DESPRE RESTUL UNOR FORMULE DE TIP RUNGE-KUTTA PENTRU INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

DE

OLEG ARAMĂ

(Cluj)

Lucrare prezentată la Consfătuirea tehnico-științifică asupra mașinilor electronice de calcul, din 13 — 15 ianuarie 1960, București

§ 1. Formularea problemei

Fie ecuația diferențială

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

cu condiția

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Vom presupune pentru început că sînt îndeplinite toate condițiile pentru ca ecuația (1) să admită o integrală $y(x)$ care să satisfacă condiția (2) și care să fie analitică într-un interval suficient de mare, conținînd punctele x_0 și $x_0 + h$.

În lucrarea [10], prof. D. V. Ionescu a elaborat un procedeu recurent pentru construirea unor funcții $M^{(p)}(h)$, care dezvoltate după puterile lui h au primii $p+1$ termeni (oricare ar fi numărul natural p) identici respectiv cu primii $p+1$ termeni ai dezvoltării funcției $y(x_0 + h)$ după puterile lui h. Acest procedeu se bazează pe următoarea proprietate stabilită în lucrarea [10].

Fie o formulă de cvadratură de forma

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(s)\, ds = h \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)} \varphi(x_0 + \lambda_i^{(p)} h) + R^{(p)}(h;\varphi), \qquad (3)$$

aleasă astfel încît gradul ei de exactitate g_p să satisfacă inegalitatea $g_p \geqq p$ [1].

Fie apoi $M^{(p)}(h)$ o funcție analitică, care dezvoltată după puterile lui h să aibă primii $p+1$ termeni identici respectiv cu primii $p+1$ termeni ai dezvoltării funcției $y(x_0 + h)$ după puterile lui h.

În aceste condiții, funcția $M^{(p+1)}(h)$ construită cu ajutorul formulei de cvadratură (3), precum urmează

$$M^{(p+1)}(h) = y_0 + h \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)} f[x_0 + \lambda_i^{(p)} h,\ M^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h)], \qquad (4)$$

dezvoltată după puterile lui h, are primii $p+2$ termeni identici respectiv cu primii $p+2$ termeni din dezvoltarea după puterile lui h a funcției $y(x_0+h)$.

Folosind această proprietate, în lucrarea [10] se construiesc șiruri de funcții de forma

$$\begin{aligned}
M^{(1)}(h) &= y_0 + h\, f(x_0, y_0),\\
M^{(2)}(h) &= y_0 + h \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i^{(1)} f[x_0 + \lambda_i^{(1)} h,\ M^{(1)}(\lambda_i^{(1)} h)],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
M^{(p)}(h) &= y_0 + h \sum_{i=1}^{r_{p-1}} \alpha_i^{(p-1)} f[x_0 + \lambda_i^{(p-1)} h,\ M^{(p-1)}(\lambda_i^{(p-1)} h)],\\
M^{(p+1)}(h) &= y_0 + h \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)} f[x_0 + \lambda_i^{(p)} h,\ M^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h)],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
M^{(n+1)}(h) &= y_0 + h \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_i^{(n)} f[x_0 + \lambda_i^{(n)} h),\ M^{(n)}(\lambda_i^{(n)} h)],
\end{aligned} \qquad (5)$$

care aproximează din ce în ce mai bine funcția $y(x_0+h)$, aproximarea fiind înțeleasă în sensul coincidenței unui număr cît mai mare de termeni din dezvoltările respective în serii după puterile lui h.

În formulele (5), oricare ar fi numărul natural p, coeficienții $\alpha_1^{(p)}$, $\alpha_2^{(p)}, \dots, \alpha_{r_p}^{(p)}$ precum și $\lambda_1^{(p)}, \lambda_2^{(p)}, \dots, \lambda_{r_p}^{(p)}$ care intervin în expresia func-

[1]) Prin gradul de exactitate al unei formule (3), se înțelege un număr întreg nenegativ g_p, maxim posibil, astfel încît restul formulei considerate să se anuleze pentru orice polinom de grad $\leq g_p$ și să fie diferit de zero pentru cel puțin un polinom de grad $g_p + 1$.

ției $M^{(p+1)}(h)$, reprezintă respectiv coeficienții unor formule de cvadratură de forma (3), ale căror grade de exactitate g_p satisfac respectiv inegalitățile $g_p \geqq p$.

În această notă, în ipoteze mai generale decît cele formulate anterior, se dă o delimitare pentru erorile

$$\varepsilon^{(p+1)}(h) = M^{(p+1)}(h) - y(x_0 + h), \qquad (p = 0, 1, \dots, n), \qquad (6)$$

care se comit în cazul cînd se iau în locul valorii exacte $y(x_0+h)$, valorile aproximative $M^{(p+1)}(h)$, obținute din aproape în aproape cu ajutorul formulelor (5).

Procedeul de calcul care ne conduce la considerarea funcției $M^{(p+1)}(h)$ îl vom nota cu $\{M^{(p+1)}\}$. Plecînd de la un astfel de procedeu (p fiind un număr fixat), se poate concepe cu ajutorul lui o metodă de integrare numerică de tip Euler-Picone, [19], precum urmează : Se împarte intervalul de integrare $[x_0, x]$ în n părți, prin puncte de diviziune $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x$ și se poartă procedeul $\{M^{(p+1)}\}$ din nod în nod, considerîndu-se de fiecare rînd, ca date inițiale, datele obținute în etapa precedentă. Referitor la o astfel de metodă de tip Euler-Picone, numărul $\varepsilon^{(p+1)}(h)$ reprezintă eroarea comisă la primul pas. Folosind delimitarea dată în prezenta notă pentru eroarea $\varepsilon^{(p+1)}(h)$, E. Schechter a stabilit în lucrarea [22] delimitări pentru erorile ce se comit la pașii următori.

§ 2. Cîteva considerații privind formulele de cvadratură (3)

Înainte de a intra în subiectul expunerii, vom reaminti cîteva rezultate cunoscute, privitoare la formulele de cvadratură (3).

Prin felul cum a fost aleasă formula de cvadratură (3), rezultă că au loc relațiile

$$\sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)} (\lambda_i^{(p)})^k = \frac{1}{k+1}, \qquad k = 0, 1, \dots, g_p, \qquad (7)$$

unde $g_p \geqq p$. De aici rezultă că dacă se presupun coeficienții $\lambda_i^{(p)}$ dați, atunci ceilalți coeficienți $\alpha_i^{(p)}$ se vor exprima în funcție de coeficienții $\lambda_i^{(p)}$ și nu vor depinde de x_0 și h.

Pentru fixarea ideilor, adoptăm la început următoarele ipoteze simplificatoare cu privire la formulele de cvadratură (3), care intervin în construcția funcției $M^{(n+1)}(h)$:

Ipoteze. 1°. Oricare ar fi numărul $p = 1, 2, \dots, n$, toți coeficienții $\alpha_i^{(p)}$ ai formulelor de cvadratură (3) sînt pozitivi.

2°. Numerele $\lambda_i^{(p)}$ care intervin în aceleași formule de cvadratură satisfac inegalitățile $0 \leqq \lambda_i^{(p)} \leqq 1$.

(Aceste două ipoteze vor fi înlăturate în cele ce urmează).

Presupunînd numerele x_0 și h fixate, restul $R^{(p)}(\varphi)$ al formulei de cvadratură (3) apare o funcțională liniară, definită pe spațiul funcțiilor continue în intervalul $[x_0, x_0 + h]$.

