GEOMETRIE INTEGRALĂ ÎNTR-UN SPAŢIU RIEMANNIAN V_n*)

DE

MARIUS I. STOKA

(Bucureşti)

Fie E_N un spaţiu euclidian cu N dimensiuni de coordonate $y^1, \ldots, y^N$ şi V_n un spaţiu riemannian, scufundat în el, definit de ecuaţiile

$$y^a = y^a(x^1, \ldots, x^n) \qquad (a = 1, \ldots, N), \tag{1}$$

unde $N \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

Notăm cu $G_\rho(x)$ grupul de mişcări cu număr maxim de parametri al spaţiului V_n.

Deci avem $\rho \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$,

egalitatea avînd loc cînd spaţiul este cu curbură constantă.

Fie $G_r(x)$ un subgrup al lui $G_\rho(x)$ definit de ecuaţiile

$$x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^r) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

unde $a^1, \ldots, a^r$ sînt parametri esenţial.

Funcţia $F(x^1, \ldots, x^n)$ este funcţie invariantă integral a grupului (2) dacă

$$\int\limits_{\mathcal{A}_x} F(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n = \int\limits_{\mathcal{A}_{x'}} F(x'^1, \ldots, x'^n)\, dx'^1 \ldots dx'^n$$

pentru orice mulţime de puncte $\mathcal{A}_x$ din spaţiul V_n, pentru care integrala are sens.

R. Deltheil a demonstrat [2][1]) că *funcţiile invariante integral ale grupului* (2) *sînt soluţiile sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\xi^i_h(x)\, F(x)\right] = 0 \qquad (h = 1, \ldots, r), \tag{3}$$

unde $X_h f = \xi^i_h(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}$ *sînt transformările infinitezimale ale grupului.*

---

*) Această lucrare se publică şi în limba germană în revista Revue de Mathématiques Pures et Appliquées, t. V, nr. 1 (1960).

[1]) pag. 28.

Am numit grupuri măsurabile grupurile Lie de transformări care admit un invariant integral unic, abstracție făcînd de o constantă multiplicativă, determinînd condițiile necesare și suficiente ca un grup Lie să fie măsurabil.

Considerăm acum în spațiul V_n o familie $\mathcal{F}_q$ de varietăți $\mathcal{V}_p$ cu p dimensiuni, definită de ecuațiile

$$F^j(x^1,\dots,x^n,\alpha^1,\dots,\alpha^q)=0 \quad (j=1,\dots,n-p), \tag{4}$$

unde $\alpha^1,\dots,\alpha^q$ sînt parametri esențiali.

Fie T o transformare din $G_\varrho(x)$ care lasă invariantă global familia $\mathcal{F}_q$ de varietăți. Mulțimea acestor transformări formează un grup Lie $\mathcal{G}$, care este un subgrup al lui $G_\varrho(x)$.

Mulțimea transformărilor S, care lasă invariantă fiecare varietate a familiei $\mathcal{F}_q$, formează un grup g care este subgrup invariant al lui $\mathcal{G}$. Putem deci atașa grupului $\mathcal{G}$ grupul factor

$$G=\mathcal{G}/g$$

care are proprietatea de a lăsa invariantă global familia de varietăți $\mathcal{F}_q$, fără a conține transformări (afară de cea identică) care să lase invariantă fiecare varietate $\mathcal{V}_p$ a familiei $\mathcal{F}_q$.

Numim grupul G grupul maxim de invarianță al familiei $\mathcal{F}_q$, iar subgrupurile lui, cu aceeași proprietate, grupuri de invarianță ale familiei.

Fie $G(x)$ un astfel de grup de invarianță al familiei $\mathcal{F}_q$, definit de ecuațiile (2).

Deci avem :

$$F^j[f^1(x,a),\dots,f^n(x,a),\alpha^1,\dots,\alpha^q]=F^j(x^1,\dots,x^n,\beta^1,\dots,\beta^q),$$

unde

$$\beta^k=g^k(\alpha^1,\dots,\alpha^q,a^1,\dots,a^r)\quad(k=1,\dots,q). \tag{5}$$

Deci grupului $G_r(x)$ de invarianță al familiei $\mathcal{F}_q$ i se atașează în spațiul X al parametrilor familiei $\mathcal{F}_q$, familia de transformări (5).

Într-o lucrare anterioară [3] [2]) am demonstrat teorema:

Familia de transformări (5) formează grup izomorf cu grupul $G_r(x)$ de invarianță al familiei de varietăți $\mathcal{F}_q$.

