GENERALIZAREA TEORIEI POLARE ASUPRA OVALELOR ȘI OVALOIDELOR

DE

EUGEN GERGELY

Comunicare prezentată la Congresul al IV-lea al matematicienilor romîni din 27 mai — 4 iunie 1956.

Teoria figurilor plane convexe, de asemenea teoria suprafețelor și corpurilor convexe, constituie un domeniu vast și important al geometriei. Lucrarea de față se ocupă cu generalizarea corespondenței polare asupra unei clase importante a figurilor și suprafețelor convexe, anume asupra ovalelor și ovaloidelor.

Această generalizare o putem realiza în mai multe moduri, folosind o anumită proprietate caracteristică a corespondenței polare — proprietate ce se poate extinde și asupra ovalelor și ovaloidelor.

În cele ce urmează ne vom ocupa mai amănunțit numai cu două posibilități ale acestor generalizări.

La prima, curba polară în raport cu ovala și de asemenea suprafața polară în raport cu ovaloida, se definesc cu ajutorul punctelor armonice; la generalizarea a doua, care se referă numai la ovală, facem ca punctelor din plan să le corespundă așa-zisele „curbe conjugate". Aceste curbe sînt locurile geometrice formate de punctele de intersecție ale tangentelor duse la ovală în capetele coardelor care trec printr-un punct dat; aceste curbe sînt de asemenea generalizări ale polarelor definite pe conice. A doua generalizare nu se poate extinde la ovaloide.

§ 1. CURBELE POLARE ȘI CURBELE CONJUGATE LA OVALE

În cele ce urmează definim ovala ca o curbă convexă și închisă, la care în fiecare punct există o tangentă bine determinată. Se poate remarca că din convexitatea curbei rezultă faptul că direcția tangentei variază monoton și că ovala nu are vîrfuri.

Ovala este o curbă de tip Jordan, prin urmare această curbă împarte punctele planului în clasa punctelor interioare, respectiv exterioare.

În privința punctelor exterioare, noțiunea polarei se poate generaliza în mai multe feluri.

I. Dintr-un punct exterior se pot duce două tangente bine determinate la ovală; dreapta care uneşte punctele de contact ale tangentelor o numim dreapta polară a punctului exterior.

II. Considerăm o dreaptă oarecare ce trece prin punctul exterior dat şi care intersectează ovala. *Curba polară* a punctului exterior este locul geometric al acelor puncte care formează un sistem armonic cu punctul exterior dat relativ la punctele de intersecţie.

Această definiţie are sens şi în cazul punctelor interioare ale ovalei şi prin urmare fiecărui punct interior îi corespunde o curbă polară.

Definiţia I este valabilă numai pentru punctele exterioare ale ovalei.

III. Curba conjugată care corespunde unui punct dat (fie interior sau exterior) se defineşte ca locul geometric al punctelor de intersecţie ale tangentelor duse în capetele coardelor prin punctul dat. Curbele sînt de asemenea generalizările dreptelor polare definite la conice.

În cele ce urmează ne vom ocupa cu generalizările II şi III.

1. Curbele polarei

a) *Curba polară a unui punct exterior.*

În studiul curbelor polare este necesară introducerea mai multor noţiuni.

Triunghiul format de tangentele a şi b, duse prin punctul exterior K, şi de coarda determinată de punctele de contact A şi B, ale tangentelor a şi b, îl numim *triunghiul tangenţial* al punctului K (fig. 1).

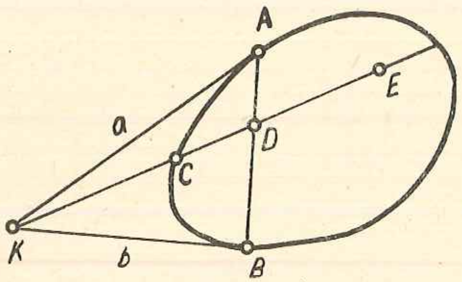

Fig. 1

Punctele A şi B împart ovala în două arcuri; unul dintre aceste arcuri este situat în interiorul triunghiului tangenţial, iar celălalt în exterior. Aceste arcuri se zic interioare, respectiv exterioare, faţă de punctul K. Considerăm toate dreptele care trec prin punctul K şi totodată intersectează ovala. Aceste drepte intersectează şi coarda AB. Punctul de intersecţie al unei astfel de drepte cu arcul interior îl vom nota cu C, iar cu D intersecţia ei cu coarda AB. Punctul E este determinat astfel ca perechea de puncte C, E să fie conjugată armonic cu perechea KD. Mulţimea punctelor E o numim *corespunzătoarea armonică* a arcului interior.

Corespunzătoarea armonică împreună cu arcul interior. formează o ovală în planul proiectiv; curba polară a punctului K în raport de această ovală este tocmai coarda AB.

D e m o n s t r a ţ i e. Arătăm că o dreaptă a intersectează corespunzătoarea armonică în cel mult 2 puncte. Într-adevăr, pe baza construcţiei unui astfel de punct de intersecţie P, îi corespunde numai un singur punct P' de pe arcul interior; dreptei a îi corespunde — tot pe baza construcţiei — dreapta a'. Însă a' poate intersecta arcul interior convex în cel mult 2 puncte. Prin urmare, acest fapt este valabil şi pentru punctele de intersecţie ale dreptei a cu corespunzătoarea armonică

Pentru studierea curbei polare este necesară cercetarea poziţiei reciproce a două ovale. Mai întîi studiem cazul unui cerc cu o ovală.

O ovală este intersectată de un cerc într-un număr par de puncte sau poate avea chiar un număr finit de arcuri comune cu cercul. Cel din urmă caz nu se va lua în considerare. Să considerăm toate cercurile în planul ovalei şi punctele lor de intersecţie cu ovala. Numărul maxim al punctelor de intersecţie ale unui cerc cu ovala îl numim *ordinul ovalei relativ la cerc.*

Considerînd un număr par $2n$ oarecare, există ovale pentru care ordinul relativ la cerc este cel puţin $2n$. Să luăm pe un cerc $2n$ puncte. Este evident că se pot construi ovale care trec prin punctele date ale cercului în aşa fel ca arcurile determinate de punctele de intersecţie să fie situate alternativ în interiorul, respectiv în exteriorul cercului. Ordinul acestei ovale relativ la cerc este mai mare sau egal cu $2n$.

Ordinul relativ la cerc se poate folosi pentru clasificarea ovalelor în mod analog ca ordinul în sensul obişnuit pentru curbele oarecare, unde ordinul este definit ca numărul maximal al punctelor de intersecţie ale curbei cu o dreaptă. O ovală şi o dreaptă au cel mult două puncte de intersecţie, adică ordinul ovalei relativ la dreaptă este 2 şi astfel în acest sens ovalele nu pot fi clasificate. Ordinul relativ la cerc al elipsei este 4; acest număr este ordinul minim relativ la cerc.

În mod analog, la o ovală dată putem construi ovale care intersectează pe cea dată într-un număr par dat de puncte.

După aceea putem studia forma curbei polare folosind corespunzătoarea armonică O_1 arcului interior.

