OBSERVAŢII ASUPRA PRIMEI ŞI CELEI DE A DOUA FORMULE DE MEDIE A CALCULULUI INTEGRAL *)

DE

TIBERIU POPOVICIU
Membru corespondent al Academiei R.P.R.
(Cluj)

1. Considerăm două funcţii reale $f(x)$ şi $g(x)$, definite şi R-integrabile pe un interval finit şi închis $[a, b]$ $(a < b)$. Însemnînd cu $\bar{f}$ o valoare medie a funcţiei $f(x)$, adică un astfel de număr încît

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leqq \bar{f} \leqq \sup_{x \in [a, b]} f(x),$$

avem prima formulă de medie

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \bar{f} \int_a^b g(x)\, dx, \tag{1}$$

care este valabilă dacă $g(x)$ nu-şi shimbă semnul (rămînînd în mod constant $\geqq 0$ pe $[a, b]$), iar $f(x)$ este oarecare.

Se poate arăta că în ipoteza continuităţii, invarianţa semnului funcţiei $g(x)$ este de asemenea necesară pentru valabilitatea formulei (1) pentru $f(x)$ oarecare.

Într-adevăr, presupunem că $g(x)$ este continuă şi că îşi schimbă semnul în $[a, b]$. Fără a restrînge generalitatea problemei, putem presupune că

$$\int_a^b g(x)\, dx \geqq 0 \tag{2}$$

(întrucît în caz contrar, este suficient de a lua $-g(x)$ în locul funcţiei $g(x)$) şi există atunci un punct $x_0 \in (a, b)$ astfel încît $g(x_0) < 0$. În baza continui-

*) Această lucrare se publică şi în limba franceză în revista „Mathematica", vol 2 (25), fasc. 1.

tăţii funcţiei $g(x)$ rezultă că dacă $\varepsilon > 0$ este suficient de mic, au loc inegalităţile $a < x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon < b$ şi $g(x)$ este negativ pe intervalul $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Vom construi acum o funcţie $f^*(x)$ astfel încît să fie:
1°. continuă, pozitivă şi cel mult egală cu 1 pe $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.
2°. nulă pe $[a, x_0 - \varepsilon]$ şi pe $[x_0 + \varepsilon, b]$.

Funcţia $f^*(x)$ este R-integrabilă pe $[a, b]$ şi avem $0 \leq \bar{f^*} \leq 1$.
Se poate de exemplu considera

$$f^*(x) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \\ 0, \text{ pentru } x \in [a, b] - (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \end{cases} \tag{3}$$

Aplicînd formula (1) în care luăm pentru $f(x)$ funcţia $f^*(x)$ şi ţinînd seama de (2), obţinem

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f^*(x)\, g(x)\, dx < 0, \quad \bar{f} \int_a^b g(x)\, dx \geq 0$$

ceea ce ne arată că egalitatea (1) este imposibilă.

Putem deci să enunţăm următoarea proprietate:

I. *Pentru ca prima formulă de medie* (1) *să aibă loc pentru orice funcţie continuă* $g(x)$ *şi pentru orice funcţie R-integrabilă* $f(x)$, **este necesar** *şi suficient ca* $g(x)$ *să nu schimbe semnul în* $[a, b]$.

2. Formulei integrale (1) îi corespunde formula de medie „în termeni finiţi"

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = \bar{a} \sum_{i=1}^{n} b_i, \tag{4}$$

unde şirurile (a_i), (b_i) sînt reale şi

$$\min (a_i) \leq \bar{a} \leq \max (a_i).$$

Aici s-a utilizat notaţia (c_i) pentru şirul de n termeni $c_1, c_2, \ldots, c_n$ $(n > 1)$.

Formula de medie (4) este adevărată pentru toate şirurile (a_i) dacă termenii şirului (b_i) sînt de acelaşi semn (sînt toţi ≥ 0 sau toţi ≤ 0).