Am numit grupul (5) grupul atașat grupului $G_r(x)$ de invarianță al familiei $\mathcal{F}_q$ și l-am notat cu $H_r(\alpha)$.

Presupunînd că grupul $H_r(\alpha)$ este măsurabil și notînd cu $F(\alpha^1,\dots,\alpha^q)$ funcția lui invariantă integral, *am numit măsura mulțimii $\mathcal{A}$ de varietăți $\mathcal{V}_p$ față de grupul $G_r(x)$:*

$$\mu_{G_r}(\mathcal{A})=\int_{\mathcal{A}_\alpha} F(\alpha^1,\dots,\alpha^q)\,d\alpha^1\dots d\alpha^q,$$

unde $\mathcal{A}_\alpha$ este mulțimea de puncte care corespunde, în spațiul X_q, mulțimii $\mathcal{A}$ de varietăți $\mathcal{V}_p$.

[2]) pag. 911.

De asemenea *am numit familie măsurabilă, familia de varietăți care admite o măsură unică față de toate grupurile de invarianță.*

Referitor la această noțiune am demonstrat teorema [5] [3]) :

Dacă grupul atașat grupului maxim de invarianță al unei familii de varietăți este măsurabil, atunci familia este măsurabilă.

De asemenea am demonstrat teorema [6] [4]) :

Fiind date două grupuri izomorfe $G_r(x)$ și $H_r(\alpha)$, condiția necesară și suficientă ca $G_r(x)$ să fie grupul de invarianță al familiei de varietăți $\mathcal{F}_q$ (4) este ca

$$\xi^i_h(x)\frac{\partial F^j(x,\alpha)}{\partial x^i}+\eta^k_h(\alpha)\frac{\partial F^j(x,\alpha)}{\partial\alpha^k}=0, \tag{6}$$

unde $\xi^i_h(x)$ și $\eta^k_h(\alpha)$ sînt transformările infinitezimale ale grupurilor $G_r(x)$ și $H_r(\alpha)$. În acest caz $H_r(\alpha)$ este grupul atașat grupului de invarianță $G_r(x)$ față de familia $\mathcal{F}_q$.

În această lucrare ne vom ocupa de măsura familiilor de curbe dintr-un spațiu riemannian V_2, dînd formele canonice ale familiilor de curbe măsurabile dintr-un astfel de spațiu.

Fie deci, în spațiul euclidian E_3 de coordonate y^1, y^2, y^3, un spațiu riemannian V_2, definit de ecuațiile

$$y^a=\varphi^a(x^1,x^2)\qquad(a=1,2,3). \tag{7}$$

Se știe că singurele spații V_2 care admit un grup de mișcări sînt spațiile cu curbură constantă, care admit ca grup de mișcări un G_3 și suprafețele de rotație care admit ca grup de mișcări un G_1 [1] [5].

Ne vom ocupa întîi de spațiile V_2 cu curbura constantă pozitivă.

Fie deci $G_3(x)$, grupul complet de mișcări al spațiului V_2, definit de ecuațiile

$$x'^i=f(x^1,x^2,a^1,a^2,a^3)\qquad(i=1,2).$$

Considerăm de asemenea o familie $\mathcal{F}_q$ de curbe, de ecuație

$$F(x^1,x^2,\alpha^1,\dots,\alpha^q)=0,$$

unde $\alpha^1,\dots,\alpha^q$ sînt parametri esențiali.

Vom nota cu $G_r(x)$ grupul maxim de invarianță al familiei $\mathcal{F}_q$ și cu $H_r(\alpha)$ grupul atașat lui $G_r(x)$ față de familia $\mathcal{F}_q$.

Pentru ca familia $\mathcal{F}_q$ să admită măsură trebuie ca grupul $H_r(\alpha)$ sau un subgrup al lui să fie măsurabil. Deci o condiție necesară pentru ca familia $\mathcal{F}_q$ de curbe din spațiul V_2 să admită o măsură este ca $q \leqslant r$.

În cazul familiilor de curbe, care admit măsură, avem deci $q \leqslant r \leqslant 3$.

Considerînd familiile de curbe cu trei parametri din spațiul V_2 cu curbura constantă pozitivă, avem $q=r=3$. Deci singurele familii cu trei parametri de curbe, care pot admite măsură, sînt cele care au ca grup de invarianță grupul de mișcări $G_3(x)$ al lui V_2. Acest grup este deci grupul maxim de invarianță și, în baza teoremei enunțate mai sus, condiția

[3]) pag. 478.
[4]) pag. 198.
[5]) pag. 508.

necesară şi suficientă ca familia de curbe $\mathcal{F}_3$ să fie măsurabilă este ca grupul $H_3(\alpha)$, ataşat grupului $G_3(x)$ faţă de familia $\mathcal{F}_3$, să fie măsurabil.