Tratăm cele trei cazuri posibile:

a) corespunzătoarea armonică este situată în întregime în interiorul ovalei;

b) corespunzătoarea armonică este situată în întregime în exteriorul ovalei;

c) corespunzătoarea armonică intersectează ovala sau are cu ea arcuri comune.

În cazul *a*) curba polară considerată de la punctul A pînă la punctul B (fig. 2) este situată în interiorul domeniului determinat de coarda AB şi de arcul exterior al ovalei şi nu are puncte comune (afară de extremităţi) cu coarda AB.

În cazul *b*) curba polară este situată (afară de extremităţi) în interiorul triunghiului de contact.

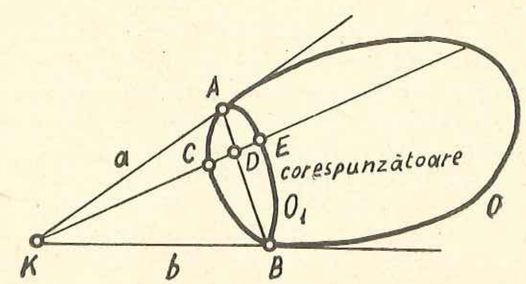

Fig. 2

În cazul *c*) trebuie să discutăm trei posibilităţi, după poziţia relativă a ovalei O şi a arcului O_1 (fig. 3);

c_1) punctele de intersecţie ale ovalei O cu arcul O_1;

c_2) Punctele de contact ale ovalei O cu arcul O_1;

c_3) arcuri comune ale ovalei O şi ale arcului O_1.

Punctele de intersecţie ale curbelor O şi O_1 corespund anumitor puncte ale curbei polare; acestea sînt punctele de intersecţie ale curbei polare cu coarda AB.

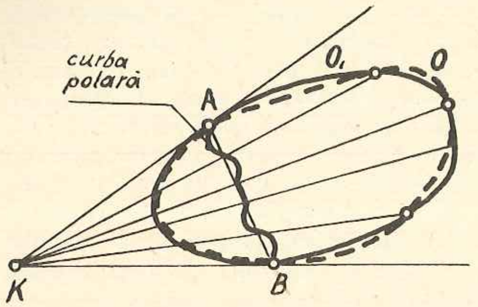

Fig. 3

Curba polară, în punctele sale care corespund punctelor de tip c_2), este tangentă la coarda AB (eventual cu inflexiune). În cazul c_3) un segment al coardei AB este o parte a curbei polare. Este evident că în cazul c) curba polară fiind completată cu arcul interior sau cu arcul exterior, cele două curbe închise astfel obţinute nu sînt ovale.

Remarcăm că acest fapt în general este adevărat şi în cazurile a) şi b).

Notăm (fig. 4) cu α unghiul format de t_1 şi c şi cu x segmentul orientat al dreptei c situat între arcul exterior şi arcul O_1 (direcţia pozitivă se consideră de la K spre arcul exterior). Funcţia $x(\alpha)$ este continuă şi segmentar monotonă (sau constantă). Arcurile curbei polare corespunzătoare arcurilor monotone ale funcţiei $x(\alpha)$ sînt concave, respectiv convexe spre arcul exterior.

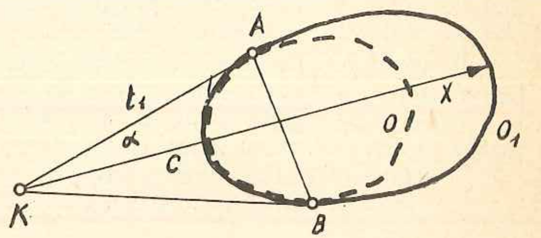

Fig. 4

O curbă polară are în fiecare punct o tangentă bine determinată. Această tangentă se poate construi uşor (fig. 5).

Considerăm punctul exterior K şi curba polară corespunzătoare. Fie P un punct al curbei polare; KCD să fie o dreaptă diferită de dreapta KP; punctul curbei polare situat pe KCD îl notăm cu Q. Atunci dreptele AC, PQ şi BD sînt concurente într-un punct T, AC şi BD sînt coardele ovalei prin A, respectiv B; PQ este coarda curbei polare. Dacă dreapta KCD tinde spre KAB, atunci dreptele ACT şi BDT tind spre tangentele ovalei duse în punctele A şi B şi astfel T tinde spre punctul de intersecţie — bine determinat — al acestor

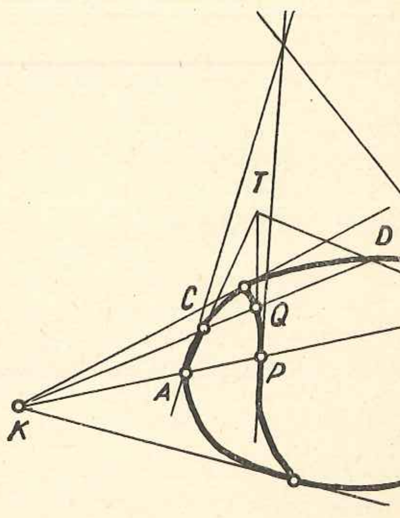

Fig. 5

tangente (eventual tangentele sînt paralele şi atunci T tinde spre infinit). PQ tinde astfel spre o dreaptă bine determinată, adică curba polară are într-adevăr în fiecare punct o tangentă bine determinată.

Construcţia tangentei, după cele precedente, este evidentă: construim tangentele în punctele de intersecţie ale dreptei KP şi ale ovalei; tangenta la curba polară este dreapta care uneşte P şi punctul de intersecţie a tangentelor.

Din cele precedente urmează uşor că variaţia de direcţie a tangentei este continuă.

TEOREMĂ. — *Prin fiecare punct interior al ovalei în fiecare direcţie se duce o singură curbă polară*; adică la fiecare element de direcţie care aparţine unui punct interior se poate determina în mod univoc acel punct exterior, a cărui curbă polară posedă ca element de tangentă tocmai elementul dat de direcţie.

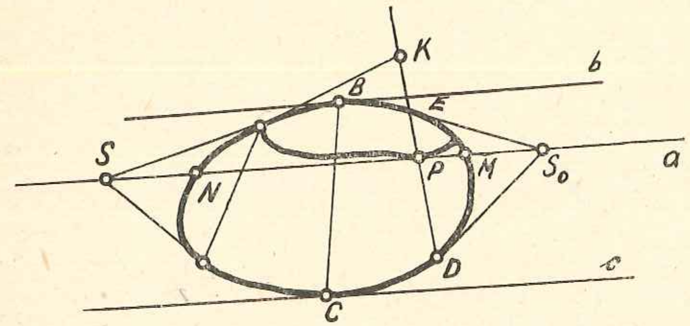

Fig. 6

D e m o n s t r a ţ i e (fig. 6). Fie P un punct interior al ovalei şi a o dreaptă oarecare ce trece prin P. Tangentele paralele cu a le numim b şi c, iar punctele lor de contact B şi C. Considerăm apoi punctele de intersecţie M,N ale dreptei a cu ovala, iar tangentele duse în aceste puncte m, respectiv n. Punctul S descrie dreapta a de la infinit pînă la punctul M. Considerăm coardele care unesc punctele de contact ale tangentelor duse din S. Aceste coarde acoperă simplu întreg domeniul intern al ovalei între coarda BC şi punctul M. Dacă punctul S variază pe dreapta a din direcţia opusă pînă la punctul N, atunci mulţimea coardelor corespunzătoare acoperă simplu domeniul interior al ovalei între BC şi N. Astfel, dacă punctul S trece prin toate punctele dreptei a — afară de punctele segmentului MN — coardele corespunzătoare acoperă simplu întregul domeniu interior al ovalei, adică pentru un *singur* punct S_0 avem proprietatea că coarda corespunzătoare trece tocmai prin punctul P. Astfel am demonstrat că există o curbă polară care trece prin P şi a cărei tangentă în P este tocmai dreapta a. Dar dreapta a este o dreaptă oarecare dusă prin P şi astfel prima parte a teoremei este demonstrată. Extremităţile coardei astfel construite le numim D,E. Punctul K, a cărui curbă polară trece prin punctul P şi este tangentă la dreapta a, formează împreună cu P şi D, E