Pentru a nu complica expunerea, vom presupune în cele ce urmează că $R^{(p)}(\varphi) \neq 0$ pentru orice funcție $\varphi(x)$ convexă de ordinul g_p (adică pentru orice funcție ale cărei diferențe divizate pe $g_p + 2$ noduri din intervalul $[x_0, x_0 + h]$ sînt pozitive). În lucrarea [17] prof. T. Popoviciu a arătat că o astfel de funcțională liniară are *forma clasică*, adică forma

$$R^{(p)}(\varphi) = K^{(p)}[x_1, x_2, \ldots, x_{g_p+2}; \varphi], \tag{8}$$

unde $K^{(p)}$ este o constantă independentă de funcția φ, iar $x_1, x_2, \ldots, x_{g_p+2}$ sînt $g_p + 2$ puncte din intervalul $[x_0, x_0 + h]$ (aceste puncte, în general, depind de funcția φ). Constanta $K^{(p)}$, după cum rezultă tot din lucrarea [14], este dată de formula

$$K^{(p)} = R^{(p)}(x^{g_p+1}) = R^{(p)}[(x - x_0)^{g_p+1}].$$

Efectuînd calculele, găsim

$$K^{(p)} = h^{g_p+2}\left[\frac{1}{g_p + 2} - \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)} (\lambda_i^{(p)})^{g_p+1}\right] = \gamma^{(p)} h^{g_p+2}, \tag{9}$$

unde prin $\gamma^{(p)}$ s-a notat coeficientul lui h^{g_p+2} din expresia de mai sus. Dacă se presupune că funcția $\varphi(x)$ admite în intervalul $[x_0, x_0 + h]$ derivate pînă la ordinul $g_p + 1$ inclusiv, ultima fiind continuă în interavlul $[x_0, x_0 + h]$, atunci diferența divizată care figurează în formula (8) se poate pune sub forma

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{g_p+2}; \varphi] = \frac{1}{(g_p + 1)!} \cdot \frac{d^{g_p+1}\varphi(\xi)}{dx^{g_p+1}}, \tag{10}$$

unde ξ este un punct din intervalul $[x_0, x_0 + h]$. În aceste ipoteze, din formulele (8), (9) și (10) rezultă pentru restul $R^{(p)}(\varphi)$ expresia

$$R^{(p)}(\varphi) = \frac{\gamma^{(p)} h^{g_p+2}}{(g_p + 1)!} \cdot \frac{d^{g_p+1}\varphi(\xi)}{dx^{g_p+1}}. \tag{11}$$

În cele ce urmează, vom transcrie expresia (11) a restului sub forma

$$R^{(p)}(h; \varphi) = h^{p+2}\rho^{(p)}(h; \varphi), \tag{12}$$

care este justificată de inegalitatea $g_p \geqq p$. Aici s-a notat

$$\rho^{(p)}(h; \varphi) = \frac{\gamma^{(p)} h^{g_p-p}}{(g_p + 1)!} \cdot \frac{d^{g_p+1}\varphi(\xi)}{dx^{g_p+1}}. \tag{13}$$

§ 3. Considerații asupra metodei de integrare (5)

În cele ce urmează vom ține seamă de următoarele ipoteze:

Ipoteze. 1°. Funcția $f(x, y)$ care intervine în membrul drept al ecuației (1) este continuă într-un domeniu (D) definit de inegalitățile

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b, \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Fie $M = \max\limits_{(D)} |f(x, y)|$, $a^* = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ și fie (D^*) domeniul definit de inegalitățile

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a^*, \qquad y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b.$$

2°. În domeniul (D^*) funcția $f(x, y)$ admite derivate parțiale continue de ordinul $\nu = 1 + \max\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$.

În aceste ipoteze au loc următoarele proprietăți:

Proprietăți. I. În intervalul $[x_0, x_0 + a]$, ecuația diferențială (1) admite o integrală $y(x)$ și una singură, satisfăcînd condiția (2). În același interval $[x_0, x_0 + a^*]$, integrala $y(x)$ satisface inegalitățile

$$y_0 - b \leqq y(x) \leqq y_0 + b$$

și admite derivate continue pînă la ordinul $\nu + 1$ inclusiv. (Aceste proprietăți se stabilesc cu ocazia demonstrării teoremei lui E. Picard privind existența soluțiilor ecuațiilor diferențiale).

II. Oricare ar fi numărul h satisfăcînd inegalitățile $0 \leqq h \leqq a^*$, valorile funcțiilor $M^{(1)}(h), M^{(2)}(h), \ldots, M^{(n+1)}(h)$ se vor situa în intervalul $[y_0 - b, y_0 + b]$.

Într-adevăr, pentru funcția $M^{(1)}(h)$ deducem din (5) relația

$$|M^{(1)}(h) - y_0| = h\,|f(x_0, y_0)| \leqq h M \leqq b,$$

valabilă oricare ar fi $h \in [0, a^*]$.

Presupunem acuma proprietatea adevărată pentru funcția $M^{(p)}(h)$, unde p este unul din numerele $2, 3, \ldots, n$, adică

$$|M^{(p)}(h) - y_0| \leqq b, \qquad h \in [0, a^*] \tag{14}$$

și să demonstrăm că ea este valabilă și pentru funcția $M^{(p+1)}(h)$.

Într-adevăr, ținînd sema de relația (4), precum și de prima relație din (7), se observă că funcția $M^{(p+1)}(h)$ se prezintă ca o medie a valorilor funcției $f[x_0 + h, M^{(p)}(h)]$, considerate pentru valorile $\lambda_i^{(p)} h$, $(i = 1, 2, \ldots, r_p)$ ale variabilei h, valori care sînt situate în intervalul $[0, a]$ datorită inegalității $0 \leqq h \leqq a^*$ pe care o satisface numărul ales h și datorită ipotezei că numerele $\lambda_i^{(p)}$ satisfac inegalitățile $0 \leqq \lambda_i^{(p)} \leqq 1$. Dar întrucît prin ipoteză funcția $f(x, y)$ este continuă în domeniul (D^*), rezultă, ținînd seamă și de (14), că funcția $f[x_0 + h, M^{(p)}(h)]$ de variabila h este continuă în intervalul $h \in [0, a^*]$. Putem atunci aplica o formulă de medie, care să reducă numărul termenilor ce figurează în combinația liniară din (4), la un singur termen. Astfel obținem

$$M^{(p+1)}(h) = y_0 + h\left(\sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)}\right) f[x_0 + \bar{\lambda}^{(p)} h,\ M^{(p)}(\bar{\lambda}^{(p)} h)] =$$

$$= y_0 + h f[x_0 + \bar{\lambda}^{(p)} h,\ M^{(p)}(\bar{\lambda}^{(p)} h)],$$

unde $\bar{\lambda}^{(p)} \in [0,\ 1]$. Aici s-a ținut seamă de prima relație din (7) și de asemenea de faptul că toți coeficienții $\alpha_i^{(p)}$ sînt pozitivi. Din egalitățile precedente deducem delimitarea

$$|\ M^{(p+1)}(h) - y_0\ | = h\ |\ f[x_0 + \bar{\lambda}^{(p)}(h),\ \ M^{(p)}(\bar{\lambda}^{(p)} h)]\ | \leqq h\ M \leqq b$$

și astfel proprietatea este demonstrată.

Observație. Din proprietatea stabilită mai sus rezultă că în ipotezele adoptate, dacă $h \in [0,\ a^*]$, atunci oricare ar fi $p = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, toate numerele

$$
\begin{aligned}
& M^{(p+1)}(h)\ , \\
& M^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h),\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_p) \\
& M^{(p-1)}(\lambda_i^{(p)} \lambda_j^{(p-1)} h),\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_p;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_{p-1}) \qquad (15) \\
& M^{(p-2)}(\lambda_i^{(p)} \lambda_j^{(p-1)} \lambda_k^{(p-2)} h),\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_p;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_{p-1}; \\
& \qquad\qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_{p-2}) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& M^{(1)}(\lambda_i^{(p)} \lambda_j^{(p-1)} \lambda_k^{(p-2)} \ldots \lambda_l^{(1)} h),\ (i,\ j,\ k,\ \ldots,\ l),
\end{aligned}
$$

care intervin ca valori ale argumentului y al funcției $f(x, y)$ în schema de calcul (5), sînt situate în intervalul $[y_0 - b,\ y_0 + b]$. De aici rezultă că dacă $h \in [0,\ a^*]$, atunci domeniul (D^*) conține toate punctele $(x,\ y)$ pentru care se calculează valorile funcției $f(x, y)$ în vederea obținerii numărului $M^{(n)}(h)$.

