ASUPRA RAZEI DE STELARITATE A FUNCȚIILOR UNIVALENTE

DE

PETRU T. MOCANU

(Cluj)

Comunicare prezentată la cea de a III-a sesiune științifică a Societății științelor matematice și fizice din R.P.R., 12–13 februarie 1960, București.

1. Fie $w = f(z)$, $f(0) = 0$, o funcție olomorfă și univalentă în cercul $|z| < R$. Se știe că pentru ca această funcție să transforme cercul $|z| \leqslant r$, $r < R$, într-un domeniu stelat în raport cu originea, $w = 0$, este necesar și suficient ca

$$\mathcal{R}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geqslant 0, \quad \text{pentru} \quad |z| \leqslant r.$$

(Notăm cu $\mathcal{R}(\alpha)$ partea reală a numărului complex α).

Dacă inegalitatea de mai sus este satisfăcută pentru $|z| \leqslant r$, zicem că funcția $f(z)$ este *stelată* în cercul $|z| \leqslant r$. Numim *rază de stelaritate* a funcției $f(z)$ marginea superioară a razelor cercurilor cu centrul în origine în care funcția este stelată.

Într-o lucrare anterioară [1] am arătat că raza de stelaritate a funcției $f(z)$ este dată de valoarea minimă a modulelor, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ale soluțiilor sistemului de ecuații

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{R}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] = 0 \\ &\mathcal{R}\left[\frac{zf''(z)}{f(z)}\right] + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

2. Vom aplica acest rezultat în cazul funcției exponențiale.

Să luăm $f(z) = e^z - 1$. Știm că această funcție este olomorfă și univalentă în cercul $|z| < \pi$.

Sistemul (1) devine în acest caz

$$\begin{cases} \mathcal{R}\left[ze^z\left(\overline{e^z}-1\right)\right]=0 \\ \mathcal{R}(z)+1=0. \end{cases}$$

Punînd $z = x + iy$, sistemul se mai scrie

$$\begin{cases} x(e^x-\cos y)+y\sin y=0 \\ x+1=0. \end{cases}$$

Înlocuind pe x cu -1 în prima ecuație, ajungem la următoarea proprietate geometrică a funcției exponențiale :

TEOREMĂ. *Orice cerc cu centrul în origine și de rază cel mult egală cu* $\rho=\sqrt{1+y_0^2}$, *unde* y_0 *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației*

$$y\sin y+\cos y-\frac{1}{e}=0 \tag{2}$$

este transformat prin funcția $w=e^z$ *într-un domeniu stelat în raport cu punctul* $w=1$.

Pentru y_0 și ρ se găsesc următoarele valori aproximative :

$$y_0\approx 2{,}65,\quad \rho\approx 2{,}83.$$

3. Să considerăm clasa S a funcțiilor $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, olomorfe și univalente în cercul unitate, $|z|<1$.

Fie $f(z)$ și $g(z)$ două funcții oarecare din clasa S. Vom spune că funcția f este g — *stelată* în cercul $|z|\leqslant r$, dacă

$$\mathcal{R}\left[\frac{zf'(z)}{g(z)}\right]\geqslant 0,\ \text{pentru } |z|\leqslant r. \tag{3}$$

Vom numi *rază de g — stelaritate* a funcției $f(z)$ marginea superioară a razelor cercurilor cu centrul în origine în care funcția f este g — stelată.

Se vede imediat că problema aflării razei de g — stelaritate a funcției f (atunci cînd funcțiile f și g sînt date în clasa S) revine la a găsi distanța minimă dela origine, $z=0$, la punctele depe curba dată de ecuația

$$\mathcal{R}\left[\frac{zf'(z)}{g(z)}\right]=0, \tag{4}$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{zf'}{g}+\frac{\bar z\,\overline{f'}}{\bar g}=0. \tag{5}$$

