ASUPRA UNOR INEGALITĂŢI ÎNTRE MEDII *)

DE

TIBERIU POPOVICIU

Membru corespondent al Academiei R. P. R.

(Cluj)

1. Fie

$$a_1, a_2, \ldots \tag{1}$$

un şir (finit sau infinit) de numere. Presupunînd termenii şirului nenegativi, fie $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ media aritmetică şi $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ media geometrică a primilor n termeni $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ai acestui şir. L. C e a k a l o v a demonstrat [1] următoarele două proprietăţi :

I. *Şirul*

$$n(A_n - G_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

este nedescrescător.

II. *Dacă şirul* (1) *este nedescrescător, şirul*

$$\frac{n^2}{n-1}(A_n - G_n), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

este de asemenea nedescrescător.

Pentru a generaliza această proprietate vom studia monotonia şirurilor care se deduc din (2), (3), înlocuind media geometrică G_n prin medii ,,cuasiaritmetice'' mai generale.

2. Vom presupune totdeauna că $f = f(x)$ este o funcţie de o variabilă reală x, *continuă* pe un interval deschis I. Dacă f este o funcţie strict monotonă (crescătoare sau descrescătoare) vom nota cu $F = F(x)$ funcţia sa inversă, care este de asemenea, definită, continuă şi strict monotonă de acelaşi sens cu f (crescătoare resp. descrescătoare) pe un interval deschis

---

*) Lucrarea a apărut în limba rusă în ,,Mathematica'' 1 (24).

I'. Acest lucru are loc, în particular, dacă f are o derivată care nu se anulează pe I. În acest caz F are de asemenea o derivată care nu se anulează şi este de acelaşi semn cu derivata lui f, pe tot intervalul I'.

Dacă termenii şirului (1) aparţin intervalului I şi dacă f este strict monotonă, media cuasi-aritmetică

$$M_n(f) = F\left(\frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n}\right) \tag{4}$$

a primilor n termeni ai şirului (1) este definită pentru $n = 1, 2, \ldots$

Înainte de a merge mai departe să observăm că, în anumite cazuri, putem prelungi prin continuitate definiţia lui f şi a lui $M_n(f)$ pe o extremitate, presupusă finită, a intervalului I. În felul acesta funcţia f şi media (4) vor avea valori bine determinate (proprii sau improprii) chiar dacă unele sau toate numerele a_i coincid cu o astfel de extremitate. De exemplu, în cazul mediei geometrice, la care se reduce media (4) pentru funcţia $f = \ln x$, putem lua $M_n(f) = 0$ dacă cel puţin unul din numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este egal cu 0. În cele ce urmează nu vom insista asupra unor astfel de prelungiri, deoarece rezultatele referitoare la monotonia unor şiruri de tipul celor considerate rămîn în general valabile şi se obţin printr-o trecere la limită. Astfel, de exemplu, este suficient să demonstrăm monotonia şirului (2) în cazul numerelor a_i toate pozitive, pentru a deduce că proprietatea rămîne valabilă şi în cazul cînd numerele a_i sînt negative.

3. Avem următoarea :

TEOREMA 1. *Dacă funcţia f este strict monotonă, dacă termenii şirului (1) aparţin intervalului I şi dacă şirul (1) este monoton, şirul*

$$M_n(f),\ n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

este de asemenea monoton şi anume de acelaşi sens cu şirul (1).

Dacă, în aceste condiţii, termenii şirului (1) nu sînt toţi egali, şirul (5) este strict monoton, începînd cu un anumit indice n (cu alte cuvinte există un număr natural m astfel ca şirul $M_n(f)$, $n = m, m + 1, \ldots$ să fie strict monoton).

Ipotezele teoremei pun în evidenţă 4 alternative deoarece funcţia f poate să fie crescătoare sau descrescătoare iar şirul (1) poate să fie nedescrescător sau necrescător.

Să demonstrăm teorema în alternativa în care f este crescător şi şirul (1) nedescrescător. Fie, în general,

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{m-1} < a_m < a_{m+1} \leq \ldots$$

Avem

$$f(a_i) \leq f(a_n),\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{6}$$

de unde deducem

$$\frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-1})}{n-1} \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n}, \tag{7}$$

prin urmare şi

$$M_{n-1}(f) \leq M_n(f). \tag{8}$$

Dacă $n \geq m$, egalitatea nu este posibilă în toate formulele (6), deci nu este posibilă nici în formula (7) şi deci nici în (8).

Teorema este deci demonstrată în alternativa considerată.

Demonstraţia se face la fel şi în celelalte 3 alternative semnalate.