un sistem armonic; astfel punctul K şi împreună cu el şi curba polară sînt determinate univoc. Teorema este demonstrată în întregime.

b) *Curba polară a unui punct interior.*

Este evident că curba polară a unui punct interior B este situată în întregime în exteriorul ovalei. Prin punctul B trec astfel de coarde, pentru care punctul B este punctul de mijloc. Dreapta care suportă o coardă cu această proprietate este o asimptotă a curbei polare. Curba polară a unui punct interior are astfel atîtea puncte la infinit, cîte coarde trec prin B în aşa fel ca punctul B să fie punctul mijlociu.

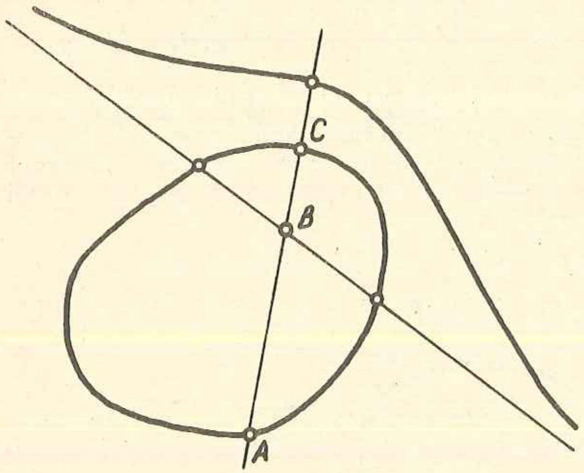

Fig. 7

Curba polară a unui punct interior are cel puţin un punct la infinit, adică fiecare curbă polară are cel puţin o ramură infinită (fig.7). O coardă care trece prin punctul B este împărţită în două segmente AB şi BC. Fie $AB > BC$. Prin rotirea coardei în jurul punctului B, lungimea segmentelor AB şi BC variază continuu. Rotind coarda cu unghiul π, segmentul AB se transformă în segmentul BC şi BC în AB, adică există cel puţin o poziţie a coardei în care B este punctul mijlociu. Pe dreapta care conţine această coardă punctul corespunzător armonic al punctului B este un punct de la infinit al curbei polare.

Prin fiecare punct exterior trec o infinitate de curbe polare (fig. 8). Dacă considerăm punctele curbei polare a punctului exterior K, atunci este evident că curbele polare care aparţin acestor puncte trec prin K. Construirea tangentei duse la o curbă polară într-un punct exterior K se face în modul următor: presupunem că curba polară aparţine punctului B. Punctele de intersecţie ale dreptei KB cu ovala le notăm cu M şi N. Fie apoi T punctul de intersecţie al tangentei dusă la ovală în punctele M şi N. Tangenta căutată trece prin punctele K şi T. Această construcţie

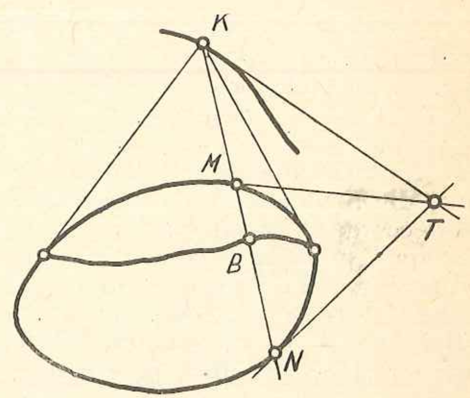

Fig. 8

se demonstrează în mod analog ca şi construcţia tangentei dusă la o curbă polară într-un punct interior.

Lema (fig. 9). Fie K punctul corespunzător armonic faţă de punctul B interior, relativ la punctele de intersecţie A, C ale dreptei KB cu ovala. M este punctul de intersecţie a tangentelor duse în A şi C. *Dreapta MK nu intersectează ovala.* În adevăr, ovala şi punctul K nu pot fi situate în unghiurile opuse formate de tangente în A şi C şi astfel MK nu poate intersecta ovala.

Observînd că MK este tangenta în punctul K a curbei polare corespunzătoare punctului B, lema arată că tangentele în punctul K ale curbelor polare care trec prin K nu pot intersecta ovala.

Am obţinut rezultatul că, ducînd prin punctul K tangentele la ovală, în unghiul α unde se găseşte ovala nu trec tangentele curbelor polare.

Astfel, printr-un punct exterior nu se pot duce curbe polare în fiecare direcţie (cum se întîmplă pentru un punct interior).

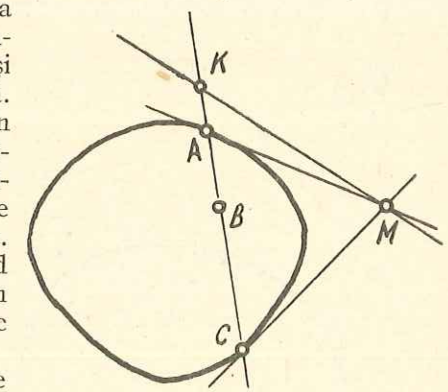

Fig. 9

În cele ce urmează demonstrăm următoarele:

Considerăm o dreaptă ce trece printr-un punct exterior K şi care nu intersectează ovala; atunci există numai o singură curbă polară tangentă la dreapta dată în punctul K.

Introducem noţiunea *curbei conjugate* a unui punct relativ la ovală. Curba conjugată a unui punct (exterior sau interior) relativ la ovală este locul geometric al punctelor de intersecţie a tangentelor duse prin extremităţile coardelor prin punctul dat.

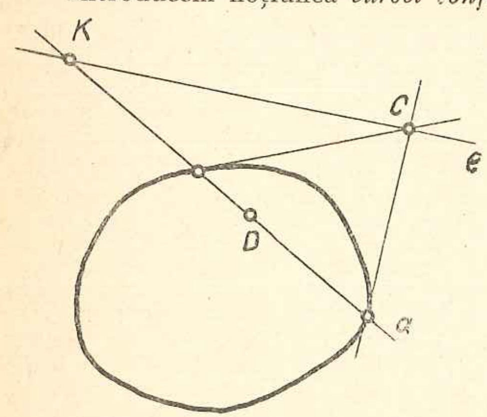

Fig. 10 a

În privinţa problemei noastre ne interesează curba conjugată a unui punct exterior K (fig. 10 a). Trebuie să demonstrăm că o dreaptă e dusă prin punctul K, dacă nu intersectează ovala atunci ea intersectează curba conjugată a punctului K într-un singur punct c. În acest caz dreapta a care trece prin punctele de contact ale tangentelor duse din C trece prin punctul K. Fie D conjugatul armonic pe dreapta a al punctului K relativ la ovală.