Deci trebuie găsit minimul expresiei $z\bar z$, știind că z și $\bar z$ verifică relația (5). Fiind în cazul unei probleme de extremum legat, vom considera expresia

$$\Phi=z\bar z+\lambda\left[\frac{zf'}{g}+\frac{\bar z\,\overline{f'}}{\bar g}\right]$$

și va trebui să eliminăm parametrul real λ dintre ecuațiile

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0\quad\text{și}\quad\frac{\partial\Phi}{\partial\bar z}=0,$$

adică dintre ecuațiile

$$\bar z+\lambda\,\frac{g(f'+zf'')-zf'g'}{g^2}=0$$

$$z+\lambda\,\frac{\bar g(\overline{f'}+\bar z\overline{f''})-\bar z\,\overline{f'}\,\overline{g'}}{\bar g^2}=0,$$

pe care le mai putem scrie și sub forma

$$\bar z g+\lambda\left[f'+z\left(f''-\frac{f'g'}{g}\right)\right]=0$$

$$z\bar g+\lambda\left[\overline{f'}+\bar z\left(\overline{f''}-\frac{\overline{f'}\,\overline{g'}}{\bar g}\right)\right]=0.$$

Înmulțind prima ecuație cu $\overline{f'}$ și a doua cu f' și ținînd seamă de (5), se deduce relația

$$zf''\overline{f'}+\bar z\overline{f''}f'+2f'\overline{f'}-f'\overline{f'}\left[\frac{\bar z\overline{g'}}{\bar g}+\frac{zg'}{g}\right]=0,$$

de unde, împărțind cu $f'\overline{f'}$, se obține ecuația

$$\mathcal{R}\left(\frac{zf''}{f'}\right)+1=\mathcal{R}\left(\frac{zg'}{g}\right). \tag{6}$$

Deci punctul depe curba (4), care se află la distanța minimă de origine, verifică și ecuația (6). De aici rezultă imediat următoarea teoremă :

TEOREMĂ. *Raza de g — stelaritate a funcției* $f(z)$ *este dată de valoarea minimă a modulelor,* $r=\sqrt{x^2+y^2}$, *ale soluțiilor sistemului de ecuații*

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{R}\left[\frac{zf'(z)}{g(z)}\right]=0 \\ &\mathcal{R}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]+1=\mathcal{R}\left[\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Se vede că dacă $g=f$, sistemul (7) se reduce la (1). De fapt, dacă funcția f este f — stelată, atunci ea este stelată în sensul obișnuit.

4. Este interesant de văzut dacă este, sau nu este valabilă următoarea proprietate : Oricare ar fi funcția $f(z)\in S$, putem găsi o funcție $g(z)\in S$, așa ca f să fie g — stelată în cercul unitate. Dacă această proprietate nu ar fi valabilă chiar în cercul unitate se pune atunci problema găsirii cercului cu centrul în origine, de rază maximă, în care proprietatea este adevărată.

5. Relativ la funcţiile $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$ din clasa S, este binecunoscută ipoteza lui Bieberbach

$$|a_n| \leqslant n, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{8}$$

care pînă acum nu a putut fi demonstrată decît pînă la $n = 4$. Ea s-a putut demonstra însă pentru diferite subclase ale clasei S.

Să notăm cu $S^{(1)}$ subclasa funcţiilor din S, care sînt stelate în cercul unitate. Se ştie că aceste funcţii verifică ipoteza (8). Notăm cu $S^{(2)}$ subclasa funcţiilor din S, definită în modul următor: funcţia $f(z) \in S$ aparţine subclasei $S^{(2)}$ dacă există o funcţie $g(z)$ din $S^{(1)}$ astfel ca f să fie g — stelată în cercul unitate.

Evident că $S^{(1)} \subset S^{(2)} \subset S$.

Din aproape în aproape se poate considera şirul de subclase

$$S^{(1)} \subset S^{(2)} \subset S^{(3)} \ldots \subset S^{(m)} \subset \ldots \subset S$$

definite, prin recurenţă, în modul următor: funcţia $f(z) \in S$ aparţine subclasei $S^{(m)}$ dacă există o funcţie $g(z) \in S^{(m-1)}$ aşa ca $f(z)$ să fie g — stelată în cercul unitate.