Este de asemenea uşor de văzut că invarianţa semnului numerelor b_i este necesară pentru ca formula de medie (4) să fie adevărată pentru orice şir (a_i). Într-adevăr, să presupunem că numerele b_i nu sînt toate de acelaşi semn. Se poate presupune, fără a restrînge generalitatea problemei, că $\sum_{i=1}^{n} b_i \geq 0$ (întrucît în caz contrar se utilizează un raţionament analog pentru şirul $(-b_i)$). Există atunci un indice k astfel încît $b_k < 0$. Dacă se ia $a_k \neq 1$, $a_i = 0$, pentru $i \neq k$, se obţine $0 \leq \bar{a} \leq 1$ şi $\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = b_k < 0$, $\bar{a} \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 0$ şi egalitatea (4) este imposibilă.

Putem deci să enunţăm următoarea proprietate:

I'. *Pentru ca formula de medie* (4) *să fie adevărată pentru orice şir* (a_i), *este necesar şi suficient ca termenii şirului* (b_i) *să fie de acelaşi semn.*

Proprietatea I poate dealtfel să fie dedusă din proprietatea I' prin trecere la limită, ţinînd seamă de definiţia integralei R. Fără a mai insista asupra detaliilor, afirmăm că proprietăţile II', III', IV' rezultă în acelaşi fel respectiv din proprietăţile II', III', IV'.

3. C. Bonferroni a demonstrat [1] că prima formulă de medie (1) este adevărată pentru orice funcţie *monotonă* $f(x)$ dacă $g(x)$ este R-integrabilă şi dacă integrala sa $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ rămîne cuprinsă între 0 şi $G(b)$ pentru $x \in [a, b]$. Ultima proprietate exprimă că avem $0 \leq G(x) \leq G(b)$ pentru $x \in [a, b]$ respectiv $G(b) \leq G(x) \leq 0$ pentru $x \in [a, b]$ după cum $0 \leq G(b)$ respectiv $G(b) \leq 0$.

Se poate încă demonstra că condiţia impusă funcţiei $g(x)$ este necesară. Pentru aceasta, considerăm funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } x \in [a, \lambda] \\ 0 \text{ pentru } x \in (\lambda, b], \end{cases}$$

unde $a \leq \lambda \leq b$ (dacă $\lambda = b$, atunci luăm $f(x) = 1$ pe $[a, b]$). Această funcţie este monotonă (deci a fortiori R-integrabilă) şi avem $0 \leq \bar{f} \leq 1$. Formula (1) ne dă atunci $G(\lambda) = \bar{f}\, G(b)$ pentru $\lambda \in [a, b]$, ceea ce demonstrează proprietatea în cauză.

Putem deci să enunţăm următoarea proprietate:

II. *Pentru ca prima formulă de medie* (1) *să aibă loc pentru orice funcţie monotonă* $f(x)$, **este necesar** *şi suficient ca integrala* $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ *a funcţiei R-integrabile* $g(x)$ *să rămînă cuprinsă între* 0 *şi* $G(b)$ *pentru* $x \in [a, b]$.

4. C. Bonferroni obţine suficienţa condiţiei proprietăţii II din proprietatea corespunzătoare, relativă la formula (4), printr-un procedeu de trecere la limită.

Dacă se consideră sumele parţiale $s_i = b_1 + b_2 + \ldots + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a şirului (b_i), formula de medie (4) este verificată pentru orice şir *monoton* (a_i), dacă termenii şirului (s_i) sînt cuprinşi (în sens larg) între 0 şi s_n.

Demonstraţia lui C. Bonferroni este următoarea. Observăm că dacă numerele s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt cuprinse între 0 şi s_n, atunci şi numerele $s_n - s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt de asemenea cuprinse între 0 şi s_n. Monotonia şirului (a_i) ne arată că, pe de o parte $\bar{a}$ este cuprins între a_1 şi a_n, pe de altă parte, utilizînd formula de transformare a lui Abel, avem

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - a_n s_n\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - a_1 s_n\right) =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n-1} s_i(a_i - a_{i+1})\right]\left[\sum_{i=1}^{n-1} (s_n - s_i)(a_{i+1} - a_i)\right] \leq 0.$$

Formula de medie (4) rezultă de aici imediat.