Curba polară a punctului D trece prin punctul K şi tangenta ei în punctul K este tocmai dreapta e.

Dintr-un punct Q al dreptei e construim cele două tangente la ovală (fig. 10 b). Dreapta determinantă prin punctele de contact ale acestor tangente intersectează dreapta e în punctul Q'. Este evident că fiecărui punct Q îi corespunde un singur punct Q'. Punctul Q' îl numim *punctul conjugat al lui* Q de pe dreapta e.

Observaţie. Corespondenţa între Q şi Q' este la elipsă involutorie, dar la o ovală oarecare nu.

Facem acum ca Q' să joace acelaşi rol ce l-a avut mai înainte punctul Q; atunci lui Q' îi corespunde un punct Q'', apoi punctului Q'' un punct Q''' şi aşa mai departe. Este o problemă deschisă dacă această corespondenţă este involutorie numai la elipsă, pentru toate punctele tuturor dreptelor. Dacă pentru punctele $Q, Q', Q'', \ldots, Q^{(n)}$, construite în modul arătat mai înainte, $Q^{(n)} = Q$, atunci şirul punctelor $Q^{(i)}$ îl numim un lanţ închis de grad n. În legătură cu aceasta se pun o serie de probleme de închidere.

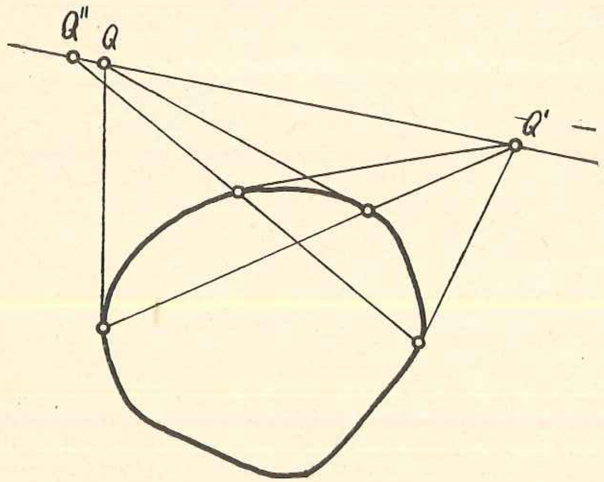

Fig. 10 b

Dacă Q descrie dreapta e, atunci punctelor distincte Q_1 şi Q_2 nu le poate corespunde acelaşipunct Q'. În adevăr, considerăm cele două coarde determinate de punctele de contact ale tangentelor duse din Q_1, respectiv Q_2. Dacă ar exista un singur punct Q' corespunzător punctelor distincte Q_1 şi Q_2, atunci aceste două coarde s-ar intersecta într-un punct exterior al ovalei; dar aceasta, în urma rotaţiei monotone a coardelor de acest gen, nu este posibilă.

Astfel corespondenţa punctelor Q şi Q' este biunivocă.

Trebuie să mai arătăm că dacă Q descrie toată dreapta e, atunci şi punctul Q' parcurge toată dreapta e.

Fie A şi B punctele de contact ale tangentelor paralele cu e. Dreapta AB intersectează dreapta e în punctul K şi acest punct îl vom numi *centrul dreptei e relativ la ovală*. Punctul conjugat cu K îl notăm cu L. Facem convenţia ca pe dreapta e direcţia socotită de la K spre L să fie direcţia negativă.

Punctul Q descrie dreapta e, de la punctul $+\infty$ pînă la punctul $-\infty$. Punctului Q infinit îi corespunde punctul K. Dacă Q este în intervalul $[+\infty, K]$, este evident că Q' este situat în intervalul $[K, -\infty]$.

Construim curba conjugată a punctului infinit al dreptei e (fig. 11). Curba aceasta intersectează dreapta e într-un singur punct K_1, al cărui punct conjugat este punctul infinit al dreptei e. Punctul K_1 îl numim cuasicentru al dreptei relativ la ovală (la elipse punctele K şi K_1 sînt identice, punctul L este punctul infinit al dreptei e).

Poziţia punctului Q', conform construcţiei, este o funcţie continuă a poziţiei Q (afară de punctul K_1).

Dacă Q descrie intervalul $[+\infty, K]$, atunci Q' descrie segmentul de la K pînă la L; dacă Q' descrie segmentul KK_1, Q' descrie intervalul $[L, -\infty]$; în sfîrşit dacă Q descrie intervalul $[K_1, -\infty]$, Q' variază de la $+\infty$ pînă la K.

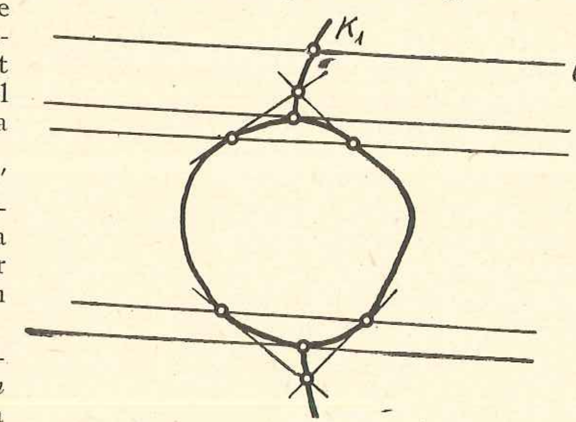

Fig. 11

Am observat deci că Q' descrie toată dreapta e şi astfel am demonstrat teorema relativ la direcţiile curbelor polare care trec printr-un punct exterior.

Ovale speciale. Sînt interesante acele ovale care au *un centru aşa-zis parţial*, adică la care există un punct al planului pentru care unele arcuri izolate ale ovalei sînt simetrice (fig. 12) dar arcurile complementare nu sînt simetrice (pe figură arcurile a, a', b, b' sînt simetrice relativ la punctul O, dar c şi c', d şi d' nu). Atunci curba polară a punctului O în aceste unghiuri cu vîrful în O, care conţin arcurile simetrice, nu are puncte finite; curba polară în aceste sectoare este dreapta de la infinit.

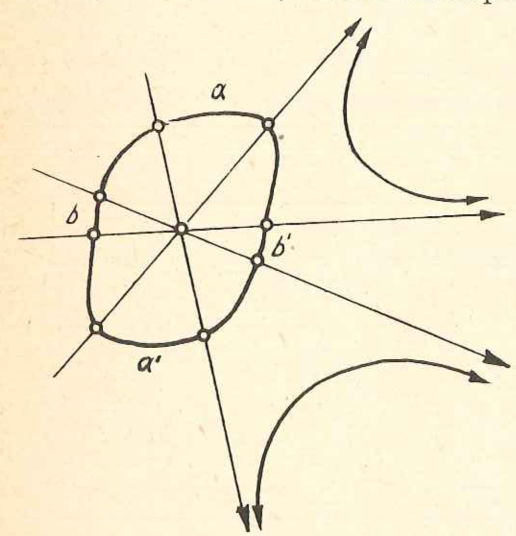

Fig. 12

Este evident că se poate construi o ovală pentru care curbele polare a două puncte să posede un număr dat de puncte de intersecţie; există chiar şi ovale pentru care curbele polare a două puncte au arcuri întregi comune.