Considerînd familiile $\mathcal{F}_2$ cu doi parametri de curbe, avem $q=2\leqslant r\leqslant 3$. Deci grupul de invarianţă al familiei trebuie să aibă doi sau trei parametri. Dar, grupul complet de mişcări al unui spaţiu V_2 cu curbura constantă pozitivă nu are niciun subgrup cu doi parametri [9][6], deci grupul de invarianţă al familiei trebuie să fie grupul $G_3(x)$ de mişcări al spaţiului. În acest caz grupul $G_3(x)$ este grupul maxim de invarianţă al familiei. Deci, pentru ca familia de curbe să fie măsurabilă trebuie ca grupul $H_3(\alpha)$, ataşat grupului $G_3(x)$ faţă de familia $\mathcal{F}_2$, să fie măsurabil.

Avem deci:

Condiţia necesară şi suficientă ca o familie cu doi sau cu trei parametri de curbe dintr-un spaţiu V_2 cu curbura constantă pozitivă să fie măsurabilă este ca grupul complet de mişcări al spaţiului să fie grup de invarianţă al familiei, iar grupul ataşat acestui grup, faţă de familie să fie măsurabil.

Vom determina acum formele canonice ale familiilor cu doi şi cu trei parametri de curbe măsurabile într-un spaţiu V_2 cu curbura constantă pozitivă. Vom presupune că spaţiul are curbura $k = 1$. În acest caz grupul $G_3(x)$ de mişcări al spaţiului are transformările infinitezimale [1][7]

$$\begin{cases} X_1 f = -\dfrac{\partial f}{\partial x^1}, \\[2mm] X_2 f = -\sin x^1 \operatorname{cotg} x^2 \dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \cos x^1 \dfrac{\partial f}{\partial x^2}, \\[2mm] X_3 f = \cos x^1 \operatorname{cotg} x^2 \dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \sin x^1 \dfrac{\partial f}{\partial x^2}. \end{cases} \tag{8}$$

Fie acum o familie cu trei parametri de curbe, de ecuaţie

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 0, \tag{9}$$

unde α^1, α^2, α^3 sînt parametri esenţiali.

Grupul $H_3(\alpha)$ ataşat grupului (8) faţă de familia (9) este deci un grup în trei variabile cu trei parametri, izomorf cu grupul (8). Pentru ca familia de curbe (9) să fie măsurabilă este necesar şi suficient ca grupul $H_3(\alpha)$ să fie măsurabil, deci simplu tranzitiv [4][8]. Într-o lucrare anterioară [8][9] am demonstrat că grupurile în trei variabile simplu tranzitive, izomorfe cu grupul (8), au transformările infinitezimale

$$\begin{cases} Y_1 f = -\dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \\[2mm] Y_2 f = -\sin \alpha^1 \operatorname{cotg} \alpha^3 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \dfrac{\sin \alpha^1}{\sin \alpha^3} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \cos \alpha^1 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^3}, \\[2mm] Y_3 f = \cos \alpha^1 \operatorname{cotg} \alpha^3 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \dfrac{\cos \alpha^1}{\sin \alpha^3} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \sin \alpha^2 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^3}. \end{cases} \tag{10}$$

[6] pag. 346.
[7] pag. 176.
[8] Pag. 8.
[9] Pag. 222.

Înlocuind expresiile (8) şi (10) în ecuaţiile (6) obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^1} = 0 \\[2mm] -\sin x^1 \operatorname{cotg} x^2 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x^1} + \cos x^1 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x^2} - \sin \alpha^1 \operatorname{cotg} \alpha^3 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^2} - \\[2mm] \qquad - \dfrac{\sin \alpha^1}{\sin \alpha^3} \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^2} + \cos \alpha^1 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^3} = 0 \\[2mm] \cos x^1 \operatorname{cotg} x^2 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x^1} + \sin x^1 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x^2} + \cos \alpha^1 \operatorname{cotg} \alpha^3 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\sin \alpha^1} + \\[2mm] \qquad + \dfrac{\cos \alpha^1}{\sin \alpha^3} \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^2} + \sin \alpha^1 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^3} = 0, \end{cases}$$

cu soluţia

$$F = F\left(\sqrt{1-\lambda^2} \cos \mu,\ \alpha^2 - \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{\sin^2 \mu + \lambda^2 \cos^2 \mu}}\right), \tag{11}$$

unde

$$\begin{cases} \lambda = \sin x^2 \sin (x^1 - \alpha^1), \\[2mm] \mu = \alpha^3 - \arccos \dfrac{\cos x^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \end{cases}$$