Necesitatea condiţiei rezultă considerînd şirul monoton (a_i), unde $a_1 = a_2 = \ldots = a_i = 1$, $a_{i+1} = a_{i+2} = \ldots = a_n = 0$

Putem enunţa următoarea proprietate:

II′. *Pentru ca formula de medie* (4) *să aibă loc pentru orice şir monoton* (a_i), *este necesar şi suficient ca termenii şirului* (s_i) *format din sumele parţiale ale şirului* (b_i) *să rămînă cuprinşi între* 0 *şi* s_n.

5. Considerăm acum a doua formulă de medie

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\, dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\, dx, \tag{5}$$

unde $a \leq \xi \leq b$.

Această formulă este valabilă pentru orice funcţie $f(x)$, R-integrabilă, dacă funcţia $g(x)$ este monotonă pe $[a, b]$.

Să presupunem că $g(x)$ admite o derivată $g'(x)$ continuă pe $[a, b]$. Putem atunci să demonstrăm că monotonia funcţiei $g(x)$ este necesară pentru ca formula (5) să aibă loc oricare ar fi $f(x)$. Într-adevăr, dacă $g'(x)$ este o funcţie continuă şi dacă notăm $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, avem

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = F(b)\, g(b) - \int_a^x F(x)\, g'(x)\, dx$$

şi formula (5) devine

$$\int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)\, dx,$$

deci revine la prima formulă de medie ($F(\xi) = \bar{F}$).

În cazul nostru, proprietatea de monotonie a funcţiei $g(x)$ pe $[a, b]$ este echivalentă ca faptul că derivata $g'(x)$ nu schimbă semnul pe $[a, b]$. Necesitatea condiţiei pe care am avut-o în vedere, rezultă ca la nr. 1. Trebuie numai să considerăm în locul funcţiei $g(x)$, funcţia $g'(x)$, iar pentru $F(x)$, o funcţie $f^*(x)$ convenabil aleasă. Întrucît prin construcţie $F(x)$ este

o integrală, pentru a satisface condiţiile 1°, 2° de la nr. 1, este suficient de exemplu de a considera pentru $F(x)$, funcţia

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\varepsilon^3}(x - x_0 + \varepsilon)^2\left(x_0 - x + \dfrac{\varepsilon}{2}\right), & \text{pentru } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0), \\ \dfrac{2}{\varepsilon^3}(x - x_0 - \varepsilon)^2\left(x - x_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}\right), & \text{pentru } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon), \\ 0, \text{ pentru } x \in [a, b] - (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Aceasta revine de altfel a considera pentru $f(x)$, funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{\varepsilon^3}(x_0 - x)(x - x_0 + \varepsilon), & \text{pentru } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0] \\ \dfrac{6}{\varepsilon^3}(x - x_0)(x - x_0 - \varepsilon), & \text{pentru } x_0 \in (x_0, x_0 + \varepsilon), \\ 0, \text{ pentru } x \in [a, b] - (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Putem să enunţăm următoarea proprietate :

III. *Pentru ca formula de medie* (5) *să fie adevărată pentru orice funcţie* $g(x)$ *avînd o derivată continuă pe* $[a, b]$ *şi pentru orice funcţie* $f(x)$ *R-integrabilă pe* $[a, b]$, *este necesar şi suficient ca* $g(x)$ *să fie monotonă pe* $[a, b]$.

6. Formul i (5) îi corespunde de asemenea o formulă de medie „în termeni finiţi"

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \bar{r}\, b_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - \bar{r}\right) b_n\,, \tag{6}$$

unde $\bar{r}$ este o valoare medie a primelor $n - 1$ termeni ai şirului (r_i), unde $r_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, şi deci

$$\min_{i=1,2,\ldots,n-1} (a_1 + a_2 + \ldots + a_i) \leq \bar{r} \leq \max_{i=1,2,\ldots,n-1} (a_1 + a_2 + \ldots a_i)$$

Formula de medie (6) este adevărată pentru orice şir (a_i), dacă şirul (b_i) este monoton. Demonstraţia este simplă întrucît dacă observăm că

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - b_n \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} r_i (b_i - b_{i+1}),$$

ea revine la prima formulă de medie.