Din cele spuse urmează că despre numărul curbelor polare care trec prin două puncte date nu se poate da o teoremă generală. În adevăr, dacă A şi B sînt două puncte interioare iar a şi b curbele polare ale punctelor A şi B, atunci toate curbele polare care corespund punctelor de intersecţie ale curbelor a şi b trec prin punctele A şi B. Dar am văzut că mulţimea punctelor de intersecţie poate fi formată din puncte izolate într-un număr oarecare sau poate conţine arcuri continue. Astfel există ovale cu perechi de puncte prin care trec curbe polare într-un număr oarecare; eventual, mulţimea lor este de puterea continuului.

2. Curbe conjugate

Am văzut că curba conjugată a unui punct exterior K intersectează într-un singur punct toate dreptele care trec prin punctul K.

În cele ce urmează demonstrăm cîteva proprietăţi simple dar importante ale curbelor conjugate.

Curba conjugată a unui punct exterior K *are o singură ramură iar aceasta are un punct la infinit* (fig. 13).

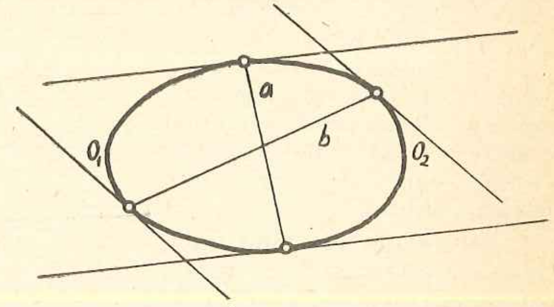

Fig. 13

Este necesar să demonstrăm că prin punctul K trece o singură dreaptă cu proprietatea că ea intersectează ovala, iar tangentele duse în punctele de intersecţie sînt paralele. Coarda care are proprietatea că tangentele în extremităţile ei sînt paralele, o numim *cuasidiametru*. Doi cuasidiametri se intersectează în interiorul ovalei. În adevăr, fie a un cuasidiametru. El împarte ovala în două arcuri : o_1 şi o_2. Este evident că dacă b este un alt cuasidiametru, una din extremităţile sale este pe arcul o_1 iar alta pe o_2 şi astfel în porţiunea planului dintre tangentele paralele duse prin extremităţile cuasidiametrului a, b trece dintr-un semiplan determinat de a în celălalt, adică intersectează cuasi-diametrul a în interiorul ovalei.

Astfel, dreptele care conţin cuasidiametri acoperă simplu exteriorul ovalei ; am demonstrat deci proprietatea enunţată.

Forma şi poziţia curbei polare a unui punct exterior K este dată în fig. 14.

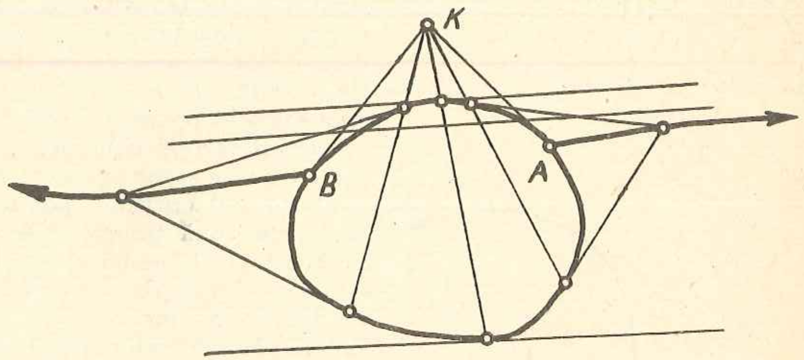

Fig. 14

Plecînd din punctele de contact A, B ale tangentelor duse din punctul K, curba este situată în exteriorul ovalei, intersectează toate dreptele duse prin K într un singur punct, are o singură asimptotă iar direcţia acesteia este determinată de direcţia tangentelor paralele duse prin extremităţile cuasidiametrului care trece prin punctul K.

Curba conjugată a unui punct interior B *are atîtea ramuri infinite, cît este numărul cuasidiametrelor care trec prin punctul* B.

Proprietatea aceasta este evidentă.

Pentru o ovală central-simetrică (cu centrul O), curba conjugată a punctului O este dreapta infinită.

Curbele conjugate a două puncte interioare se intersectează într-un singur punct.

Fie M punctul de intersecţie al curbei conjugate G_P a punctului P cu curba conjugată G_Q a punctului Q. Atunci, conform definiţiei curbei conjugate, coarda care trece prin punctele de contact ale tangentelor duse din M va trece atît prin punctul P, cît şi prin punctul Q. Astfel M este determinat univoc (M poate fi şi la infinit). Este valabilă şi o teoremă mai generală :

TEOREMĂ. — *Curbele conjugate a două puncte se intersectează atunci şi numai atunci cînd dreapta care conţine cele două puncte date intersectează ovala. Două curbe conjugate pot avea un singur punct de intersecţie.*

In adevăr, dreapta care trece prin punctele de contact ale tangentelor duse dintr-un punct de intersecţie al curbelor conjugate, va trece prin ambele puncte. Deci este evident că punctul de intersecţie este univoc determinat.

Observaţie. Proprietăţile demonstrate sînt analoage cu proprietăţile corespondenţei polare la elipsă, dacă luăm în considerare că — conform definiţiei date a curbei conjugate — „curba conjugată" la elipsă este numai partea dreptei polare situată în exteriorul elipsei.

§ 2. TEORIA POLARĂ A OVALOIDELOR

1. Suprafaţa polară a unui punct exterior

Fie K un punct exterior al ovaloidei O (fig. 15). La o dreaptă a oarecare prin K, secantă cu O, determinăm punctul C astfel ca perechea de puncte K şi C să formeze un sistem armonic cu punctele de intersecţie ale dreptei a cu ovaloida. Locul geometric al punctelor C este *suprafaţa polară* a punctului K. Un plan oarecare, care conţine dreapta a, intersectează ovaloida într-o ovală. Mulţimea curbelor polare ale punctului K relativ la aceste ovale descrie suprafaţa polară.

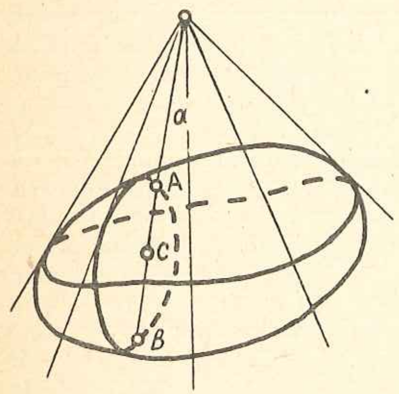

Fig. 15

TEOREMĂ. — *Suprafaţa polară a unui punct exterior are în fiecare punct un plan tangent bine determinat.*

Fie C un punct oarecare al suprafeţei polare a punctului K. Punctele de intersecţie ale dreptei K,C cu ovaloida le notăm cu A, B. Un plan oarecare, care conţine dreapta KC, intersectează ovaloida într-o ovală.