4. În cele ce urmează vom avea nevoie de unele proprietăţi cunoscute ale funcţiilor convexe obişnuite (de ordinul 1) sau convexe de ordinul 2. Vom reaminti unele dintre aceste proprietăţi.

O funcţie $\varphi = \varphi(x)$, definită pe un interval I este *neconcavă* respectiv *neconvexă* de ordinul n, dacă diferenţa sa divizată de ordinul $n + 1$ pe $n + 2$ puncte (distincte) oarecari ale lui I este tot timpul nenegativă respectiv nepozitivă. Dacă notăm cu $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \varphi]$ diferenţa divizată de ordinul $n + 1$ a funcţiei φ pe punctele sau *nodurile* (distincte) $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, neconcavitatea respectiv neconvexitatea de ordinul n a funcţiei φ pe intervalul I este caracterizată de inegalitatea

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \varphi] \geq 0 \text{ respectiv } \leq 0, \tag{9}$$

oricare ar fi nodurile (distincte) $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \in I$.

În particular, dacă egalitatea nu are loc nici odată în (9), funcţia φ se zice *convexă* respectiv *concavă* de ordinul n pe I.

Dacă $n = 0$ regăsim funcţiile nedescrescătoare respectiv necrescătoare şi, în particular cele crescătoare respectiv descrescătoare. Funcţiile de ordinul 0 sînt deci funcţiile monotone.

Pentru ca o funcţie φ *continuă* pe intervalul I să fie neconcavă respectiv neconvexă de ordinul n, este necesar şi suficient ca inegalitatea (9) să fie verificată numai pe noduri echidistante.

Fie

$$[x, x+h, \ldots, x + \overline{n+1}\,h;\ \varphi] = \frac{1}{(n+1)!\,h^{n+1}} \Delta_h^{n+1} \varphi(x), \tag{10}$$

unde

$$\Delta_h^{n+1} \varphi(x) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} \varphi(x + ih).$$

Atunci condiţia necesară şi suficientă ca funcţia φ, continuă pe I, să fie convexă, neconcavă, neconvexă respectiv concavă de ordinul n (pe I) este ca să avem

$$\Delta_h^{n+1} \varphi(x) > 0,\ \geq 0,\ \leq 0, \text{ respectiv } < 0,$$

pentru orice x, $x + \overline{n+1}\,h \in I$, $h > 0$. Aici, pentru n impar, condiţia $h > 0$ se poate înlocui cu $h \neq 0$.

O funcţie definită şi de ordinul $n > 0$ pe I este continuă pe I (reamintim că I este un interval deschis). O funcţie definită şi de ordinul $n > 1$ pe I admite o derivată continuă pe I. Dacă funcţia este convexă, neconcavă, neconvexă respectiv concavă de ordinul $n \geqq 1$ derivata sa φ', presupusă existentă, este convexă, neconcavă, neconvexă respectiv concavă de ordinul $n - 1$. Inegalitatea $\varphi^{(n+1)} \geqq 0$ respectiv $\leqq 0$ pentru orice $x \in I$ este necesară şi suficientă pentru ca funcţia de $n + 1$ ori derivabilă φ să fie neconcavă respectiv neconvexă de ordinul n pe I. Inegalitatea $\varphi^{(n+1)} > 0$ respectiv < 0 pentru orice $x \in I$ este suficientă pentru ca funcţia de $n + 1$ ori derivabilă φ să fie convexă respectiv concavă de ordinul n pe I.

5. Să revenim la proprietatea I a lui L. Ceakalov. Şirul (2) îl putem generaliza prin şirul

$$n(A_n - M_n(f)), \quad n = 1, 2, \dots \tag{11}$$

Avem atunci

TEOREMA 2. *Dacă funcţia f este strict monotonă, pentru ca şirul* (11) *să fie nedescrescător respectiv necrescător pentru orice şir* (1) *ai cărui termeni aparţin lui I, este necesar şi suficient ca funcţia inversă F a lui f să fie neconcavă respectiv neconvexă de ordinul* 1.