Grupul maxim de invarianţă al acestei familii este grupul (8), iar grupul ataşat acestuia, este grupul (10). Funcţia invariantă integral a acestui grup este

$$F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = \sin \alpha^3.$$

Avem deci:

TEOREMA 1. *Familiile cu trei parametri măsurabile de curbe, dintr-un spaţiu V_2 cu curbura constantă pozitivă, pot fi aduse, prin schimbări de variabile, la forma* (11), *avînd ca grup maxim de invarianţă grupul* (8) *de mişcări ale spaţiului, iar ca măsură*

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \sin \alpha^3 \, d\alpha^1 \, d\alpha^2 \, d\alpha^3.$$

Vom considera acum o familie cu doi parametri

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2) = 0,$$

unde α^1 şi α^2 sînt parametri esenţiali.

Pentru ca această familie să fie măsurabilă, trebuie să admită ca grup maxim de invarianţă grupul (8). Grupul $H_3(\alpha)$ este în acest caz un grup cu două variabile, izomorf cu grupul (8). El are deci transformările infinitezimale [8] [10])

$$\begin{cases} Y_1 f = -\dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \\ Y_2 f = -\sin \alpha^1 \operatorname{cotg} \alpha^2 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \cos \alpha^1 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^2}, \\ Y_3 f = \cos \alpha^1 \operatorname{cotg} \alpha^2 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \sin \alpha^1 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Înlocuind expresiile (8) şi (12) în ecuaţiile (6) obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^1} = 0, \\ -\sin x^1 \operatorname{cotg} x^2 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{x^1} + \cos x^1 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{x^2} - \sin \alpha^1 \operatorname{cotg} \alpha^2 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^1} + \\ \quad + \cos^1 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^2} = 0, \\ \cos x^1 \operatorname{cotg} x^2 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x^1} + \sin x^1 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{x^2} + \cos \alpha^1 \operatorname{cotg} \alpha^2 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^1} + \\ \quad + \sin \alpha^1 \dfrac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha^2} = 0. \end{cases}$$

care are soluţia

$$F = [\cos (x^1 - \alpha^1) \sin x^2 \sin \alpha^2 + \cos x^2 \cos \alpha^2].$$

Rezultă că familia de curbe este

$$F[\cos (x^1 - \alpha^1) \sin x^2 \sin \alpha^2 + \cos x^2 \cos \alpha^2] = 0.$$

Rezolvînd această ecuaţie deducem

$$\cos (x^1 - \alpha^1) \sin x^2 \sin \alpha^2 + \cos x^2 \cos \alpha^2 = k \qquad (k = \text{const.}). \tag{13}$$

Avînd în vedere reprezentarea parametrică a sferei

$$y^1 = \cos x^1 \sin x^2,\ y^2 = \sin x^1 \sin x^2,\ y^3 = \cos x^2, \tag{14}$$

rezultă că familia de curbe (13) este identică, pentru $k=0$, cu familia de cercuri mari

$$\cos \alpha^1 \sin \alpha^2 \cdot y^1 + \sin \alpha^1 \sin \alpha^2 \cdot y^2 + \cos \alpha^2 \cdot y^3 = 0$$

[10]) pag. 214

ale sferei (14), iar pentru $k \neq 0$ cu familia de cercuri mici

$$\cos \alpha^1 \sin \alpha^2 \cdot y^1 + \sin \alpha^1 \sin \alpha^2 \cdot y^2 + \cos \alpha^2 \cdot y^3 - k = 0$$

ale aceleiaşi sfere (14).

Înlocuind expresiile (12) în ecuaţiile (3) găsim că funcţia invariantă integral a grupului (12) este

$$F(\alpha^1, \alpha^2) = \sin \alpha^2.$$

Avem deci

TEOREMA 2. *Familiile cu doi parametri de curbe măsurabile dintr-un spaţiu V_2 cu curbura constantă pozitivă pot fi aduse la forma canonică* (13), *fiind familii cu doi parametri de cercuri şi au ca grup maxim de invarianţă grupul* (8) *de mişcări al spaţiului şi ca măsură*

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \sin \alpha^2\, d\alpha^1\, d\alpha^2.$$

Vom considera acum familiile $\mathcal{F}_1$, cu un parametru, de curbe. În acest caz avem $q = 1 \leqslant r \leqslant 3$, deci grupul de invarianţă al familiei are unul sau trei parametri. Dacă grupul de invarianţă are trei parametri el este grupul de mişcări $G_3(x)$ al spaţiului şi este grupul maxim de invarianţă al familiei $\mathcal{F}_1$. Grupul $H_3(\alpha)$ ataşat grupului $G_3(x)$ faţă de familia $\mathcal{F}_1$ este un grup cu o singură variabilă şi deci nu poate fi izomorf cu grupul $G_3(x)$ [1] [11]). Rezultă că familia $\mathcal{F}_1$ nu poate admite ca grup maxim de invarianţă grupul $G_3(x)$.