§ 4. Delimitarea erorilor $\varepsilon^{(p+1)}(h)$

Vom da întîi o delimitare pentru $\varepsilon^{(1)}(h)$. După cum se indică în (5), avem

$$M^{(1)}(h) = y_0 + h\ f(x_0,\ y_0),$$

astfel că

$$\varepsilon^{(1)}(h) = M^{(1)}(h) - y\,(x_0 + h) = y_0 + h\,f(x_0, y_0) - y(x_0 + h) = -\frac{h^2}{2\,!} F'\,(\xi),$$

unde $F(x) = f\,[x,\ y(x)]$, iar ξ reprezintă un număr situat în intervalul $(x_0,\ x_0 + h)$. Notînd $\rho^{(0)}(h\,;\ F) = \dfrac{F'(\xi)}{2\,!}$, obținem formula

$$\varepsilon^{(1)}(h) = -\ h^2 \rho^{(0)}(h\,;\ F). \qquad (16)$$

În continuare să delimităm eroarea $\varepsilon^{(p+1)}(h)$, unde p este un număr natural satisfăcînd inegalitatea $p \leqq n - 1$. Scriind

$$y\,(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} F\,(s)\ \mathrm{d}s$$

și ținînd seamă de formula (4) obținem

$$\varepsilon^{(p+1)}(h) = h \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)} f\,[x_0 + \lambda_i^{(p)} h,\ \ M^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h)] - \int_{x_0}^{x_0+h} F(s)\ \mathrm{d}s$$

și deci

$$\varepsilon^{(p+1)}(h) = \left\{h \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)} f\,[x_0 + \lambda_i^{(p)} h,\ \ y\,(x_0 + \lambda_i^{(p)} h)] - \int_{x_0}^{x_0+h} F(s)\ \mathrm{d}s\right\} +$$

$$+ \left\{h \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)}\,[f(x_0 + \lambda_i^{(p)} h,\ M^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h)) - f(x_0 + \lambda_i^{(p)} h,\ y\,(x_0 + \lambda_i^{(p)} h))]\right\}.$$

Luînd valorile absolute în ambii membrii și notînd $L = \sup\limits_{(D^*)} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$, obținem delimitarea

$$|\ \varepsilon^{(p+1)}(h)\ | \leqq |\ R^{(p)}(h\,;\ F)\ | + h\,L \sum_{i=1}^{r_p} |\ \alpha_i^{(p)}\ |\ \ |\ M^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h) - y\,(x_0 + \lambda_i^{(p)} h)\,|, \qquad (17)$$

unde $R^{(p)}(h\,; F)$ reprezintă restul formulei de cvadratură (3) în cazul funcției $\varphi(s) \equiv F(s)$ și acest rest, conform formulei (12), se va scrie :

$$R^{(p)}(h\,;\ F) = h^{p+2} \rho^{(p)}(h\,;\ F).$$

Apoi, ținînd seamă de formula (6), diferența ce figurează sub semnul sumă se poate scrie

$$M^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h) - y\,(x_0 + \lambda_i^{(p)} h) = \varepsilon^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h)$$

şi această diferenţă reprezintă eroarea ce se comite în punctul $x_0 + \lambda_i^{(p)} h$, cînd integrarea aproximativă se face cu procedeul precedent $\{M^{(p)}\}$ cu un pas de lungime $\lambda_i^{(p)} h$. Astfel formula (17) se transcrie

$$|\varepsilon^{(p+1)}(h)| \leqq h^{p+2} |\rho^{(p)}(h; F)| + hL \sum_{i=1}^{r_p} |\alpha_i^{(p)}| \, |\varepsilon^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h)|. \tag{18}$$

Introducem următoarele notaţii

$$\begin{gathered} A_0^{(p)} = \sum_{i=1}^{r_p} |\alpha_i^{(p)}|, \quad A_1^{(p)} = \sum_{i=1}^{r_p} |\alpha_i^{(p)}| \, |\lambda_i^{(p)}|, \ \ldots \\ A_k^{(p)} = \sum_{i=1}^{r_p} |\alpha_i^{(p)}| \, |\lambda_i^{(p)}|^k, \ (k = 0, 1, 2, \ldots ; p = 1, 2, \ldots) \end{gathered} \tag{19}$$

şi de asemenea notaţiile

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_p^{(p)}(h) &= |\rho^{(p)}(h; F)| \\ \bar{\rho}_p^{(p-1)}(h) &= \max_{i=1, 2, \ldots, r_p} |\rho^{(p-1)}(\lambda_i^{(p)} h; F)| \\ \bar{\rho}_p^{(p-2)}(h) &= \max_{\substack{i=1, 2, \ldots, r_p \\ j=1, 2, \ldots, r_{p-1}}} |\rho^{(p-2)}(\lambda_i^{(p)} \lambda_j^{(p-1)} h; F)| \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{\rho}_p^{(0)}(h) &= \max_{i, j, \ldots, l} |\rho^{(0)}(\lambda_i^{(p)} \lambda_j^{(p-1)} \lambda_k^{(p-2)} \ldots \lambda_l^{(1)} h; F)| \end{aligned} \tag{20}$$

p fiind unul din numerele 1, 2, ..., n.

Aici $\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}, \ldots, \alpha_{r_\nu}^{(\nu)}$ şi $\lambda_1^{(\nu)}, \lambda_2^{(\nu)}, \ldots, \lambda_{r_\nu}^{(\nu)}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ reprezintă coeficienţii formulelor de cvadratură de forma (3), utilizate succesiv la construirea funcţiei $M^{(p+1)}(h)$. Cu aceste notaţii, prin aplicarea din aproape în aproape a inegalităţii (18), obţinem delimitarea

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{(p+1)}(h)| \leqq h^{p+2} [\bar{\rho}_p^{(p)}(h) + L\bar{\rho}_p^{(p-1)}(h) A_{p+1}^{(p)} + L^2 \bar{\rho}_p^{(p-2)}(h) A_{p+1}^{(p)} A_p^{(p-1)} + \\ + L^3 \bar{\rho}_p^{(p-3)}(h) A_{p+1}^{(p)} A_p^{(p-1)} A_{p-1}^{(p-2)} + \ldots + L^p \bar{\rho}_p^{(0)}(h) A_{p+1}^{(p)} A_p^{(p-1)} \ldots A_2^{(1)}], \end{aligned} \tag{21}$$

valabilă pentru $p = 1, 2, \ldots, n$. Verificarea acestei inegalităţi se face prin inducţie. Astfel pentru $p = 1$, obţinem din (18) delimitarea :

$$|\varepsilon^{(2)}(h)| \leqq h^3 |\rho^{(1)}(h; F)| + hL \sum_{i=1}^{r_1} |\alpha_i^{(1)}| \, |\varepsilon^{(1)}(\lambda_i^{(1)} h)|$$

şi ţinînd seamă de (16), obţinem

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{(2)}(h)| \leqq h^3 |\rho^{(1)}(h; F)| + h^3 L \sum_{i=1}^{r_1} |\alpha_i^{(1)}| \, |\lambda_i^{(1)}|^2 \cdot \max_{i=1, 2, \ldots, r_1} |\rho^{(0)}(\lambda_i^{(1)} h; F)| = \\ = h^3 [\bar{\rho}_1^{(1)}(h) + L\bar{\rho}_1^{(0)}(h) A_2^{(1)}]. \end{aligned}$$