Să punem, pentru simplificare,

$$B_n = \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n} = f(M_n(f)), \quad n = 1, 2, \dots \tag{12}$$

pentru media aritmetică a primilor n termeni ai şirului

$$f(a_1), f(a_2), \dots \tag{13}$$

şi să notăm cu $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = n(A_n - M_n(f)) - (n-1)(A_{n-1} - M_{n-1}(f))$ diferenţa dintre doi termeni consecutivi ai şirului (11). Avem

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_n - nF(B_n) + (n-1)F(B_{n-1}) =$$
$$= F(f(a_n)) - nF(B_n) + (n-1)F(B_{n-1}).$$

Din formula

$$f(a_n) - B_n = \frac{n-1}{n}(f(a_n) - B_{n-1}),$$

se deduce că numerele $B_{n-1}, B_n, f(a_n)$ sînt sau distincte sau toate egale, după cum $f(a_n)$ este diferit sau egal cu B_{n-1}. Avem deci

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n-1}{n}(f(a_n) - B_{n-1})^2 [B_{n-1}, B_n, f(a_n); F],$$

membrul al doilea fiind înlocuit cu 0 dacă $f(a_n) = B_{n-1}$. Rezultă de aici suficienţa condiţiei teoremei.

Dacă $x, x + 2h \in I'$ şi dacă luăm $a_1 = F(x)$, $a_2 = F(x + 2h)$, avem $D(a_1, a_2) = \Delta_h^2 F(x)$, de unde rezultă imediat necesitatea condiţiei teoremei.

Teorema 2 este demonstrată.

6. Pentru a generaliza proprietatea II a lui L. Ceakalov luăm, în loc de şirul (3), şirul

$$\frac{n^2}{n-1}(A_n - M_n(f)), \quad n = 2, 3, \dots \tag{14}$$

Avem atunci

TEOREMA 3. *Dacă funcţia F este strict monotonă pe I', pentru ca şirul* (14) *să fie nedescrescător pentru orice şir* (1) *nedescrescător şi avînd termenii în I, este suficient ca funcţia inversă F să fie*:

a) neconcavă de ordinul 1 *şi*

b) neconcavă respectiv neconvexă de ordinul 2 *după cum f este crescătoare respectiv descrescătoare.*

Pentru demonstraţie vom folosi metoda dată de L. Ceakalov [1] pentru şirul (3).

Vom presupune întîi că F, deci şi f are o derivată care nu se anulează pe I' respectiv pe I.

Notăm cu ($n > 2$)

$$E(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n^2}{n-1}(A_n - M_n(f)) - \frac{(n-1)^2}{n-2}(A_{n-1} - M_{n-1}(f))$$

diferenţa dintre doi termeni consecutivi ai şirului (14).

Pentru fiecare $k = 0, 1, \dots, n-1$ funcţia $E_k = E_k(x)$, care se deduce din $E(a_1, a_2, \dots, a_n)$ punînd $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_n = x$, este continuă şi derivabilă pe I.

În ceea ce urmează va fi destul să presupunem $a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_n$.

Să considerăm mediile (12) în care punem $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_n = x$. Ţinînd seamă de formula $f'(x) F'(f(x)) = 1$, un calcul simplu ne da derivata funcţiei E_k sub forma

$$E_k' = f'(x) \left\{ \frac{n(n-k)}{n-1} [F'(f(x)) - F'(B_n)] - \right.$$
$$\left. - \frac{(n-1)(n-k-1)}{n-2} [F'(f(x)) - F'(B_{n-1})] \right\}$$

Formulele

$$f(x) - B_n = \frac{k}{n}[f(x) - B_k], \quad f(x) - B_{n-1} = \frac{k}{n-1}[f(x) - B_k]$$

ne arată că, pentru $k \geqq 1$ şi $x > a_k$, punctele $f(x)$, B_n, B_{n-1} din I' sînt distincte, deoarece $f(x) > B_k$ respectiv $f(x) < B_k$ după cum f este crescătoare respectiv descrescătoare. Un calcul, care este inutil să fie reprodus în detaliu, ne dă atunci

$$E_k' = \frac{kf'(x)\,[f(x) - B_k]}{n(n-1)(n-2)} \{ n(k-1)[f(x), B_n; F'] +$$
$$+ k(n-k-1)\,[f(x) - B_k]\,[f(x), B_n, B_{n-1}; F']\}. \tag{15}$$

Dar, $f'(x)$, $f(x) - B_k$ sînt pozitivi respectiv negativi după cum f, deci F este crescătoare respectiv descrescătoare. Formula (15) ne arată că dacă F

satisface condiţiile *a*), *b*) ale teoremei 3, avem $E_k' \geqq 0$ pentru $x > a_k$ şi $k = 1, 2, \ldots, n-1$. De aici rezultă că funcţiile E_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ sînt nedescrescătoare pentru $x \geqq a_k$. Deducem de aici că

$$E(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqq E(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n-1}) \geqq$$

$$\geqq E(a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-2}, a_{n-2}) \geqq \ldots \geqq E(a_1, a_1, \ldots, a_1) = E_0(a_1).$$

Însă, $E_0 = 0$ oricare ar fi x, deci $E(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqq 0$, tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

Este uşor de văzut că dacă, în plus F este convexă de ordinul 2 şi dacă şirul (1) nedescrescător nu are toţi termenii egali, sau dacă F este convexă de ordinul 1 şi dacă (1) nedescrescător are cel puţin 3 termeni numeric distincţi, şirul (14) este crescător începînd cu un anumit indice n.