Construirea tangentei la curba polară a punctului K în punctul C, relativă la această ovală, este cunoscută. Trebuie să demonstrăm că toate tangentele astfel construite sînt într-un plan. Planele tangente p_1 și p_2, duse la ovaloidă în punctele A și B, se intersectează în dreapta b (b este eventual la infinit). Tangentele ovalei, secante în punctele A și B, sînt situate în planurile p_1, respectiv p_2 și astfel punctul lor de intersecție este un punct al dreptei b. Astfel tangenta curbelor polare trece prin punctul de intersecție al planului ovalei cu dreapta b, adică toate aceste tangente sînt în planul determinat de dreapta b și de punctul C; acest plan este planul tangent al suprafeței polare în punctul C.

Considerînd că împreună cu variația punctului C al suprafeței polare variază în mod continuu punctele A și B, deci și planele p_1, p_2 — prin urmare și dreapta b — de aici urmează că și variația direcției planului tangent al suprafeței polare este continuă.

TEOREMĂ. — *Într-un punct interior, fiecare element de suprafață este element tangențial al unei singure suprafețe polare.*

În legătură cu studierea acestei probleme definim *congruența de drepte*, adjungată la un punct dat P (exterior sau interior), relativ la ovaloidă.

Prin punctul P trec o mulțime de drepte care intersectează ovaloida; planele tangente duse în punctele de intersecție ale unei astfel de drepte se intersectează într-o dreaptă. Mulțimea dreptelor din urmă formează congruența adjungată la punctul P relativ la ovaloidă.

Intre dreptele duse prin punctul P și între dreptele congruenței este o corespondență biunivocă.

Să examinăm acele drepte ale congruenței care trec printr-un punct K exterior (fig. 16).

Fie P un punct interior. Curba tangentă relativ la punctul K (locul geometric al punctelor de contact ale tangentelor duse din punctul K la ovaloidă) o numim E. Punctele de intersecție ale coardelor determinate de punctele curbei E și de punctul P cu ovaloida, descriu pe ovaloidă încă o curbă, E_1. E și E_1 sînt curbe închise și continue. Curba E_1 o numim *curba proiectată a curbei E* relativ la punctul P. Curba proiectată este partea complementară a curbei E relativ la intersecția ovaloidei cu conul determinat de curba E și vîrful P. Fie C un punct de intersecție al curbelor E și E_1 (dacă există). C este un punct al curbei E și astfel C, P intersectează ovaloida într-un punct C' al curbei E_1. Deoarece C aparține și curbei E_1, urmează că aparține și curbei E, adică și C este un punct de intersecție al curbelor E și E_1. Astfel punctele de intersecție ale curbelor E și E_1 for-

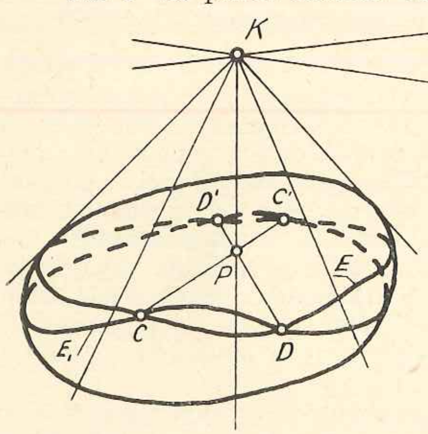

Fig. 16

mează perechi de puncte în așa fel ca o coardă determinată de o pereche să treacă prin punctul P. Dreapta de intersecție a planelor tangente duse în punctele unei perechi de puncte astfel construite, trece prin punctul K și este o dreaptă a congruenței adiungate la punctul P. Astfel prin punctul K trec atîtea drepte ale congruenței, cît este jumătatea numărului punctelor de intersecție ale curbelor E și E_1.

Pentru un punct exterior K și pentru curba lui tangentă E, există în interiorul ovaloidei puncte P relativ la care curba proiectată intersectează E și punctele P', pentru care curba proiectată nu intersectează E.

Mulțimile de puncte D și D' astfel obținute formează în interiorul ovaloidei domenii, în urma proprietăților de continuitate ale ovaloidei. Frontierele acestor domenii sînt locul geometric al punctelor pentru care curba proiectată și curba E sînt tangente cel puțin într-un punct, fiind situate într-o parte a ovaloidei determinată de curba E. Pentru punctele domeniilor D și pentru punctele de frontieră congruențele adjungate au drepte care trec prin punctul K; pentru punctele domeniilor D' congruența adjungată n-are nici o dreaptă ce trece prin K.

Astfel, fiecare punct K exterior introduce o împărțire a punctelor interioare ale ovaloidei.

Avem deci o imagine despre dreptele congruențelor adjungate, unde aceste drepte trec printr-un punct exterior.

Observație. Printr-o construcție analoagă, la fiecare curbă E (simplă și închisă) trasă pe ovaloidă — nu numai pentru curbele tangente ale unui punct exterior — putem să determinăm curbele proiectate E_1 relativ la punctele interioare. Punctele interioare, pentru care E și E_1 se intersectează în 0, 2, 4, . . ., $2n$, . . . puncte le numim mulțimi D_0, D_2, D_4, . . ., D_{2n}, . . .

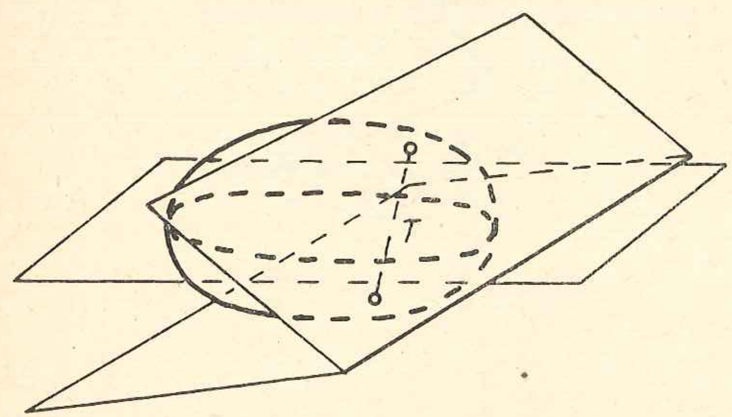
Fig. 17

Astfel, toate curbele introduc o împărțire a punctelor interioare ale ovaloidei și prin ajutorul unei construcții similare și a punctelor exterioare.

Coardelor $\{h\}$ care trec printr-un punct interior B, le aparține mulțimea $\{k\}$ a dreptelor de congruență iar mulțimea $\{s\}$ a planurilor este determinată de dreptele $\{k\}$ și de punctul B. Trebuie examinat dacă $\{s\}$ conține toate planurile care trec prin punctul B, sau exprimînd altfel; există oare în fiecare plan ce trece prin B, una sau mai multe drepte ale congruenței (fig. 17)?

