorsque $b < 10\,000$, la fraction $\frac{12}{b}$ et lorsque $b < 200\,000$ la fraction $\frac{8}{b}$ peuvent être décomposées en quatre fractions ayant le numérateur égal à 1.

En guise de conclusion on énonce la conjecture : *Si* $4 \leqslant a \leqslant 7$, *alors* $N(a, b) \leqslant 3$, *et si* $8 \leqslant a \leqslant 12$, *alors* $N(a, b) \leqslant 4$.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Kiss, *Cîteva observaţii în legătură cu o ecuaţie diofantiană*. Studii şi cercet. de mat. (Cluj). X, nr. 1, 59–62 (1959).
2. W. Sierpinski. *O rozkladach liczb wymiernych na ulamki proste*. Warszawa. PWN. 1957,

Primit la 1. XII. 1959.