Putem acum înlătura restricţia făcută la începutul demonstraţiei. Funcţia F fiind de ordinul 2, este continuă pe I'. Pentru fixarea ideilor să presupunem că F este crescător. Atunci funcţia $F_\varepsilon = F + \varepsilon x$ este de asemenea crescătoare şi îndeplineşte condiţiile *a*), *b*) din teoremă, pentru orice $\varepsilon > 0$. În plus derivata lui F_ε nu se anulează pe I' şi se poate deci aplica teorema 3 funcţiei F_ε. Dar, pentru $\varepsilon \to 0$, funcţia F_ε tinde uniform către F pe orice interval finit şi închis şi dacă f_ε este funcţia inversă a lui F_ε, aceasta tinde uniform către f pe acelaş interval. Rezultă imediat că $M_n(f_\varepsilon)$ tinde către $M_n(f)$ pentru $\varepsilon \to 0$. La fel se raţionează dacă F este descrescător, presupunînd atunci $\varepsilon < 0$. Teorema 3 se poate deci deduce prin o trecere la limită din cazul particular demonstrat.

7. De la şirurile (1), (14) putem cere să fie nedescrescătoare sau necrescătoare, deci să îndeplinească una din cele 4 alternative pe care le notăm cu m_1, m_2, m_3, m_4 şi pe care le punem în evidenţă în tabloul alăturat.

		şirul (1)	
		nedescr.	necresc.
Şirul (14)	nedescr.	m_1	m_3
	necresc.	m_2	m_4

Teorema 3 este referitoare la alternativa m_1. O teoremă analoagă se poate enunţa şi demonstra pentru fiecare din celelalte 3 alternative.

În cazul alternativei m_2 condiţiile *a*), *b*) la care este supusă funcţia F se înlocuiesc respectiv cu :

a') *neconvexă de ordinul* 1,

b') *neconcavă respectiv neconvexă de ordinul* 2, *după cum f este descrescătoare sau crescătoare.*

În alternativele m_3, m_4 se studiază semnul derivatelor (15) pentru $x < a_k$, unde prespunem acum că $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$. În aceste cazuri $f'(x)$, $f(x) - B_k$ sînt de semne contrare pentru $x < a_k$ şi se găseşte că condiţiile *a*), *b*) la care este supusă funcţia trebuiesc înlocuite cu *a*), *b'*) pentru alternativa m_3 şi cu *a'*), *b*) pentru alternativa m_4.

8. Se pune problema dacă condiţiile *a*), *b*) din teorema 3 sînt şi necesare pentru ca şirul (14) să fie nedescrescător cînd şirul (1) este nedescrescător?

Pentru ca şirul (14) să fie nedescrescător este necesar, în particular, să avem

$$2E(a_1, a_2, a_3) = 3a_3 - a_1 - a_2 - 9F\left(\frac{f(a_1) + f(a_2) + f(a_3)}{3}\right) +$$

$$+ 8F\left(\frac{f(a_1) + f(a_2)}{2}\right) \geqq 0.$$

Deducem de aici că, în condiţiile teoremei 3, funcţia F trebuie să verifice inegalitatea

$$3F(x_3) - F(x_1) - F(x_2) - 9F\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}\right) + 8F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqq 0$$

pentru orice $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ dacă f este crescătoare şi pentru orice $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3$ dacă f este descrescătoare.

Dacă f este crescător, punînd întîi $x_1 = x_2 = x$, $x_3 = x + 3h$ şi apoi $x_1 = x$, $x_2 = x_3 = x + 6h$, deducem că funcţia F trebuie să verifice inegalităţile

$$[x, x + h, x + 3h; F] \geqq 0, \tag{16}$$

$$[x, x + 3h, x + 4h, x + 6h; F] \geqq 0, \tag{17}$$

pentru orice x, h astfel ca $h > 0$ şi $x, x + 3h \in I'$ respectiv $x, x + 6h \in I'$. Acest rezultat se obţine observînd că, pe baza formulei (10), membrul întîi al inegalităţilor (16), (17) se poate înlocui cu

$$F(x + 3h) - 3F(x + h) + 2F(x),$$

$$2F(x + 6h) - 9F(x + 4h) + 8F(x + 3h) - F(x) \text{ respectiv.}$$

În acelaşi fel, dacă f este descrescătoare, făcînd întîi $x_1 = x_2$ şi apoi $x_2 = x_3$, deducem că funcţia F trebuie să verifice inegalităţile

$$[x, x + 2h, x + 3h; F] \geqq 0, \tag{18}$$

$$[x, x + 2h, x + 3h, x + 6h; F] \leqq 0, \tag{19}$$

sub aceleaşi restricţii impuse lui x şi h.