Fie s un plan prin punctul B. Printr-o astfel de dreaptă a planului, care să nu intersecteze ovaloida, să determinăm planele tangente. Coarda determinată de punctele de contact trece printr-un punct T interior sau de pe frontieră al ovalei, care este intersecția ovaloidei cu un plan S. Punctele T — în urma proprietăților de continuitate ale ovaloidei — formează un domeniu simplu conex închis, punctele de frontieră ale acestui domeniu fiind tocmai punctele ovalei. Astfel, domeniul descris de punctele T este ovala și interiorul ei.

Am demonstrat deci că în planul dat există cel puțin o dreaptă e a congruenței adjungate la punctul B, adică cel puțin o dreaptă cu următoarea proprietate: dreapta determinată de punctele de contact ale planurilor tangente duse prin dreapta e trece prin punctul B.

Pe dreapta care conține coarda ce trece prin B determinăm punctul armonic B relativ la ovaloidă. Planul tangent al suprafeței polare a acestui punct este tocmai planul dat.

În cele ce urmează demonstrăm că într-un punct interior fiecare element de suprafață aparține *unei singure* suprafețe polare (fig. 18). Planul s al elementului de suprafață intersectează ovaloida într-o ovală O. Să luăm

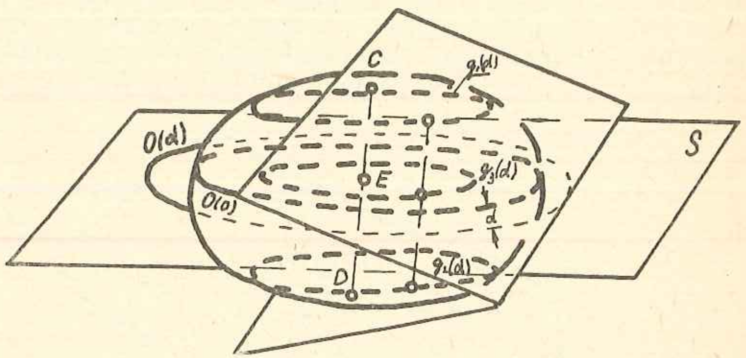

Fig. 18

toate curbele paralele exterioare ale curbei O. Este evident că toate aceste curbe sînt ovale. Să numim curbele paralele $O(d)$, unde d este distanța normală a curbelor $O(o)$ și $o(d)$. Planul s împarte ovaloida în părțile O_1 și O_2. Prin tangentele curbei $O(d)$ construim planele tangente la ovaloidă. Este evident că unul din plane are punctul de contact în O_1, iar altul în O_2. Locul geometric al punctelor construite pentru un anumit (d) constă din două curbe continue închise, dintre care una $g_1(d)$ este pe O_1 iar alta $g_2(d)$ pe O_2. Dacă d variază de la O pînă la $+\infty$, $g_1(d)$ și $g_2(d)$ descriu suprafețele O_1 și O_2 de la o pînă la punctele C și D, care sînt punctele de contact al planurilor tangente paralele cu planul dat s. Curbele $g_1(d)$, respectiv $g_2(d)$, acoperă simplu toată suprafața O_1, respectiv O_2.

În adevăr, două curbe $g_i(d_1)$ și $g_i(d_2)$ $(i=1, 2)$ nu pot să se intersecteze sau să fie tangente fiindcă în punctul de intersecție sau în punctul de contact ovaloida are un plan tangent bine determinat și acesta intersectează planul s într-o dreaptă de asemenea bine determinată. Modul de construire a curbelor $g_1(d)$ și $g_2(d)$ introduce o corespondență biunivocă între punctele lor. Coarda determinată de două puncte corespunzătoare ale curbelor $g_1(d)$ și $g_2(d)$ trece printr-un punct interior al ovalei o — în urma convexității ovaloidei. Pentru o valoare dată d, punctele astfel obținute descriu o curbă $g_3(d)$. Dacă d descrie intervalul $[0, \infty]$, atunci curbele $g_3(d)$ acoperă simplu ovala o și interiorul ei și converg spre punctul de intersecție E al dreptei C,D și planul S. Prin fiecare punct interior al ovalei trece o singură curbă $g_3(d)$. Dacă printr-un punct ar trece două curbe: $g_3(d_1)$ și $g_3(d_2)$, curbele corespunzătoare $g_1(d_1)$, $g_2(d_1)$ și $g_1(d_2)$, $g_2(d_2)$ ar avea o astfel de poziție reciprocă pe ovaloidă, care ar fi în contradicție cu modul lor de construcție.

Astfel am demonstrat că fiecărei drepte e a planului s îi corespunde *un singur* punct al ovalei sau un punct interior, prin care trece o singură coardă ce corespunde dreptei e. Cu aceasta am demonstrat afirmația noastră.

2. Suprafața polară a unui punct interior

Suprafața polară a unui punct interior B este situată în întregime în exteriorul ovaloidei. Pe acele coarde ce trec prin B și pentru care B este punctul de mijloc, există puncte infinite ale suprafeței polare. În fiecare plan ce trece prin B sînt puncte infinite ale suprafeței polare. În adevăr planul respectiv intersectează ovaloida într-o ovală, deci afirmația precedentă este o consecință a proprietății unui punct interior al ovalei.

Este posibil ca ovaloida să conțină domenii sau curbe simetrice relativ la anumite puncte. Atunci în partea spațiului determinată de acest punct și de părțile simetrice ale ovaloidei, suprafața polară a punctului are porțiuni în planul infinit. Conul — determinat de frontiera domeniilor simetrice cu vîrful în centrul de simetrie — este conul asimptotic al suprafeței polare.

În ce privește corespondența polară, există o corespondență și între dreptele și planurile ce trec printr-un punct interior. O dreaptă e dusă printr-un punct interior B intersectează suprafața polară a acestui punct B într-un singur punct P_e (finit sau infinit).

Suprafața polară a punctului P_e trece prin punctul B și acolo, cum am văzut, are un plan tangent S bine determinat. Corespondența aceasta este biunivocă.

Suprafața polară a unui punct interior are în fiecare punct un plan tangent bine determinat.

Punctul K să fie un punct al suprafeței polare corespunzătoare punctului interior B. Dreapta KB intersectează ovaloida în punctele A, C; planele duse prin KB intersectează ovaloida în anumite ovale iar suprafața polară în curbe plane care trec prin K. Tangenta acestei curbe în K este dreapta determinată de acest punct K și de punctul de intersecție al tangentelor ovalei în punctele A și B. Punctul D este situat în planele tangente ale punctelor A și B, adică pe dreapta lor de intersecție C. Astfel, tangentele curbelor pe suprafaţa polară care trec prin K sînt în planul determinat de punctul K şi de dreapta c. Acest plan este planul tangent al suprafeţei polare.

Pentru un punct exterior al ovaloidei este valabilă următoarea

TEOREMĂ. — *Fiecare plan care trece printr-un punct exterior K şi care nu intersectează ovaloida, este planul tangent al unei singure suprafeţe polare corespunzătoare unui punct interior.* Acele plane care trec prin K şi intersectează ovaloida nu pot fi plane tangente la nici o suprafaţă polară. Suprafeţele polare duse prin K corespund punctelor situate pe suprafaţa polară a punctului K.