Aceasta ne arată că inegalitatea (21) este adevărată pentru $p = 1$. Vom presupune acum că proprietatea în cauză este adevărată pentru numărul $p - 1$, adică are loc relaţia

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{(p)}(h)| \leqq h^{p+1} [\bar{\rho}_{p-1}^{(p-1)}(h) + L\bar{\rho}_{p-1}^{(p-2)}(h) A_p^{(p-1)} + L^2 \bar{\rho}_{p-1}^{(p-3)}(h) A_p^{(p-1)} A_{p-1}^{(p-2)} + \\ + \ldots + L^{p-1} \bar{\rho}_{p-1}^{(0)}(h) A_p^{(p-1)} A_{p-1}^{(p-2)} \ldots A_2^{(1)}] \end{aligned} \tag{22}$$

şi vom verifica cu ajutorul relaţiei (18) că proprietatea este adevărată şi pentru numărul p, adică are loc relaţia (21). Într-adevăr, înlocuind în (22) pe h cu $\lambda_i^{(p)} h$, se obţine o delimitare pentru expresia $\varepsilon^{(p)}(\lambda_i^{(p)} h)$ ce figurează în (18). Ţinînd seamă de această delimitare, se deduce din (18) relaţia :

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{(p+1)}(h)| \leqq h^{p+2} |\rho^{(p)}(h; F)| + hL \sum_{i=1}^{r_p} h^{p+1} |\alpha_i^{(p)}| \, |\lambda_i^{(p)}|^{p+1} \bar{\rho}_{p-1}^{(p-1)}(\lambda_i^{(p)} h) + \\ + hL \sum_{i=1}^{r_p} h^{p+1} |\alpha_i^{(p)}| \, |\lambda_i^{(p)}|^{p+1} L \bar{\rho}_{p-1}^{(p-2)}(\lambda_i^{(p)} h) A_p^{(p-1)} + \\ + hL \sum_{i=1}^{r_p} h^{p+1} |\alpha_i^{(p)}| \, |\lambda_i^{(p)}|^{p+1} L^2 \bar{\rho}_{p-1}^{(p-3)}(\lambda_i^{(p)} h) A_p^{(p-1)} A_{p-1}^{(p-2)} + \\ + \ldots + hL \sum_{i=1}^{r_p} h^{p+1} |\alpha_i^{(p)}| \, |\lambda_i^{(p)}|^{p+1} L^{p-1} \bar{\rho}_{p-1}^{(0)}(\lambda_i^{(p)} h) A_p^{(p-1)} A_{p-1}^{(p-2)} \ldots A_2^{(1)}. \end{aligned} \tag{18'}$$

Se observă însă din (20) că au loc relaţiile :

$$\left.\begin{aligned} |\rho^{(p)}(h; F)| &= \bar{\rho}_p^{(p)}(h), \\ \bar{\rho}_{p-1}^{(p-1)}(\lambda_i^{(p)} h) &\leqq \bar{\rho}_p^{(p-1)}(h), \\ \bar{\rho}_{p-1}^{(p-2)}(\lambda_i^{(p)} h) &\leqq \bar{\rho}_p^{(p-2)}(h), \\ &\cdots\cdots \\ \bar{\rho}_{p-1}^{(0)}(\lambda_i^{(p)} h) &\leqq \bar{\rho}_p^{(0)}(h). \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, r_p),$$

Ţinînd seamă de aceste inegalităţi şi de notaţiile (19), rezultă din (18′) inegalitatea (21). În concluzie, conform principiului inducţiei, inegalitatea (21) este valabilă pentru numerele $p = 1, 2, \ldots, n$.

§ 5. Cazul $g_p = p$, $[p = 1, 2, \ldots, n]$

În cele prezentate anterior, s-a presupus că oricare ar fi $p = 1, 2, \ldots, n$, are loc relaţia $g_p \geqq p$. Vom presupune acuma că pentru astfel de valori ale lui p, are loc egalitatea $g_p \geqq p$. În acest caz, din (9) se deduce

$$\gamma^{(p)} = \frac{1}{p+2} - \sum_{i=1}^{r_p} \alpha_i^{(p)} (\lambda_i^{(p)})^{p+1},$$

iar din (13) se deduce

$$\rho^{(p)}(h;\, F) = \frac{\gamma^{(p)}}{(p+1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{p+1} F(\xi)}{\mathrm{d}x^{p+1}}, \quad \xi \in [x_0,\, x_0 + h].$$

Notînd cu

$$N_{p+1} = \sup_{x \in [x_0,\, a^*]} \left| \frac{\mathrm{d}^{p+1} F(x)}{\mathrm{d}x^{p+1}} \right| = \sup_{(D^*)} \left| \frac{\mathrm{d}^{p+1}}{\mathrm{d}x^{p+1}} f[x,\, y(x)] \right| \tag{23}$$

și ținînd seamă de ipoteza $0 \leqq \lambda_i^{(p)} \leqq 1$, rezultă pentru numerele $\bar{\rho}_p^{(p)}(h)$, $\bar{\rho}_p^{(p-1)}(h), \ldots, \bar{\rho}_p^{(0)}(h)$ din (20), delimitările

$$\begin{gathered} 0 \leqq \bar{\rho}_p^{(p)}(h) \leqq \frac{|\gamma^{(p)}|}{(p+1)!} N_{p+1}, \quad 0 \leqq \bar{\rho}_p^{(p-1)}(h) \leqq \frac{|\gamma^{(p-1)}|}{p!} N_p, \ldots \\ \ldots, \quad 0 \leqq \bar{\rho}_p^{(0)}(h) \leqq \frac{1}{2} N_1 \end{gathered} \tag{24}$$

valabile pentru orice $h \in [0,\, a^*]$. În baza acestor inegalități, rezultă din (21) delimitarea :

$$\begin{aligned} |\varepsilon^{(p+1)}(h)| \leqq h^{p+2} \Bigg[& \frac{|\gamma^{(p)}|}{(p+1)!} N_{p+1} + \frac{|\gamma^{(p-1)}|}{p!} L N_p A_{p+1}^{(p)} + \\ & + \frac{|\gamma^{(p-2)}|}{(p-1)!} L^2 N_{p-1} A_{p+1}^{(p)} A_p^{(p-1)} + \frac{|\gamma^{(p-3}|}{(p-2)!} L^3 N_{p-2} A_{p+1}^{(p)} A_p^{(p-1)} A_{p-1}^{(p-2)} + \\ & + \ldots + \frac{1}{2} L^p N_1 A_{p+1}^{(p)} A_p^{(p-1)} \ldots A_2^{(1)} \Bigg]. \end{aligned} \tag{25}$$

§ 6. Cazul cînd nu toți coeficienții $\lambda_i^{(p)}$ satisfac inegalitatea $0 \leq \lambda_i^{(p)}$

Teoria expusă anterior rămîne valabilă și în acest caz, dacă se modifică ipotezele privitoare la funcția $f(x,\, y)$, precum urmează.

1°. Funcția $f(x,\, y)$ este continuă în domeniul (D_1) definit de inegalitățile $x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a$, $y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b$.

Fie $M_1 = \max\limits_{(D_1)} |f(x,\, y)|$ și fie $a_1^* = \min\left\{a,\, \dfrac{b}{M_1}\right\}$. Considerăm domeniul (D_1^*) definit de inegalitățile

$$x_0 - a_1^* \leqq x \leqq x_0 + a_1^*, \quad y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + b.$$

2°. În domeniul (D_1^*) funcția $f(x,\, y)$ admite derivate parțiale continue, de ordinul $\nu = 1 + \max\{g_1,\, g_2, \ldots, g_n\}$.