9. Avem următoarea :

LEMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia* φ *continuă pe* I *să fie convexă, neconcavă, neconvexă respectiv concavă de ordinul* 1 *pe* I, *este ca să avem,*

$$[x, x + h, x + 3h; \varphi] > 0, \geqq 0, \leqq 0, \text{ respectiv } < 0,$$

pentru orice x, $x + 3h \in I$, $h > 0$.

Condiţia este evident necesară. Rămîne să arătăm că ea este şi suficientă. Observînd că convexitatea respectiv concavitatea sînt cazuri particulare ale neconcavităţii respectiv neconvexităţii (de acelaşi ordin), că schimbînd semnul funcţiei φ (luînd funcţia $-\varphi$ în loc φ) se schimbă sensul convexităţii sale (convexitatea cu concavitatea şi în general neconcavitatea cu neconvexitatea) şi că dacă funcţia φ este de ordinul 1 iar $[x_1, x_2, x_3; \varphi] = 0$, pentru punctele date $x_1 < x_2 < x_3$, atunci avem

$[x'_1, x'_2, x'_3; \varphi] = 0$, oricare ar fi punctele distincte $x'_1, x'_2, x'_3 \in [x_1, x_3]$, deducem că este suficient să demonstrăm că dacă

$$[x, x+h, x+3h; \varphi] \geqq 0, \quad x, x+3h \in I, \quad h > 0, \tag{20}$$

funcţia φ este neconcavă de ordinul 1.

Dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+2}$ $(m \geqq 1)$, avem următoarea formulă de medie

$$[x_1, x_{m+1}, x_{m+2}; \varphi] = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; \varphi], \tag{21}$$

coeficienţii γ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ fiind independenţi de funcţia φ şi

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1, \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{22}$$

Avem de altfel,

$$\gamma_i = \frac{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+2} - x_i)}{(x_{m+1} - x_1)(x_{m+2} - x_1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Dacă, în particular, luăm $x, x + 2h \in I$, $h > 0$ şi

$$x_i = x + \frac{2(2^{i-1} - 1)h}{2^{m+1} - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m+2,$$

avem

$$x_{i+1} = x_i + \frac{2^i h}{2^{m+1} - 1}, \quad x_{i+2} = x_i + \frac{3 \cdot 2^i h}{2^{m+1} - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

şi ţinînd seamă de (20), (21), (22), deducem

$$\left[x, x + \frac{2(2^m - 1)h}{2^{m+1} - 1}, x + 2h; \varphi\right] \geqq 0.$$

Bazîndu-ne pe continuitatea funcţiei φ, putem trece la limită, făcînd $m \to \infty$, şi deducem $[x, x+h, x+2h; \varphi] \geqq 0$, deci $\Delta_h^2 \varphi(x) \geqq 0$, pentru $x, x + 2h \in I$, de unde, pe baza celor spuse la nr. 4, rezultă neconcavitatea de ordinul 1 a funcţiei φ.

Lema 1 este deci demonstrată.

10. Putem acum deduce

CONSECINŢA 1. *Condiţia a) impusă funcţiei F din teorema 3, este necesară pentru ca şirul (14) să fie nedescrescător pentru orice şir (1) nedescrescător.*

Dacă f este crescător proprietatea rezultă din inegalitatea (16) şi din lema 1 aplicată funcţiei F.

Dacă f este descrescător, observăm că funcţiile $F(x)$, $F(-x)$ sînt în acelaşi timp neconcave sau neconvexe de ordinul 1 şi că dacă funcţia $F(x)$ verifică inegalitatea (18), funcţia $F(-x)$ verifică inegalitatea (16). Bineînţeles intervalele de definiţie ale funcţiilor $F(x)$, $F(-x)$ sînt convenabil precizate. Consecinţa 1 rezultă şi de data aceasta din lema 1. Se mai poate proceda, sau reproducînd întreg raţionamentul de mai sus pentru $h < 0$ în loc de $h > 0$, sau stabilind direct o lemă analoagă cu lema 1 pentru diferenţele divizate de forma $[x, x+2h, x+3h; \varphi]$ cu $h > 0$. Lăsăm pe seama cetitorului stabilirea acestei leme.