Prin inducţie completă, se poate demonstra că ipoteza (8) este valabilă pentru orice subclasă $S^{(m)}$.

Într-adevăr, dacă $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots \in S^{(m)}$ atunci există o funcţie $g(z) = z + b_2z^2 + \ldots + b_nz^n + \ldots \in S^{(m-1)}$, aşa încît

$$\mathcal{R}\left[\frac{zf'(z)}{g(z)}\right] > 0 \quad \text{pentru} \quad |z| < 1.$$

Presupunînd ipoteza (8) valabilă pentru $S^{(m-1)}$, avem $|b_n| \leqslant n$ pentru orice n. Pe de altă parte se ştie că dacă

$$\mathcal{R}\,[h(z)] > 0, \quad \text{pentru} \quad |z| < 1,$$

unde

$$h(z) = 1 + C_1z + \ldots + C_nz^n + \ldots$$

atunci

$$|C_n| \leqslant 2, \quad \text{pentru} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dacă notăm

$$h(z) = \frac{zf'(z)}{g(z)} = 1 + C_1z + \ldots + C_nz^n + \ldots$$

avem relaţia de recurenţă

$$na_n = C_{n-1} + b_2C_{n-2} + \ldots + b_{n-1}C_1 + b_n,$$

de unde rezultă

$$n|a_n| \leqslant |C_{n-1}| + |b_2||C_{n-2}| + \ldots + |b_{n-1}||C_1| + |b_n| \leqslant$$
$$\leqslant 2(1 + 2 + \ldots + n) + n = n^2,$$

deci

$$|a_n| \leqslant n.$$

Univ. „Babeş-Bolyai" Cluj
Catedra de Teoria funcţiilor

О РАДИУСЕ ЗВЁЗДООБРАЗИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Применяя ранний результат [1] находится радиус звездообразия функции $w = e^z - 1$.

Потом рассматривается класс S функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, голоморфных и однолистных в окружности $|z| < 1$. Пусть $f(z) \in S$ и $g(z) \in S$. Будем говорить, что функция $f(z)$ является g-звездчатой в окружность $|z| \leqslant r$, если в этой окружности верно неравенство (3). Называем радиусом g-звездообразия функции f, точную верхнюю границу радиусов окружностей с центром в начале координат, в которых функция f является g-звездчатой. Нашли что *радиус g-звездообразия функции f дается наименьшим значением модулей $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ решений системы уравнений* (7).

При помощи выше введенного понятия можно построить последовательность подклассcв класса S, для которых предположение Бибербаха $|a_n| \leqslant n$ удовлетворяется.

SUR LE RAYON DE STELLARITÉ DES FONCTIONS UNIVALENTES

RÉSUMÉ

En appliquant un résultat antérieur [1], on trouve le rayon de stellarité de la fonction $w = e^z - 1$.

Puis on considère la classe S des fonctions $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, holomorphes et univalentes dans le cercle $|z| < 1$. Soient $f(z) \in S$ et $g(z) \in S$. On dira que la fonction $f(z)$ est g-étoilée dans le cercle $|z| \leqslant r$, si dans ce cercle l'inégalité (3) est vérifiée. On appelle rayon de g — stellarité de la fonction f la borne supérieure des rayons des cercles aux centres à l'origine, dans lesquels la fonction f est g-étoilée. On trouve que *le rayon de g-stellarité de la fonction f est donné par la valeur minima des modules, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, des solutions du systéme d'équations* (7).

Moyennant la notion introduite ci-dessus, on construit une suite de sous-classes de S pour lesquelles l'hypothèse de Bieberbach $|a_n| \leqslant n$, est vérifiée.

BIBLIOGRAFIE

1. P. T. Mocanu, *O problemă variaţională relativă la funcţiile univalente*. Studia Universitatum Victor Babeş et Bolyai, III, *3*, 119–127 (1958).

Primit la 25. V. 1960.