Va mai trebui să impunem condiții restrictive numărului h pentru a ne asigura că toate valorile variabilei x care intervin în schema de calcul

(5) sînt situate în intervalul $[x_0 - a_1^*,\ x_0 + a_1^*]$, pus în evidență anterior. (Toate aceste valori se pot constata din tabloul (15)). În acest scop considerăm numărul

$$\theta_n = \max\{1,\, |\lambda_i^{(n)}|,\, |\lambda_i^{(n)}\lambda_j^{(n-1)}|,\, \ldots,\, |\lambda_i^{(n)}\lambda_j^{(n-1)}\lambda_k^{(n-2)} \ldots \lambda_l^{(1)}|\} \tag{26}$$

și presupunem că h este un număr oarecare satisfăcînd relația

$$h \leqq \frac{a_1^*}{\theta_n}. \tag{27}$$

În aceste ipoteze, rămîn valabile delimitările (21) și (25) (în care se înlocuiește $p = n$), cu condiția ca să înlocuim h cu $|h|$, iar marginea superioară care intervine în formula (23) să se considere relativ la domeniul (D_1^*).

§ 7. Cazul cînd nu toți coeficientii $\sigma_i^{(p)}$ sînt pozitivi

În acest caz s-ar putea ca unele dintre numerele $M^{(1)}(\lambda_i^{(n)}\lambda_j^{(n-1)} \ldots \lambda_l^{(1)} h), \ldots, M^{(n-2)}(\lambda_i^{(n)}\lambda_j^{(n-1)}\lambda_k^{(n-2)} h),\ M^{(n-1)}(\lambda_i^{(n)}\lambda_j^{(n-1)} h),$ $M^{(n)}(\lambda_i^{(n)} h)$, care intervin în expresia lui $M^{(n+1)}(h)$ din (5), să nu fie situate în intervalul $[y_0 - b,\ y_0 + b]$, atunci cînd h satisface inegalitatea (27) [1]). Pentru a remedia acest neajuns, prelungim funcția $f(x,\, y)$ relativ la variabila y, precum urmează :

Considerăm numărul $\nu = 1 + \max\{g_1,\, g_2, \ldots, g_n\}$ care a intervenit în ipotezele formulate în § 6 asupra funcției $f(x,\, y)$. Considerăm următoarele două funcții de prelungire

$$\begin{aligned} \bar{f}(x,\, y) &= f(x,\, y_0 - b) + \frac{(y + b - y_0)}{1!} \frac{\partial f(x,\, y_0 - b)}{\partial y} + \\ &\quad + \ldots + \frac{(y - b - y_0)^\nu}{\nu!} \frac{\partial^\nu f(x,\, y_0 - b)}{\partial y^\nu}, \\ \bar{\bar{f}}(x,\, y) &= f(x,\, y_0 + b) + \frac{(y - b - y_0)}{1!} \frac{\partial f(x,\, y_0 + b)}{\partial y} + \\ &\quad + \ldots + \frac{(y - b - y_0)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{\partial^\nu f(x,\, y_0 + b)}{\partial y^\nu}, \end{aligned}$$

definite respectiv în domeniile

$$\begin{array}{lll} (\bar{D}_1^*) & x_0 - a_1^* \leqq x \leqq x_0 + a_1^*, & y \leqq y_0 - b \\ (\bar{\bar{D}}_1^*) & x_0 - a_1^* \leqq x \leqq x_0 + a_1^*, & y \geqq y_0 + b. \end{array}$$

---

[1]) În acest paragraf menținem aceleași ipoteze cu privire la funcția $f(x,\, y)$ ca în § 6. Semnificația numerelor a_1^* și θ_n este indicată în § 6.

Se verifică cu ușurință că au loc următoarele identități în variabila x:

$$\left.\frac{\partial^{i+j}\bar{f}}{\partial x^i\,\partial y^j}\right|_{y=y_0-b} \equiv \left.\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\,\partial y^j}\right|_{y=y_0-b}, \quad \left.\frac{\partial^{i+j}\bar{\bar{f}}}{\partial x^i\,\partial y^j}\right|_{y=y_0+b} \equiv \left.\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\,\partial y^j}\right|_{y=y_0+b},$$

unde i și j sînt numere întregi nenegative, satifăcînd condiția $i + j \leqq \nu$. Considerăm acuma funcția $F(x, y)$ definită după cum urmează

$$F(x, y) = \begin{cases} \bar{\bar{f}}(x, y) \text{ dacă } y \geqq y_0 + b, \\ f(x, y) \text{ dacă } |y - y_0| \leqq b, \\ \bar{f}(x, y) \text{ dacă } y \leqq y_0 - b. \end{cases}$$

Ea este continuă împreună cu derivatele ei parțiale pînă la ordinul ν în domeniul infinit:

$$x_0 - a_1^* \leqq x \leqq x_0 + a_1^*, \qquad -\infty < y < +\infty.$$

Să considerăm în acest domeniu ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = F(x, Y), \tag{1'}$$

cu condiția

$$Y(x_0) = y_0. \tag{2'}$$

Fie $Y(x)$ integrala ecuației diferențiale (1′), satisfăcînd condiția (2′). Ținînd seamă de definiția funcției $F(x, y)$ precum și de faptul că integrala $y(x)$ a ecuației diferențiale (1) cu condiția (2) satisface inegalitățile

$$y_0 - b \leqq y(x) \leqq y_0 + b \text{ oricare ar fi } x \in [x_0 - a_1^*,\ x_0 + a_1^*],$$

se deduce cu ușurință că în intervalul $[x_0 - a_1^*,\ x_0 + a_1^*]$ are loc indentitatea $Y(x) \equiv y(x)$.

Pentru integrarea aproximativă a ecuației diferențiale (1) cu condiția (2) vom aplica procedeul de calcul (5) ecuației (1′) cu condiția (2′). Delimitarea erorii de aproximație va fi dată de formula (21) sau (25), cu condiția ca numerele $\bar{\rho}_p^{(i)}(h)$, N_{i+1}, $(i = 0, 1, \ldots, p)$, și L, care intervin respectiv în aceste formule, să fie considerate relativ la un domeniu (Δ), suficient de mare din planul xOy, conținînd toate punctele $(\tilde{x}, \tilde{y})$ pentru care se calculează valoarea funcției $f(x, y)$, în vederea obținerii numărului $M^{(n+1)}(h)$ din (5). Domeniul (Δ) trebuie de asemenea să conțină toate punctele curbei integrale $y = y(x)$, puncte corespunzătoare valorilor $\tilde{x}$ ale variabilei x, care intervin în schema de calcul (5).

§ 8. Variante ale metodei de integrare numerică (5)

Fie $M^{(p)}(h)$ o funcție de aproximație, obținută printr-un procedeu oarecare (nu neapărat procedeul (5)), astfel încît dezvoltată după puterile lui h să aibă primii $p + 1$ termeni identici respectiv cu primii $p + 1$ termeni ai dezvoltării funcției $y(x_0 + h)$ după puterile lui h [1]).

Fie în continuare o formulă de cvadratură

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(s)\,\mathrm{d}s = h \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, \varphi(x_0 + \lambda_i h) + R(h;\ \varphi), \tag{28}$$

aleasă astfel încît gradul ei de exactitate g_p să satisfacă inegalitatea $g_p \geqq p$. Plecînd de la funcția $M^{(p)}(h)$ dată, construim cu ajutorul formulei (28) funcția $M^{(p+1)}(h)$ precum urmează

$$M^{(p+1)}(h) = y_0 + h \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f[x_0 + \lambda_i h,\ M^{(p)}(\lambda_i h)]. \tag{29}$$

După cum s-a arătat de către prof. D. V. I o n e s c u în lucrarea [10], funcția $M^{(p+1)}(h)$ dezvoltată după puterile lui h are primii $p + 2$ termeni identici respectiv cu primii $p + 2$ termeni ai dezvoltării funcției $y(x_0 + h)$ după puterile lui h. Cunoscînd o delimitare a erorii de aproximație

$$\varepsilon^{(p)}(h) = M^{(p)}(h) - y(x_0 + h),$$

ne propunem să delimităm eroarea

$$\varepsilon^{(p+1)}(h) = M^{(p+1)}(h) - y(x_0 + h). \tag{30}$$

În acest scop vom adopta următoarele ipoteze:

1°. Coeficienții α_i ai formulei de cvadratură (28) sînt pozitivi iar coeficienții λ_i satisfac inegalitățile $0 \leqq \lambda_i \leqq 1$.