Se demonstrează la fel că condiţiile *a*), *a'*) din teoremele corespunzătoare relative la alternativele m_2, m_3, m_4 sînt de asemenea necesare.

11. Vom demonstra, însă numai într-un caz particular, că condiţia *b*) din teorema 3 este de asemenea necesară. Avem

CONSECINŢA 2. *Condiţia b) din teorema 3, impusă funcţiei F, presupusă de trei ori continu derivabilă pe I', este necesară pentru ca şirul (14) să fie nedescrescător pentru orice şir* (1) *nedescrescător.*

Să presupunem că f este crescătoare. Vom arăta că derivata a treia F''', presupusă existentă şi continuă pe I', este nenegativă pe I'. Să presupunem contrarul. Atunci există un subinterval $[\alpha, \beta]$ a lui I', cu $\alpha < \beta$ şi pe care avem $F''' < 0$. Funcţia F este atunci concavă de ordinul 2 pe $[\alpha, \beta]$ deci dacă $x, x + 6h \in [\alpha, \beta]$, $h > 0$, avem $[x, x+3h, x+4h, x+6h; F] < 0$, ceea ce contrazice inegalitatea (17). Rezultă că avem $F''' \geqq 0$ pentru $x \in I'$. Se deduce că F este neconcav de ordinul 2 pe I' şi consecinţa 2 este demonstrată în acest caz.

La fel, bazîndu-ne pe inegalitatea (19) se demonstrează consecinţa 2 cînd f este descrescător.

Se demonstrează în mod analog că condiţiile *b*), *b'*) din teoremele corespunzătoare alternativelor m_2, m_3, m_4, sînt de asemenea necesare în ipoteza că F are o derivată de ordinul 3 continuă.

12. Cu aceleaşi notaţii ca pînă acum, să considerăm, în loc de şirul (11), şirul

$$n\left[\frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n} - f(A_n)\right], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Acest şir revine la (11) dacă înlocuim şirul (1) cu (13) şi dacă schimbăm între ele funcţiile f şi F. Din teorema 2 rezultă deci o proprietate analoagă referi oare la şirul (23). Avem însă o proprietate ceva mai generală deoarece şirul (23) este întrucîtva mai simplu decît şirul (11), neconţinînd funcţia inversă a lui f. Este deci de prevăzut că nici un caracter de monotonie a funcţiei f nu va interveni în mod necesar.

Avem următoarea :

TEOREMA 4. *Pentru ca şirul* (23) *să fie nedescrescător respectiv necrescător, pentru orice şir* (1) *ai cărui termeni aparţin lui I, este necesar şi suficient ca funcţia f să fie neconcavă respectiv neconvexă de ordinul* 1.

Demonstrația, ca și în cazul teoremei 2, rezultă imediat dacă observăm că diferența dintre doi termeni consecutivi (al n-lea și al $(n-1)$-lea) ai șirului (23) este egală cu

$$f(a_n) - nf(A_n) + (n-1)f(A_{n-1}) = \frac{n-1}{n}(a_n - A_{n-1})^2[A_{n-1}, A_n, a_n; f]$$

dacă $a_n \neq A_{n-1}$ și este egală cu 0 dacă $a_n = A_{n-1}$.

13. În loc de șirul (14) să considerăm șirul

$$\frac{n^2}{n-1}\left[\frac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)}{n} - f(A_n)\right], \quad n = 2, 3, \ldots \qquad (24)$$

care revine la (14) prin aceleași schimbări prin care șirul (23) revine la (11).

Avem o proprietate analoagă cu aceea exprimată de teorema 3 și care se enunță astfel

TEOREMA 5. *Pentru ca șirul* (24) *să fie nedescrescător pentru orice șir* (1) *nedescrescător, ai cărui termeni aparțin lui I, este suficient ca funcția f să fie :*

a) *neconcavă de ordinul* 1 *și*

c) *neconcavă de ordinul* 2.

Demonstrația este analoagă cu aceea a teoremei 3. Va fi deci destul numai să o schițăm aici.

Să notăm cu $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ diferența dintre doi termeni consecutivi (al $(n-1)$-lea și al $(n-2)$-lea, $n > 2$) ai șirului (24). Fie $\Phi_k = \Phi_k(x)$ funcția de x care se deduce din $\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, punînd $a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots = a_n = x$. În fine, pentru demonstrație presupunem $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$.