Fie B un astfel de punct. Planele duse prin dreapta KB intersectează ovaloida în ovale. Tangentele ambelor polare ale punctului B relativ la aceste ovale, adică dreptele planului tangent în K — după proprietatea demonstrată la ovale — sînt în exteriorul ovalei şi astfel în exteriorul ovaloidei.

Fie B un punct al suprafeţei polare a unui punct exterior K. Suprafaţa polară a punctului B trece prin K şi are acolo un plan tangent bine determinat. Astfel, fiecărei drepte KB îi corespunde un plan dus prin K. Planurile acestea sînt determinate de dreptele congruenţei adjungate la punctul K. Un astfel de plan conţine tocmai acea dreaptă sau acele drepte ale congruenţei, care corespund dreptei KB.

Fiecărei generatoare a conului tangent cu vîrful K îi corespunde planul tangent.

Astfel trebuie să demonstrăm că în fiecare plan dus prin K, care nu intersectează ovaloida, există *o singură dreaptă* a congruenţei.

Fie s un plan dus prin K, care nu intersectează ovaloida (fig. 19). Considerăm toate dreptele a ale planului şi construim prin fiecare dreaptă plane tangente la ovaloidă. Dreapta care trece prin punctele de contact ale planelor tangente duse prin dreapta a o notăm cu a_1. Punctele de contact ale planelor tangente duse prin acele drepte ale planului s, care trec prin K, sînt pe curba e; dreptele corespunzătoare a_1 leagă perechile de puncte ale curbei e şi dau astfel o corespondenţă buinivocă a curbei e cu ea însăşi. Considerăm în planul s toate cercurile $k(r)$ cu centrul K şi cu raza r. Să construim prin toate tangentele cercului $k(r)$ planele tangente la ovaloidă. Dreptele corespunzătoare a leagă două puncte al ovaloidei; unul este situat pe suprafaţa O_1 iar altul pe suprafaţa O_2, unde O_1 şi O_2 sînt cele două părţi ale ovaloidei, determinate prin curba e. Aceasta este o consecinţă a variaţiei continue a planelor tangente. Astfel dreptele a_1 intersectează pînza K_1 a conului tangent pe porţiunea dintre punctul K şi curba e într-un singur punct A (conul tangent este o suprafaţă convexă). Astfel, fiecărei drepte a a planului S îi corespunde un singur punct A. Punctele A, corespunzătoare tangentelor cercului $k(r)$, descriu pe K_1 o curbă continuă închisă $g(r)$.

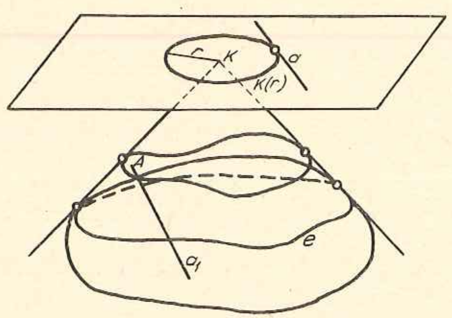

Fig. 19

Dreapta care conţine punctele de contact ale planelor tangente paralele la s intersectează K_1 într-un punct pe care să-l notăm cu P. Curba corespunzătoare a dreptelor duse prin K $g(o)$ este — cum am văzut — curba e. Cu creşterea razei r curbele $g(r)$ descriu suprafaţa întreagă K_1, de la e pînă la punctul P. Curbele $g(r)$ acoperă simplu toată suprafaţa K_1 şi astfel pentru un anumit r_0 curba $g(r)_0$ trece prin punctul K. Punctului K privit ca un punct al curbei $g(r_0)$, îi corespunde o singură tangentă b a cercului $k(r_0)$. Conform construcţiei date, dreapta b_1 — care conţine punctele de contact ale planelor tangente duse prin b — trece prin K; apoi b_1 intersectează suprafaţa polară a punctului K într-un punct B şi planul s este plan tangent al suprafeţei polare a punctului B în punctul K. Construcţia este univocă şi astfel teorema este demonstrată în întregime.

Academia R. P. R. — Filiala Cluj,
Institutul de calcul

ОБОБЩЕНИЕ РОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ОВАЛОВ И ОВАЛОИДОВ

(Краткое содержание)

Работа занимается изучением полярных кривых и сопряженных кривых для овалов и полярных поверхностей овалоидов. Полярные кривые и полярные поверхности является геометрическими местами точек гармонически данной точке относительно данного овала соответствено данного овалоида. Оказывается, что через каждую внутренную точку овала по каждому направлению проходит единственная полярная кривая, и что прямые, выходящие из некоторой внешней точки и непересекающиеся овала, является касательными к единственной полярной кривой, причем в направлении секущих прямых не проходит полярная кривая.

Сопряженная кривая, соответствующая некоторой данной точке есть геометрическое место точек пересечения касательных, проведенных на концах хорд и проходящих через данную точку. Доказывается, что сопряженное кривые для двух точек пересекаются тогда, и только тогда, когда прямая, соединяющая эти данные точки, пересекает овал. Две сопряженное кривые могут иметь только одну точку пересечения.

Относительно овалоида доказывается, что каждый элемент поверхности в некоторой внутренней точке является элементом касательной некоторой единственной полярной поверхности, и что каждая плоскость, проходящая через некоторую внешнюю точку и непересекающая овалоид, является касательной плоскотью в данной точке к некоторой единственной полярной поверхности относительно некоторой внутренней точки. Те плоскости, которые проходят через внешнюю точку и не пересекают овалоида, не являются касательными плоскостями для некоторой полярной поверхности.

LA GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE POLAIRE SUR LES OVALES ET LES OVALOÏDES

(Résumé)

Le mémoire traite des courbes polaires et des courbes conjuguées des ovales et des surfaces polaires des ovaloïdes. Les courbes polaires et les surfaces polaires sont les lieux géométriques des points armoniques à un point donné relatif à l'ovale ou à l'ovaloïde donnés. On montre que par chaque point intérieur de l'ovale on trace une seule courbe polaire dans chaque direction et que par un point extérieur les droites qui n'intersectent pas l'ovale sont tangentes à une seule courbe polaire; dans la direction des droites sécantes la courbe polaire ne passe pas.

La courbe conjugée correspondant à un point donné est le lieu géométrique des points d'intersection des tangentes tracées à l'extrémité des cordes qui passent par le point donné. On montre que les courbes conjuguées des deux points s'intersectent seulement şi la droite qui unit ces deux points donnés intersecte l'ovale. Deux courbes conjuguées ne peuvent avoir qu'un seul point d'intersection.

En ce qui concerne l'ovaloïde, on démontre que chaque élément de surface dans un point intérieur est l'élément de tangente d'une seule surface polaire et que chaque plan qui passe par un point extérieur et qui n'intersecte pas l'ovaloïde est le plan tangent dans le point donné d'une seule surface polaire d'un point intérieur. Ces plans, par un point extérieur qui n'intersecte pas l'ovaloïde, ne sont pas des plans tangents à une surface polaire.