2°. Funcția $f(x, y)$ satisface condiția 1°, § 3 și în plus admite în domeniul (D^*), definit de asemenea în § 3, derivate parțiale continue de ordinul $g_p + 1$.

3°. Pentru orice $h \in [0, a^*]$ au loc inegalitățile

$$y_0 - b \leqq M^{(p)}(h) \leqq y_0 + b.$$

În aceste ipoteze, oricare ar fi $h \in [0, a^*]$, are loc relația (18), care cu notațiile adoptate în acest paragraf se transcrie

$$|\varepsilon^{(p+1)}(h)| \leqq |R(h;\ F)| + |h|\, L \sum_{i=1}^{r} |\alpha_i|\, |\varepsilon^{(p)}(\lambda_i h)|. \tag{31}$$

[1]) De exemplu, pentru $p = 4$, o astfel de funcție $M^{(4)}(h)$ intervine în metoda lui Runge-Kutta de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale. Recent, A. H u ț a în lucrarea [9] a construit o funcție $M^{(6)}(h)$, simplă ca expresie, care dezvoltată după puterile lui h are primii 7 termeni identici respectiv cu primii 7 termeni din dezvoltarea integralei $y(x_0 + h)$ după puterile lui h.

Aici $R(h\,;\,\varphi)$ reprezintă restul formulei de cvadratură (28). Referitor la acest termen-rest, în ipotezele adoptate în § 2 cu privire la formula de cvadratură (28), au loc relațiile (8) — (11).

Observație. Rezultatele obținute în această lucrare se extind la sisteme și la ecuații diferențiale de ordin superior. Prezentarea acestor extensiuni va forma obiectul unor viitoare lucrări.

§ 9. Exemplul 1

Vom exemplifica cele expuse în paragrafele 1 — 4, considerînd $n = 5$ și alegînd pentru formulele de cvadratură (3), formulele de cvadratură a lui Gauss, indicate în tabela 1. Pentru calculul valorilor coeficienților ce intervin în aceste formule precum și pentru expresia restului lor, ne-am folosit de unele indicații date în acest scop în lucrarea [11]. Tot în tabela 1 se dau expresiile funcțiilor de aproximație $M^{(p+1)}(h)$, $(p = 1, 2, 3, 4, 5)$, stabilite din aproape în aproape conform formulei (4).

În tabela 2 se indică valorile numerelor $A_p^{(p+1)}$, $(p = 1, 2, 3, 4, 5)$ calculate cu ajutorul formulelor (19).

În tabela 3 se indică expresiile funcțiilor $\bar{\rho}_5^{(p)}(h)$, $(p = 1, 2, 3, 4, 5)$, considerîndu-se pentru resturile formulelor de cvadratură, expresiile adoptate în tabela 1 și ținîndu-se seama totodată de formulele (12) și (16).

Folosind rezultatele obținute în tabelele 1, 2 și 3 se delimitează eroarea $\varepsilon^{(6)}(h) = M^{(6)}(h) - y(x_0 + h)$ cu ajutorul formulei (21) în care s-a înlocuit în prealabil p cu $n = 5$. Se obține astfel relația

$$|\,\varepsilon^{(6)}(h)\,| = |\,M^{(6)}(h) - y(x_0 + h)\,| \leqq h^7\left(\frac{1}{2\,016\,000}N_6 + \right.$$
$$+ \frac{1\,349}{21\,504\,000\,000}\,hLN_6 + \frac{19}{3\,456\,000}\,L^2N_4 +$$
$$\left. + \frac{73\,549}{110\,592\,000\,000}\,hL^3N_4 + \frac{133}{2\,764\,800}\,L^4N_2 + \frac{133}{921\,600}\,L^5N_1\right), \qquad (21')$$

în care

$$L = \sup_{(D^*)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \text{ iar } N_p = \sup_{x \in [x_0,\, a^*]}\left|\frac{\mathrm{d}^p f[x, y(x)]}{\mathrm{d}x^p}\right|.$$

La stabilirea inegalității (21′) s-a presupus că funcția $f(x, y)$ admite derivate parțiale de ordinul 6 în domeniul (D^*).

Tabela 1

$p = 0$	$M^{(1)}(h) = y_0 + h\,f(x_0\,,\,y_0)$
$p = 1$ $g_p = 1$	$\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(s)\,\mathrm{d}s = h\,\varphi\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + R^{(1)}(h\,;\,\varphi)$ $R^{(1)}(h\,;\,\varphi) = \frac{h^3}{24}\varphi''(\xi_1),\ \xi_1 \in (x_0\,,\,x_0 + h)$ $M^{(2)}(h) = y_0 + h f\left[x_0 + \frac{h}{2}\,,\,M^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right)\right]$
$p = 2$ $g_p = 3$	$\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(s)\,\mathrm{d}s = \frac{h}{2}\left(\varphi\left[x_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2}\right] + \varphi\left[x_0 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2}\right]\right) + R^{(2)}(h\,;\,\varphi)$ $R^{(2)}(h\,;\,\varphi) = \frac{h^5}{4\,320}\varphi^{(4)}(\xi_2),\ \xi_2 \in (x_0,\ x_0 + h)$ $M^{(3)}(h) = y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(2)}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2}\right]\right) + \right.$ $\left. + f\left(x_0 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(2)}\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2}\right]\right)\right]$
$p = 3$ $g_p = 3$	$\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(s)\,\mathrm{d}s = \frac{h}{2}\left(\varphi\left[x_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2}\right] + \varphi\left[x_0 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2}\right]\right) + R^{(3)}(h\,;\,\varphi)$ $R^{(3)}(h\,;\,\varphi) = \frac{h^5}{4\,320}\varphi^{(4)}(\xi_3),\ \xi_3 \in (x_0\,,\,x_0 + h)$ $M^{(4)}(h) = y_0 + \frac{h}{2}\left[f\left(x_0 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(3)}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2}\right]\right) + \right.$ $\left. + f\left(x_0 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(3)}\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{2}\right]\right)\right]$
$p = 4$ $g_p = 5$	$\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(s)\,\mathrm{d}s = \frac{h}{18}\left(5\varphi\left[x_0 + \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right] + 8\varphi\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + \right.$ $\left. + 5\varphi\left[x_0 + \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right) + R^{(4)}(h\,;\,\varphi)$ $R^{(4)}(h\,;\,\varphi) = \frac{h^7}{2\,016\,000}\varphi^{(6)}(\xi_4),\ \xi_4 \in (x_0\,,\,x_0 + h)$ $M^{(5)}(h) = y_0 + \frac{h}{18}\left[5f\left(x_0 + \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(4)}\left[\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right) + \right.$ $\left. + 8f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ M^{(4)}\left(\frac{h}{2}\right)\right) + 5f\left(x_0 + \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(4)}\left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right)\right]$

Tabela 1 (continuare)

$p=5$ $g_p=5$	$\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(s)\,ds=\frac{h}{18}\left(5\varphi\left[x_0+\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]+8\varphi\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+\right.$ $\left.+5\varphi\left[x_0+\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right)+R^{(5)}(h;\varphi)$ $R^{(5)}(h;\varphi)=\frac{h^7}{2\,016\,000}\varphi^{(6)}(\xi_5),\ \xi_5\in(x_0,x_0+h)$ $M^{(6)}(h)=y_0+\frac{h}{18}\left[5f\left(x_0+\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(5)}\left[\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right)+\right.$ $\left.+8f\left(x_0+\frac{h}{2},M^{(5)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)+5f\left(x_0+\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(5)}\left[\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right)\right]$