Necesitatea proprietăţii de monotonie a şirului (b_i) pentru ca formula (6) să rămînă adevărată pentru orice şir (a_i), rezultă imediat, luînd $a_i = 1$, $a_{i+1} = -1$ şi $a_k = 0$, pentru $k \neq i, i+1$, succesiv pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Putem deci să enunţăm următoarea proprietate :

III′. *Pentru ca formula de medie* (6) *să fie adevărată pentru orice şir* (a_i), *este necesar şi suficient ca şirul* (b_i) *să fie monoton.*

7. C. Bonferroni în lucrarea sa citată [1] a demonstrat de asemenea că formula de medie (5) este adevărată pentru orice funcţie $f(x)$ a cărei integrală $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ este monotonă, dacă $g(x)$ rămîne cuprinsă (în sens larg) între $g(a)$ şi $g(b)$ pentru $x \in [a, b]$.

Presupunînd $g(x)$ continuă, condiţia enunţată este de asemenea necesară. Într-adevăr, presupunem că $g(x)$ este continuă şi luăm pentru $f(x)$ funcţia (3), unde x_0 este un punct din (a, b) iar ε un număr pozitiv suficient de mic. Presupunînd că formula de medie (5) este verificată, are loc egalitatea

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)dx = \begin{cases} g(b), \text{ pentru } \xi \leq x_0 - \varepsilon, \\ \dfrac{(\xi - x_0 + \varepsilon)g(a) + (x_0 + \varepsilon - \xi)g(b)}{2\varepsilon} \quad \text{pentru } \xi \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon), \\ g(a), \text{ pentru } \xi \geq x_0 + \xi, \end{cases}$$

Se vede deci că pentru ε pozitiv şi suficient de mic, integrala

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\, dx \tag{7}$$

rămîne cuprinsă între $g(a)$ şi $g(b)$. Dacă însă $\varepsilon \to 0$, media integrală (7) tinde către valoarea $g(x_0)$, care rămîne deci de asemenea cuprinsă între $g(a)$ şi $g(b)$.

Putem deci enunţa următoarea proprietate :

IV. *Pentru ca formula de medie* (5) *să fie adevărată pentru orice funcţie* $f(x)$, *avînd integrala* $\int\limits_a^x f(t)dt$ **monotonă** *este* **necesar** *şi suficient ca funcţia* $g(x)$ *presupusă continuă să fie cuprinsă între* $g(a)$ *şi* $g(b)$ *pentru* $x \in [a, b]$.

8. Şi aici C. Bonferroni obţine suficienţa condiţiei proprietăţii IV printr-un proces de trecere la limită.

Formula de medie (6) este verificată pentru orice şir (a_i) ai cărui termeni sînt de acelaşi semn, dacă termenii şirului (b_i) rămîn cuprinşi între b_1 şi b_n. Demonstraţia este următoarea. Dacă a_i sînt de acelaşi semn şi dacă b_i sînt cuprinşi între b_1 şi b_n, avem

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_n) + (b_n - b_1)\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_n) + (b_n - b_1)a_1\right] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_i(b_i - b_1)\right]\left[\sum_{i=2}^{n} a_i(b_i - b_n)\right] \leq 0.$$

Formula de medie rezultă de aici imediat.

Necesitatea condiţiei rezultă luînd $a_i = 1$ şi $a_k = 0$ pentru $k \neq i$. Avem atunci $0 \leq \bar{r} < 1$ şi formula (6) ne dă $b_i = \bar{r} b_1 + (1 - \bar{r})b_n$, ceeace arată că b_i este cuprins între b_1 şi b_n.

Putem deci să enunţăm următoarea proprietate

IV'. *Pentru ca formula de medie* (6) *să fie adevărată oricare ar fi şirul* (a_i) *avînd termenii de acelaşi semn, este necesar şi suficient ca* b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *să rămînă cuprinşi între* b_1 *şi* b_n.

ПРИМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ФОРМУЛ О СРЕДНЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ две действительных, определённых и R-интегрируемых функции на конечном и закрытом интервале $[a, b]$ $(a < b)$ и пусть $\bar{f}$ среднее значение функции $f(x)$ на $[a, b]$. В настоящем труде доказываются следующие утверждения:

1. *Для того, чтобы формула о среднем* (1) *была верна для любой непрерывной функции* $g(x)$ *и для люой R-интегрируемой функции* $f(x)$, **необходимо** *и достаточно чтобы* $g(x)$ *не меняла своего знака на* $[a, b]$.

2. *Для того чтобы формула о среднем* (1) *была верна для любой* **монотонной** *функции* $f(x)$, **необходимо** *и достаточно чтобы интеграл* $G(x) = \int\limits_x^a g(t)\, dt$ *R-интегрируемой функции* $g(x)$, *оставался заключенным между* 0 *и* $G(b)$ *для* $x \in [a, b]$.

3. *Для того чтобы формула о среднем* (5) *была верна для любой функции* $g(x)$ *с непрерывной производной на* $[a, b]$ *и для любой R-интегрируемой на* $[a, b]$ *функции* $f(x)$, **необходимо** *и достаточно чтобы* $g(x)$ *была монотонна на* $[a, b]$.

4. *Для того, чтобы формула о среднем* (6) *была верна для любой функции* $f(x)$, *интеграл которой* $\int\limits_a^x f(\ )\, dt$ *является* **монотонным, необходимо** *и достаточно чтобы функция* $g(x)$, *предположенная непрерывной, оставалась заключенной между* $g(a)$ *и* $g(b)$ *для* $x \in [a, b]$.

Интегральным формулам (1) и (5) попарно соответствуют формулы о среднем „в конечных терминах; (4) и (6), где последовательность (a_i) и (b_i) действительны, а $\bar{a}$ представляет собой среднее значений $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. В труде доказываются аналогичные свойства для таких последовательностей.

REMARQUES SUR LA PREMIÈRE ET SUR LA SECONDE FORMULE DE LA MOYENNE DU CALCUL INTÉGRAL

RÉSUMÉ

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions réelles, définies et R-intégrables sur l'intervalle fini et fermé $[a, b]$ $(a < b)$ et soit $\bar{f}$ une valeur moyenne des valeurs de la fonction $f(x)$ dans $[a, b]$. Dans le présent travail on démontre les résultats suivants :

I. *Pour que la formule de la moyenne* (1) *soit vraie pour toute fonction continue* $g(x)$ *et pour toute fonction R-intégrable* $f(x)$, **il est nécessaire** *et suffisant que* $g(x)$ *ne change pas de signe dans* $[a, b]$.

II. *Pour que la formule de la moyenne* (1) *soit vraie pour toute fonction monotone* $f(x)$, **il est nécessaire** *et suffisant que l'intégrale* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ *de la fonction R-intégrable* $g(x)$ *reste comprise entre* 0 *et* $G(b)$ *pour* $x \in [a, b]$.

III. *Pour que la formule de la moyenne* (5) *soit vraie pour toute fonction* $g(x)$ *ayant une dérivée continue dans* $[a, b]$, *et pour toute fonction* $f(x)$ *R-intégrable dans* $[a, b]$, **il est nécessaire** *et suffisant que* $g(x)$ *soit monotone dans* $[a, b]$.

IV. *Pour que la formule de la moyenne* (5) *soit vraie pour toute fonction* $f(x)$, *dont l'intégrale* $\int_a^x f(t)dt$ *est* **monotone**, **il est nécessaire** *et suffisant que la fonction* $g(x)$, *supposée continue, reste comprise entre* $g(a)$ *et* $g(b)$ *pour* $x \in [a, b]$.

Aux formules intégrales (1) et (5) correspondent respectivement les formules de la moyenne „en termes finis" (4) et (6), où les suites (a_i), (b_i) sont réelles, et $\bar{a}$ représente une moyenne des valeurs a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dans le travail sont démontrées des propriétés analogues pour de telles suites.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Bonferroni, *Sulla validità dei teoremi della media nel Calcolo integrale.* Boll. Un. Mat. Ital., **XIII**, 225–229 (1934).

Primit la 9 decembrie 1960.