Funcția f fiind de ordinul 2 are o derivată continuă pe I. Rezultă că funcțiile Φ_k sînt continue și au o derivată continuă pe I.

Dacă $k \geqq 1$, $a_k < x \in I$, punctele x, A_n, A_{n-1} ale lui I sînt distincte și obținem derivatele funcțiilor Φ_k sub forma

$$\Phi_k' = \frac{k(x-A_k)}{n(n-1)(n-2)}\{n(k-1)[x, A_n; f'] + $$
$$+ k(n-k-1)(x-A_k)[x, A_n, A_{n-1}; f']\},$$

care arată că aceste derivate sînt nenegative pentru $x > a_k$. Teorema 5 rezultă apoi ca și teorema 3 la nr. **6**, din formulele corespunzătoare.

Se poate vedea și aici că dacă, în plus, f este convex de ordinul 2 și dacă șirul nedescrescător (1) nu are toți termenii egali, sau dacă f este convex de ordinul 1 și dacă șirul nedescrescător (1) are cel puțin 3 termeni numeric distincți, șirul (24) este crescător începînd cu un anumit indice n.

14. Ca și la nr. **7** avem și aici cele 4 alternative m_1, m_2, m_3, m_4, înlocuind numai șirul (14) cu șirul (24). Teorema 5 corespunde alternativei m_1. În teorema analoagă corespunzătoare alternativei m_2 condițiile *a*), *c*), la care este supusă funcția f în teorema 5, se înlocuesc respectiv cu :

a') *neconvexă de ordinul* 1.

b') *neconvexă de ordinul* 2.

În teoremele analoage corespunzătoare alternativelor m_3 și m_4 condițiile *a*), *c*) ale teoremei 5 se înlocuiesc cu *a*), *c'*) și *a'*), *c*) respectiv.

În fine, ca și la nr. **10**, se demonstrează că condiția *a*) din teorema 5 este necesară pentru ca șirul (24) să fie nedescrescător pentru orice șir nedescrescător (1). Ca și la nr. **11** se demonstrează că, pentru același lucru, condiția *c*) este necesară dacă funcția f este de 3 ori continuu derivabilă pe I.

Proprietăți analoage au loc și în cazul alternativelor m_2, m_3, m_4.

15. Proprietățile I, II ale lui L. Ceakalov se deduc din teoremele 2, 3 luînd $f = \ln x$. În acest caz funcția f este, pentru $x > 0$, crescătoare, concavă de ordinul 1 și convexă de ordinul 2. Funcția inversă $F = e^x$ este crescătoare, convexă de ordinul 1 și convexă de ordinul 2. Putem aplica, acestui caz particular, și teoremele 4, 5, observînd că pentru ultima sîntem în alternativa m_4. Trecînd în prealabil de la logaritmi la numere, obținem astfel următoarele două proprietăți :

III. *Șirul* $\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ *este nedescrescător.*

IV. *Șirul* $\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$, *este nedescrescător pentru orice șir necrescător* (1).

Aici întrebuințăm notațiile de la nr. **1** pentru media aritmetică și media geometrică, presupunînd că termenii șirului (1) sînt toți pozitivi.

Pentru a studia un alt caz particular să luăm $f = \frac{1}{x}$, pentru $x > 0$. Avem atunci $F = \frac{1}{x}$. Media cuasi-aritmetică $M(f)$ se reduce la media armonică $H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ ai primilor n termeni, presupuși toți pozitivi, ai șirului (1).

Funcțiile f, F sînt ambele, descrescătoare, convexe de ordinul 1 și concave de ordinul 2. Putem aplica teoremele 2, 3, 4, 5, observînd că pentru teorema 3 sîntem în alternativa m_1, iar pentru teorema 5 în alternativa m_3 de acolo. Deducem astfel proprietățile :

V. *Șirurile*

$$n(A_n - H_n), \ n = 1, 2, \ldots; \quad n\left(\frac{1}{H_n} - \frac{1}{A_n}\right), \ n = 1, 2, \ldots$$

sînt nedescrescătoare.

VI. *Șirurile*

$$\frac{n^2}{n-1}(A_n - H_n), \ n = 2, 3, \ldots; \quad \frac{n^2}{n-1}\left(\frac{1}{H_n} - \frac{1}{A_n}\right), \ n = 2, 3, \ldots$$

sînt nedescrescătoare, primul pentru orice șir nedescrescător (1) *iar al doilea pentru orice șir necrescător* (1).