Tabela 2

p	r_p	$\alpha_i^{(p)},\ (i=1,2,\dots,r_p)$	$\lambda_i^{(p)},\ (i=1,2,\dots,r_p)$	$A_{p+1}^{(p)}=\sum_{i=1}^{r_p}\lvert\alpha_i^{(p)}\rvert\,\lvert\lambda_i^{(p)}\rvert^{p+1}$
1	1	$\alpha_1^{(1)}=1$	$\lambda_1^{(1)}=\frac{1}{2}$	$A_2^{(1)}=\frac{1}{4}$
2	2	$\alpha_1^{(2)}=\frac{1}{2}$ $\alpha_2^{(2)}=\frac{1}{2}$	$\lambda_1^{(2)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\lambda_2^{(2)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$A_3^{(2)}=\frac{1}{4}$
3	2	$\alpha_1^{(3)}=\frac{1}{2}$ $\alpha_2^{(3)}=\frac{1}{2}$	$\lambda_1^{(3)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\lambda_2^{(3)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$A_4^{(3)}=\frac{7}{36}$
4	3	$\alpha_1^{(4)}=\frac{5}{18}$ $\alpha_2^{(4)}=\frac{4}{9}$ $\alpha_3^{(4)}=\frac{5}{18}$	$\lambda_1^{(4)}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ $\lambda_2^{(4)}=\frac{1}{2}$ $\lambda_3^{(4)}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$A_5^{(4)}=\frac{1}{6}$
5	3	$\alpha_1^{(5)}=\frac{5}{18}$ $\alpha_2^{(5)}=\frac{4}{9}$ $\alpha_3^{(5)}=\frac{5}{18}$	$\lambda_1^{(5)}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ $\lambda_2^{(5)}=\frac{1}{2}$ $\lambda_3^{(5)}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$A_6^{(5)}=\frac{57}{400}$

Tabela 3

p	$\rho^{(p)}(h;F)$	$\bar\rho_n^{(p)}(h)$
0	$\rho^{(0)}(h;F)=\frac{1}{2}F'(\xi_0),\ \xi_0\in(x_0,x_0+h)$	$\bar\rho_5^{(0)}(h)\leqq\frac{1}{2}N_1$
1	$\rho^{(1)}(h;F)=\frac{1}{24}F''(\xi_1),\ \xi_1\in(x_0,x_0+h)$	$\bar\rho_5^{(1)}(h)\leqq\frac{1}{24}N_2$
2	$\rho^{(2)}(h;F)=\frac{h}{4\,320}F^{(4)}(\xi_2),\ \xi_2\in(x_0,x_0+h)$	$\bar\rho_5^{(2)}(h)\leqq\frac{1}{4\,320}\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]^2\times$ $\times\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]hN_4<\frac{553}{3\,840\,000}hN_4$ [1]
3	$\rho^{(3)}(h;F)=\frac{1}{4\,320}F^{(4)}(\xi_3),\ \xi_3\in(x_0,x_0+h)$	$\bar\rho_5^{(3)}(h)\leqq\frac{1}{4\,320}N_4$
4	$\rho^{(4)}(h;F)=\frac{h}{2\,016\,000}F^{(6)}(\xi_4)$ $\xi_4\in(x_0,\ x_0+h)$	$\bar\rho_5^{(4)}(h)\leqq\frac{1}{2\,016\,000}\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]hN_6<$ $<\frac{71}{161\,280\,000}hN_6$
5	$\rho^{(5)}(h;F)=\frac{1}{2\,016\,000}F^{(6)}(\xi_5)$ $\xi_5\in(x_0,\ x_0+h)$	$\bar\rho_5^{(5)}(h)\leqq\frac{1}{2\,016\,000}N_6$

§ 10. Exemplul 2

Vom exemplifica cele expuse în § 8, considerînd ca funcţie de plecare $M^{(p)}(h)$, funcţia

$$M^{(4)}(h)=y_0+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \tag{32}$$

unde

$$\begin{gathered}k_1=f(x_0,y_0)\,h,\ k_2=f\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_1}{2}\right)h,\\ k_3=f\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+\frac{k_2}{2}\right)h;\ k_4=f(x_0+h,\ y_0+k_3)\,h.\end{gathered} \tag{33}$$

Această funcţie $M^{(4)}(h)$ intervine în metoda de integrare numerică a lui Runge-Kutta şi are proprietatea că dezvoltată după puterile lui h, are primii cinci termeni identici respectiv cu primii cinci termeni ai dezvoltării, tot

[1]) Aici ca şi mai jos s-au folosit inegalităţile $\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{29}{50}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}<\frac{31}{40}$.

după puterile lui h a integralei $y(x_0 + h)$ (în ipoteza că funcţia $f(x, y)$ admite derivate parţiale de ordinul cinci într-o vecinătate a punctului (x_0, y_0)).

Fie

$$\varepsilon^{(4)}(h) = M^{(4)}(h) - y(x_0 + h)$$

eroarea ce se comite cînd în locul valorii exacte $y(x_0 + h)$, se ia valoarea aproximativă $M^{(4)}(h)$ dată de formulele (32) şi (33). O delimitare a acestei erori a fost dată de L. Bieberbach în [4].

În cele ce urmează, considerăm formula cu cvadratură a lui Gauss

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \varphi(s)\, ds = \frac{h}{18}\left(5\varphi\left[x_0 + \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right] + 8\varphi\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 5\varphi\left[x_0 + \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right) + R(h;\ \varphi),$$

$$R(h;\ \varphi) = \frac{h^7}{2\ 016\ 000}\, \varphi^{(6)}(\xi),\ \ \xi \in (x_0, x_0 + h)$$

avînd gradul de exactitate $g = 5$. Cu ajutorul acestei formule de cvadratură construim după procedeul (29), funcţia

$$M^{(5)}(h) = y_0 + \frac{h}{18}\left[5f\left(x_0 + \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(4)}\left[\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right) + \right.$$

$$+ 8f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ M^{(4)}\left(\frac{h}{2}\right)\right) +$$

$$\left. + 5f\left(x_0 + \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2},\ M^{(4)}\left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right)\right]. \tag{34}$$

Această funcţie dezvoltată după puterile lui h va avea primii şase termeni identici respectiv cu primii şase termeni ai dezvoltării integralei $y(x_0 + h)$ după puterile lui h (în ipoteza că funcţia $f(x, y)$ admite derivate parţiale de ordinul şase într-o vecinătate a punctului (x_0, y_0)). Să notăm

$$\varepsilon^{(5)}(h) = M^{(5)}(h) - y(x_0 + h).$$

Ne propunem să dăm o delimitare a acestei erori.

Observăm de la început că în ipotezele formulate în cadrul paragrafului 3, cu privire la ecuaţia diferenţială (1), — dacă h satisface inegalităţile $0 \leqq h \leqq a^*$, atunci au sens toate expresiile (32), (33), (34), întrucît

toate punctele (x, y) în care se calculează valoarea funcţiei $f(x, y)$ în vederea obţinerii numărului $M^{(5)}(h)$, sînt situate în domeniul (D^*).

Pentru delimitarea erorii $\varepsilon^{(5)}(h)$ folosim formula (31). Obţinem:

$$|\varepsilon^{(5)}(h)| \leqq \frac{h^7}{2\ 016\ 000} N_6 + \frac{hL}{18}\left(5\left|\varepsilon\left[\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right| + 8\left|\varepsilon\left(\frac{h}{2}\right)\right| + \right.$$

$$\left. + 5\left|\varepsilon\left[\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\frac{h}{2}\right]\right|\right).$$

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ ТИПА РУНГЕ-КУТТА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается дифференциальное уравнение (1). Пусть $y(x)$ — его интеграл (2). В настоящей работе дается оценка остаточного члена (6), метода численного интегрирования (5), предложенного проф. Д. В. Ионеску в работе [10]. Апроксимационные функции $M^{(p+1)}(h), (p = 0, 1, \ldots, n)$, входящие в схему вычислений (5), строятся при помощи рекуррентного способа (4), где числа $\alpha_i^{(p)}$ и $\lambda_i^{(p)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r_p)$ являются коэффициентами квадратурных формул вида (3), обладающих, соответственно, степенью точности $g_p \geqq p$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$.