Dacă grupul maxim de invarianţă al familiei $\mathcal{F}_1$ este un grup cu un parametru $G_1(x)$, atunci grupul $H_1(\alpha)$ ataşat grupului $G_1(x)$ faţă de familia $\mathcal{F}_1$ este simplu tranzitiv şi deci măsurabil. Rezulta că în acest caz familia $\mathcal{F}_1$ de curbe este măsurabilă.

Avem deci :

Condiţia necesară şi suficientă ca o familie cu un parametru de curbe dintr-un spaţiu V_2 cu curbura constantă pozitivă să fie măsurabilă este ca grupul său maxim de invarianţă să fie un subgrup cu un parametru al grupului complet de mişcări al spaţiului.

Fie deci

$$F(x^1, x^2, \alpha) = 0$$

o astfel de familie de curbe.

Pentru ca familia să fie măsurabilă trebuie ca grupul ei maxim de invarianţă să fie un subgrup $G_1(x)$ cu un parametru al grupului (8) de mişcări al spaţiului, iar grupul lui ataşat faţă de familie să fie un grup într-o variabilă cu un parametru, deci o translaţie [1] [12])

$$\alpha' = \alpha + a.$$

[11]) Pag. 374.
[12]) pag. 374.

Ecuația (6) devine

$$\xi^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

unde $\xi^i(x)$ $(i = 1, 2)$ sînt coeficienții transformărilor infinitezimale ale grupului $G_1(x)$.

Sistemul diferențial atașat acestei ecuații este

$$\frac{\partial x^1}{\xi^1(x)} = \frac{\partial x^2}{\xi^2(x)} = d\alpha.$$

Dar acesta este tocmai sistemul diferențial al grupului $G_1(x)$.

Deci, dacă ecuațiile finite ale grupului $G_1(x)$ sînt

$$x^i = f^i\,(x^1, x^2, a) \qquad (i = 1, 2),$$

atunci familia $\mathcal{F}_1$ are ecuația

$$F[f^1(x, \alpha),\ f^2(x, \alpha)] = 0.$$

În lucrarea citată [3] [13], *am numit varietăți G_r — echivalente cu varietatea $\mathcal{V}_p$ varietățile care se obțin din varietatea $\mathcal{V}_p$, aplicîndu-i transformările grupului G_r.*

Deci, în cazul nostru, familia $\mathcal{F}_1$ este familia varietăților G_1 — echivalente cu o curbă arbitrară din spațiul V_2.

Măsura familiei F_1 este

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} d\alpha.$$

Rezultă

TEOREMA 3. *Familiile cu un parametru de curbe măsurabile, dintr-un spațiu V_2 cu curbura constantă pozitivă, sînt familiile G_1 — echivalente cu o curbă arbitrară din spațiul V_2, grupul G_1 fiind un subgrup cu un parametru al grupului complet de mișcări al spațiului. Grupul G_1 este grupul maxim de invarianță al familiei de curbe iar măsura familiei este*

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} d\alpha.$$

Ne vom ocupa acum ee spațiile V_2 cu curbura constantă negativă.

Ca și în cazul spațiului V cu curbura constantă pozitivă, pentru ca o familie cu q parametri de curbe să admită măsură, este necesar ca $q \leqslant 3$.

Considerăm deci familiile de curbe cu trei parametri din spațiul V_2 cu curbura constantă negativă. În acest caz, pentru ca familia de curbe să admită măsură, trebuie ca grupul ei de invarianță să fie un grup cu

[13]) pag. 933.

trei parametri, deci grupul de mișcări $G_3(x)$ al spațiului. În acest caz $G_3(x)$ este grupul maxim de invarianță al familiei și deci, condiția necesară și suficientă ca familia de curbe $\mathcal{F}_3$ să fie măsurabilă este ca grupul $H_3(\alpha)$, atașat lui $G_3(x)$ față de familie, să fie măsurabil, deci să fie simplu tranzitiv.

Avem deci

Condiția necesară și suficientă ca o familie cu trei parametri de curbe dintr-un spațiu V_2 cu curbura constantă negativă să fie măsurabilă este ca grupul complet de mișcări al spațiului să fie grup de invarianță al familiei, iar grupul atașat acestui grup față de familie să fie simplu tranzitiv.