În fine, să mai considerăm şi cazul particular $f = x^2$, pentru $x > 0$. Avem atunci $F = \sqrt{x}$ şi media $M_n(f)$ se reduce la media pătratică $P_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ a primilor n termeni ai şirului (1).

Funcţia f este crescătoare, convexă de ordinul 1 şi, în acelaşi timp, neconcavă şi neconvexă de ordinul 2, iar funcţia F este crescătoare, concavă de ordinul 1 şi convexă de ordinul 2.

Putem aplica teoremele 2, 3; pentru a doua dintre acestea sîntem în alternativa m_4. Obţinem astfel proprietăţile :

VII. *Şirul* $n(A_n - P_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ *este necrescător.*

VIII. *Şirul* $\frac{n^2}{n-1}(A_n - P_n)$, $n = 2, 3, \ldots$, *este necrescător pentru orice şir necrescător* (1).

Putem de asemenea aplica teoremele 4, 5, observînd că pentru a doua sîntem, în acelaşi timp, în alternativele m_1 şi m_3. Obţinem astfel proprietăţile :

IX. *Şirul* $n(P_n^2 - A_n^2)$, $n = 1, 2, \ldots$, *este nedescrescător.*

X. *Şirul* $\frac{n^2}{n-1}(P_n^2 - A_n^2)$, $n = 1, 3, \ldots$, *este nedescrescător pentru orice şir monoton* (1).

În proprietăţile VII—X putem presupune că termenii şirului (1) sînt nenegativi.

Proprietăţile IX, X se pot obţine şi direct foarte simplu, observînd că avem

$$n(P_n^2 - A_n^2) - (n-1)(P_{n-1}^2 - A_{n-1}) = \frac{n-1}{n}(a_n - A_{n-1})^2,$$

$$\frac{n^2}{n-1}(P_n^2 - A_n^2) - \frac{(n-1)^2}{n-2}(P_{n-1}^2 - A_{n-1}^2) =$$

$$= \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i \neq j}^{1, 2, \ldots, n-1} (a_i - a_n)(a_j - a_n) \quad (n > 2).$$

К ВОПРОСУ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ МЕЖДУ СРЕДНИМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть A_n-арифметическое среднее первых n членов последовательности (1) и $M_n(f)$-квази арифметические средние определенные формулой (4), где F является обратной функцией функции f.

Главные результаты следующие:

Если f *строго монотонная, то для того чтобы последовательность* (11) *была неубывающей (невозрастающей) для любой последовательности* (1), *необходимо и достаточно чтобы* F *была невогнутой (невыпуклой) функцией порядка* 1.

Если F *строго монотонная, то для того чтобы последовательность* (14) *была неубывающей для любой неубывающей последовательности* (1), *достаточно чтобы* F *была:* а) *невыпуклой порядка* 1 *и* б) *невогнутой или невыпуклой порядка* 2, *в зависимости от того, является ли* f *возрастающей или убывающей.*

Доказывается что условие а) *также необходимо и что условие* б) *необходимо в том случае, когда предполагаем что* F *является трижды непрерывно дифференцируемой.*

Монотонность последовательностей (23) и (24) исследуется таким же образом.

Если $f = \ln x$, то находим опять некоторые, найденные Л. Чакаловым [1] свойства относительно арифметического и геометрического среднего.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS ENTRE MOYENNES

RÉSUMÉ

Soient A_n la moyenne aritmétique des n premiers termes de la suite (1) et $M_n(f)$ les moyennes quasi-arithméthiques définies par (4), où F est l'inverse de la fonction f.

Les principaux résultats sont :

Si f *est strictement monotone, pour que la suite* (11) *soit non-décroissante (non-croissante) pour toute suite* (1), *il faut et il suffit que* F *soit non-concave (non-convexe) d'ordre* 1.

Si F *est strictement monotone, pour que la suite* (14) *soit non-décroissante pour toute suite non-décroissante* (1), *il suffit que* F *soit :* a) *non-concave d'ordre* 1 *et* b) *non-concave ou nonconvexe d'ordre* 2 *suivant que* f *est croissante ou décroissante.*

On démontre que *la condition* a) *est aussi nécessaire et que la condition* b) *est nécessaire en supposant que* F *ait une dérivée troisième continue.*

La monotonie des suites (23) et (24) est étudiée de la même manière.

Si $f = \ln x$ on retrouve des propriétés dues à L. Tchakoloff [1] sur la moyenne arithmétique et la moyenne géometrique.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Tchakaloff, *Sur quelques inégalités entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique.* Annuaire de l'Univ. de Sofia, **XLII**, 39—42 (1946).

Primit la 18. VI. 1960.