В предположениях 1°, 2° из § 2 относительно используемых квадратурных формул и в предположениях 1°, 2° из § 3 о функции $f(x, y)$, в настоящей работе показывается, что все функции $M^{(p+1)}(h)$, $(p = 0, 1, \ldots, n)$ определены при $h \in [0, a^*]$ и что для таких значений h имеет место оценка (21), где $L = \sup_{D^*}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$, числа $A_{k+1}^{(k)}$ определены соотношениями (19), а $\bar{\rho}_p^{(p)}(h)$, $\bar{\rho}_p^{(p-1)}(h), \ldots, \bar{\rho}_p^{(0)}(h)$ определены соотношениями (20) и (12). Если квадратурные формулы (3) выбраны таким образом, что имеет место равенство $g_p = p$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$, то справедлива оценка (25), где числа N_{p+1} определяются соотношением (23).

В §§ 6 и 7 исследуется случай, когда некоторые из коэффициентов $\lambda_i^{(p)}$ и $\alpha_i^{(p)}$, используемых квадратурных формул, отрицательны.

В заключении работы приводятся два примера.

SUR LE RESTE DE CERTAINES FORMULES DE RUNGE-KUTTA POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ

On considère l'équation différentielle (1). Soit $y(x)$ une de ses intégrales satisfaisant à la condition (2). Dans le présent travail, l'auteur donne une délimitation du reste (6) de la méthode d'intégration numérique (5), proposée par le prof. D. V. Ionescu dans son travail [10]. Les fonctions d'approximation $M^{(p+1)}(h)$, $(p = 0, 1, \ldots, n)$ intervenant dans le schéma de calcul (5) sont construites par le procédé récurrent (4), où les nombres $\alpha_i^{(n)}$ et $\lambda_i^{(p)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r_p)$ représentent les coefficients de certaines formules de quadrature de la forme (3), dont le degré d'exactitude respectif est $g_p \geqq p$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$.

Dans les hypothèses 1° et 2° du paragraphe 2 concernant les formules de quadratures utilisées aussi dans les hypothèses 1° et 2° du paragraphe 3 sur la fonction $f(x, y)$, l'auteur montre que toutes les fonctions $M^{(p+1)}(h)$, $(p = 0, 1, \ldots, n)$ sont définies pour $h \in [0, a^*]$ et qu'à de tels nombres h correspond la délimitation (21) où $L = \sup\limits_{(D^*)} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$. Les nombres $A_{k+1}^{(k)}$ sont définis par les relations (19), et $\bar{\rho}_p^{(p)}(h)$, $\bar{\rho}_p^{(p-1)}(h)$, $\ldots$, $\bar{\rho}_p^{(0)}(h)$ sont définies par les relations (20) et (12). Si les formules de quadrature (3) sont choisies de manière que l'on ait l'égalité $g_p = p$, $(p = 1, 2, \ldots, n)$, la délimitation (25) aura lieu là, où les nombres N_{p+1} sont définis par la relation (23).

Les paragraphes 6 et 7 sont consacrés à l'étude du cas où certains des coefficients $\lambda_i^{(p)}$ et $\alpha_i^{(p)}$ dans les formules de quadrature utilisées sont négatifs.

Pour finir, l'auteur donne deux exemples.

BIBLIOGRAFIE

1. ALBRECHT J., *Beiträge zum Runge-Kutta Verfahren*, ZAMM, **35**, 100–110 (1955).
2. БАХВАЛОВ Н. С., *К оценке ошибки при численном интегрировании дифференциальных уравнений экстраполяционным методом Адамса.* Доклады Акад. Наук СССР, **104**, 683—686 (1955).
3. БЕРЕЗИН И. С., ЖИДКОВ Н. П., *Методы вычислений*, т. II, Москва, 1959.
4. BIEBERBACH L., *On the Remainder of the Runge-Kutta Formula in the Theory of Ordinary Differential Equations.* Z.A.M.P., **2**, 233–248 (1951).
5. BUCOVICS E., *Beiträge zur numerischen Integration, III*. Mh. f.Math., **58**, 258–265 (1945)
6. ГОРБУНОВ А. Д., БУДАК Б. М., *О сходимости некоторых конечно-разностных процессов для уравнений* $y' = f(x, y)$ и $y'(x) = f(x, y(x), y(x - r(x)))$. Вестник МГУ, **5**, 23—32 (1958).

7. COLLATZ L., *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.* Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1951, Cap. I (trad. lb. rusă).
8. COȚIU A., *Formule pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi, deduse cu ajutorul diferențelor.* Lucrări științifice, Instit. politehnic Cluj, 49–59 (1959).
9. HUȚA A., *Contribution à la formule de sixième ordre dans la méthode de Runge-Kutta-Nyström.* Acta Facultatis Rerum Naturalium Univ. Comenianae, Matematica, **II**, fasc. 1–2, 21–24 (1957).
10. IONESCU D. V., *O generalizare a unei proprietăți care intervine în metoda lui Runge și Kutta pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.* Bul. științ. Acad. R.P.R. Secția de științe matematice și fizice **VIII**, 1, 67–100 (1956).
11. — *Cuadraturi numerice*, Ed. tehnică, București, 1957, p. 280–283.
12. — *Formule de cuadratură cu noduri exterioare.* Studii și cercetări de matematică (Cluj) **IX**, 45–134, (1958).
13. КРЫЛОВ А. Н., *Лекции о приближенных вычислениях*, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1950, 58—106.
14. МИКЕЛАДЗЕ Ш. Е., *Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений* ГИТТЛ, Москва, 1951.
15. MILNE W. E., *Numerical Solution of Differential Equations*, New York, London, 1953.
16. НИКОЛЬСКИЙ С. М., *Квадратурные формулы*, Гос. Изд. Физ.-мат. лит., Москва, 1958.
17. POPOVICIU T., *Asupra restului în unele formule de aproximație ale analizei.* Lucrările sesiunii generale științifice, Acad. R.P.R., 2–12 iunie 1950.
18. — *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss.* Studii și cercetări științifice (Iași), **6**, 29–57 (1955).
19. PICONE M., *Maggiorazione dell'errore d'approssimazione nel metodo di integrazione di Cauchy-Lipschitz dei sistemi di equazioni differenziale ordinarie.* Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6) **15**, 859–864 (1932).
20. SANSONE G., *Equazioni differenziali nel campo reale, parte seconda*, Bologna, 1949.
21. SCHECHTER E., *Asupra erorii în procedeul de integrare numerică a lui Runge-Kutta.* Studii și cercetări de matematică (Cluj), **VIII**, 115–126 (1957).
22. — *Asupra delimitării erorilor în unele procedee de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale.* Studii și cercetări de matematică (Cluj), **IX**, 343–350 (1958).
23. STANCU D. D., *Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcții de mai multe variabile și unele considerații asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, **9**, *2*, 287–313 (1957).
24. — *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss-Christoffel.* Studii și cercetări științifice (Iași), Ser. mat., **1**, 1–18 (1957).
25. ШУРА-БУРА М. Р., *Оценки ошибок численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений* ПММ, **16**, вып. 5, (1952).
26. WARGA, J., *On a Class of Iterative Procedures for solving Normal Systems of Ordinary Differential Equations.* Journ. of. Math. and Physics, **XXXI**, *4*, 223–243 (1953).

Primit la 1.X.1959.