Vom determina acum ecuația acestor familii.

Fie deci o familie cu trei parametri de curbe, de ecuație

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 0, \tag{15}$$

unde α^1, α^2, α^3 sînt parametri esențiali.

Grupul de mișcări al spațiului are transformările infinitezimale [1] [14])

$$G_3(x):\ X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1},\quad X_2 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2},$$

$$X_3 f = [(x^1)^2 - (x^2)^2] \frac{\partial f}{\partial x^1} + 2x^1x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}. \tag{16}$$

Grupul $H_3(\alpha)$ atașat grupului (16) față de familia (15) este deci un grup în trei variabile cu trei parametri, izomorf cu grupul (16). Pentru ca familia (15) să fie măsurabilă trebuie ca grupul $H_3(\alpha)$ să fie simplu tranzitiv, deci să aibă transformările infinitezimale [8] [15])

$$Y_1 f = e^{-\alpha^3} \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - (\alpha^2)^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} - 2\alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^3}\right],\ Y_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},\ Y_3 f = e^{\alpha^3} \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}. \tag{17}$$

Înlocuind expresiile (16) și (17) în ecuațiile (6) obținem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + e^{-\alpha^3}\left[\dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} - (\alpha^2)^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} - 2\alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3}\right] = 0 \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0 \\ [(x^1)^2 - (x^2)^2] \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + 2x^1x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + e^{\alpha^3} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{cases}$$

care are soluția

$$F = F\left(\frac{\lambda^2 \mu^2 + 1}{\lambda},\ \alpha^1 - \frac{\lambda^2 \mu}{\lambda^2 \mu^2 + 1}\right),$$

[14]) pag. 511.
[15]) pag. 226.

unde am notat

$$\lambda = \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{x^2 e^{\alpha^3}}, \quad \mu = \alpha^2 + \frac{x^1 e^{\alpha^3}}{(x^1)^2 + (x^2)^2}. \tag{18}$$

Deci familia de curbe este

$$F\left(\frac{\lambda^2\mu^2 + 1}{\lambda}, \alpha^1 - \frac{\lambda^2\mu}{\lambda^2\mu^2 + 1}\right) = 0.$$

unde λ şi μ au valorile date de relaţiile (18).

Grupul maxim de invarianţă al acestei familii este grupul (16) iar grupul ataşat acestuia faţă de familie este grupul (17) cu funcţia invarianţă integral

$$F(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 1.$$

Rezultă

TEOREMA 4. *Familiile cu trei parametri măsurabile de curbe dintr-un spaţiu V_2 cu curbura constantă negativă au ecuaţia*

$$F\left(\frac{\lambda^2\mu^2 + 1}{\lambda}, \alpha^1 - \frac{\lambda^2\mu}{\lambda^2\mu^2 + 1}\right) = 0,$$

unde λ şi μ au valorile date de relaţiile (18), *avînd grup maxim de invarianţă grupul* (16) *de mişcări al spaţiului, iar ca măsură*

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3.$$

Considerînd acum familiile $\mathcal{F}_2$ cu doi parametri de curbe avem $q = 2 \leqslant r \leqslant 3$. Deci, pentru ca familia să admită măsură, trebuie ca grupul ei de invarianţă să aibă doi sau trei parametri.

Bianchi a arătat [1][16]) că orice subgrup cu doi parametri al grupului (16), de mişcări al spaţiului V_2 cu curbura constantă negativă, poate fi adus, prin schimbări de parametri, să fie definit de operatorii

$$G_2(x):\quad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_2 f = x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}. \tag{19}$$

Dacă grupul de invarianţă al familiei are doi parametri, el este grupul $G_2(x)$, (19). În acest caz grupul (16) poate să fie grup de invarianţă al familiei sau nu. Dacă grupul (16) nu este grup de invarianţă al familiei, atunci grupul ei maxim de invarianţă este $G_2(x)$, (19). Dacă grupul (16) este grup de invarianţă, atunci el este grupul maxim de invarianţă al familiei.

Presupunînd că grupul (19) este grupul maxim de invarianţă al familiei, deci că grupul (16) nu este grup de invarianţă al ei, grupul ataşat grupului

[16]) pag. 513

(19) faţă de familia $\mathcal{F}_2$ de curbe este un grup $H_2(\alpha)$ în două variabile şi doi parametri, izomorf cu grupul (19). Deci, pentru ca familia $\mathcal{F}_2$ să fie măsurabilă, trebuie ca grupul $H_2(\alpha)$ să fie simplu tranzitiv.

Dacă grupul (16) este grupul maxim de invarianţă al familiei, grupul ataşat lui faţă de familia $\mathcal{F}_2$ este un grup $H_3(\alpha)$ în două variabile şi trei parametri, izomorf cu grupul (16). Deci, pentru ca familia să fie măsurabilă trebuie ca grupul $H_3(\alpha)$ să fie măsurabil.

Ne vom ocupa întîi de cazul în care grupul (16) este grupul maxim de invarianţă al familiei.

Fie deci

$$F(x^1, x^2, \alpha^1, \alpha^2) = 0 \tag{20}$$

ecuaţia familiei $\mathcal{F}_2$ de curbe.

Pentru ca grupul $H_3(\alpha)$, ataşat grupului (16) faţă de această familie, să fie măsurabil este necesar ca el să fie tranzitiv. În lucrarea citată [8][17]) am demonstrat că un grup în două variabile şi trei paraetri, tranzitiv, izomorf cu grupul (16), are transformările infinitezimale

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \quad Y_2 f = \alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$Y_3 f = [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2]\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + 2\alpha^1\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2}. \tag{21}$$

Acest grup este măsurabil, deci familia $\mathcal{F}_2$ de curbe este măsurabilă. Înlocuind valorile (16) şi (21) în ecuaţia (6) obţinem sistemul

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0\\ &x^1\frac{\partial F}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0\\ &[(x^1)^2 - (x^2)^2]\frac{\partial F}{\partial x^1} + 2x^1x^2\frac{\partial F}{\partial x^2} + [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2]\frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^1\alpha^2\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0, \end{aligned}\right.$$

care are soluţia

$$F\left[\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\alpha^1x^1 + (\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2}{\alpha^2x^2}\right] = 0.$$

Rezolvînd această ecuaţie găsim

$$(x^1 - \alpha^1)^2 + (x^2)^2 + (\alpha^2) - k\alpha^2x^2 = 0 \qquad (k = \text{const.}). \tag{22}$$

Deci, familiile $\mathcal{F}_2$ măsurabile de curbe, din spaţiul V_2 cu curbura constantă negativă, care admit ca grup de invarianţă grupul complet de mişcări al spaţiului, au ecuaţia (22).

[17]) pag. 218.

Grupul atașat grupului (16) față de familia (22) este grupul (21), care are funcția invariantă integral

$$F(\alpha^1\alpha^2) = \frac{2}{(\alpha^2)^2},$$

deci măsura familiei este

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_a} \frac{d\alpha^1 d\alpha^2}{(\alpha^2)^2}. \tag{23}$$

Vom presupune acum că grupul (19) este grupul maxim de invarianță al familiei (20), deci că grupul (16) nu este grup de invarianță al ei. În acest caz, pentru ca familia să fie măsurabilă trebuie ca grupul $H_2(\alpha)$, în două variabile și cu doi parametri, atașat grupului (16) față de familie, să fie simplu tranzitiv. Deci el trebuie să aibă transformările infinitezimale [1][18])

$$Y_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \quad Y_2 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}. \tag{24}$$

Înlocuind extresiile (19) și (24) în ecuațiile (6) obținem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0 \\ x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + x^2 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \alpha^1 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \dfrac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0 \end{cases}$$

cu soluția

$$F\left(\frac{x^1 - \alpha^1}{\alpha^2}, \frac{x^2}{\alpha^2}\right) = 0. \tag{25}$$

Pentru ca familia (25) să nu admită grupul (16) ca grup de invarianță trebuie ca funcția (25) să satisfacă inegalitatea

$$[(x^1)^2 - (x^2)^2] \frac{\partial F}{\partial x^1} + 2x^1x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2} + [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2] \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + 2\alpha^1\alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0. \tag{26}$$

În acest caz familia (25) admite ca grup maxim de invarianță grupul (19) și ca măsură

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_a} \frac{d\alpha^1 d\alpha^2}{(\alpha^2)^2}.$$

Rezultă

TEOREMA 5. *Familiile cu doi parametri de curbe măsurabile dintr-un spațiu V_2 cu curbura constantă negativă au ecuația (22), cu grupul maxim*

[18]) pag. 510.

de invarianță (16) și măsura (23) sau au ecuația (25), (26), cu grupul maxim de invarianță (19) și măsura (23).

Vom considera acum familiile cu un parametru de curbe din spațiul V_2 cu curbura constantă negativă.

În acest caz avem

$$q = 1 \leqslant r \leqslant 3,$$

deci, pentru ca familia $\mathcal{F}_1$ să admită măsură, trebuie ca grupul ei de invarianță să aibă unul, doi sau trei parametri.

Într-o lucrare anterioară [7][19]) am demonstrat teorema

Condiția necesară și suficientă, ca o familie cu un parametru de varietăți să fie măsurabilă, este ca grupul atașat grupului maxim de invarianță al familiei, față de familie să fie o translație într-o variabilă.

Deci, în cazul nostru, pentru ca familia $\mathcal{F}_1$ să fie măsurabilă, trebuie ca grupul atașat grupului maxim de invarianță al familiei să fie translația

$$\alpha' = \alpha + a.$$

De aici rezultă că grupul maxim de invarianță al familiei trebuie să fie un grup cu un parametru, subgrup al grupului (16) de mișcări al spațiului.

În același mod în care am obținut teorema 3, obținem

TEOREMA 6. *Familiile cu un parametru de curbe măsurabile dintr-un spațiu V_2 cu curbura constantă negativă sînt familiile G_1-echivalente cu o curbă arbitrară din spațiul V_2, grupul G_1 fiind un subgrup cu un parametru al grupului complet de mișcări al spațiului. Grupul G_1 este grupul maxim de invarinață al familiei de curbe, iar măsura familiei este*

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_a} d\alpha.$$

Ne vom ocupa acum de suprafețele de rotație.

Fie deci o suprafață de rotație cu metrica

$$ds^2 = (dx^1)^2 + [\varphi(x^1)dx^2]^2. \tag{27}$$

Bianchi a arătat [1][20]) că această suprafață de rotație admite ca grup de mișcări grupul $G(x)$

$$\begin{cases} x'^1 = x^1 \\ x'^2 = x^2 + a. \end{cases} \tag{28}$$

Deci, o condiție necesară pentru ca o familie de curbe de pe suprafața de rotație (27) să admită măsură este ca grupul (28) să fie grupul ei de invarianță. În acest caz grupul (28) este grupul maxim de invarianță al familiei și pentru ca ea să fie măsurabilă trebuie ca grupul atașat grupului (28)

[19]) pag. 124.
[20]) pag. 506.

față de familia de curbe să fie măsurabil. Avînd în vedere că acest grup este într-o variabilă și cu un parametru, el trebuie să fie translația

$$\alpha^1 = \alpha + a. \tag{29}$$

Avînd în vedere expresiile (28) și (29), ecuația (6) se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

cu soluția

$$F(x^1, x^2 - \alpha) = 0.$$

Rezultă

TEOREMA 7. *Singurele familii măsurabile de curbe de pe suprafața de rotație* (27) *sînt familiile cu un parametru*

$$F(x^1, x - \alpha) = 0$$

care admit ca grup maxim de invarianță grupul (28) *și ca măsură*

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} d\alpha.$$

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Исходя из ранее достигнутых результатов относительно измеримых групп Ли, меры семейств многобразий и семейств измеримых многобразий, автор определяет семейства кривых, измеримых в римановом пространстве V_2.

LA GÉOMÉTRIE INTÉGRALE DANS UN ESPACE RIEMANNIEN V_n

RÉSUMÉ

En partant de résultats obtenus antérieurement relatifs aux groupes de Lie mesurables, à la mesure des familles de variétés et aux familles de variétés mesurables, l'auteur détermine les familles de courbes mesurables d'un espace riemannien V_2.

BIBLIOGRAFIE

1. B i a n c h i L., *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*. Bologna, 1928.
2. D e l t h e i l R., *Probabilités géométriques*, Paris, 1926.
3. S t o k a M., *Măsura unei mulțimi de varietăți dintr-un spațiu R_n*. Bul. Șt. Acad. R.P.R., VII; *4* (1955).
4. — *Asupra grupurilor G_r măsurabile dintr-un spațiu E_n*. Comunicările Acad. R.P.R., IX, *1* (1959).
5. — *Geometria integrale in uno spazio euclideo E_n*. Bolletino della Unione Matematica Italiana, **13**, *4* (1958).
6. — *Famiglie di varietà misurabili in uno spazio euclideo E_n*. Rend. del Circolo Mat. di Palermo, **8**, *2* (1959).
7. — *Géométrie intégrale dans un espace E_n*. Revue de Math. Pures et Apliq., IV, *1* (1959).
8. — *Asupra grupurilor de mișcare ale spațiilor riemanniene V_2 cu curbura constantă*. Studii și Cercetări Matematice, XI, *1* (1960).
9. V r ă n c e a n u G., *Leçons de Géométrie Différentielle* I. Bucarest, 1957.

Primit la 12 octombrie 1960.