

Fig. 1

zare. Evident că  $s'$  este funcție de  $s_c$ . Practic lățimea canalului măsurată pe cilindrul de divizare se ia  $s$ , unde

$$s = \frac{s_c}{\sin \delta} \tag{1}$$

Aceasta este o aproximare, care constituie sursa unei prime erori. Adică profilul  $abcd$  de cotă  $s_c$  va prelucra un canal a cărui lățime exactă va diferi de  $s$  și va fi

$$s' = s \mp \Delta s. \tag{2}$$

Se așterne în continuare peste dreapta  $K_0$  și se consideră legate de aceasta, următoarele suprafețe :

- 1°. Un plan  $I$  (fig. 1) ortogonal cu planul  $abcd$ .
  - 2°. O suprafață conică 2, cu semiunghiul la vîrf  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  și cu axa  $I$  paralelă cu  $ab$ , situată la distanța  $a$  de axa  $oy$ , închizînd unghiul  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$  cu aceasta.
  - 3°. O suprafață conică 3, coaxială cu  $oz$  și cu semiunghiul la vîrf  $\alpha$ .
- Aceste suprafețe reprezintă, în cazul 1°, suprafața așchietoare materializată de muchia unui cuțit prin rabotare sau de o sculă abrazivă plană ; în cazul 2° suprafața așchietoare a unei freze conice disc, sau a

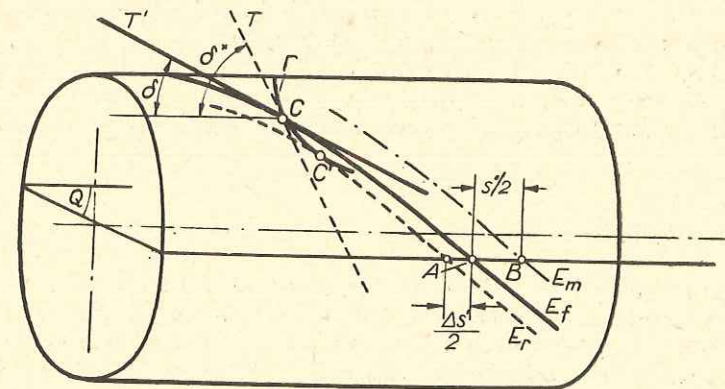


Fig. 2

unei scule abrazive conice ; și în cazul 3° suprafața așchietoare a unei freze deget.

În toate cazurile, suprafețele sînt tangente între ele de-a lungul lui  $K_0$ , iar profilele sculelor amintite coincid cu profilul trapezoidal  $abcd$ .

În practică, de multe ori nu se ține seama de felul sculei alese, considerîndu-se că : dacă profilul acestora este identic și flancurile obținute vor fi identice.

Se va demonstra în continuare că, pentru același parametru  $h$  al mișcării elicoidale (de exemplu, pentru  $h$  corespunzător unei mișcări elicoidale drepte), atât lățimea canalelor măsurate în secțiune axială, cât și forma profilelor obținute în această secțiune, vor fi diferite, abaterile neputându-se neglija întotdeauna.

Mai întâi se va arăta că lățimea canalelor, măsurată în secțiunea axială pe cilindrul de divizare, în variantele 1°, 2°, 3° este întotdeauna mai mare ca în cazul prelucrării prin strunjire cu cuțitul, avînd profilul  $abcd$ .

Pentru aceasta se determină valoarea unghiului  $\delta^*$  de înclinare față de axa  $oy$  a tangentei  $T$  la suprafețele 1, 2, 3 și la cilindrul de divizare în punctul  $C$  (fig. 1). Tangenta  $t$  la cercul de bază al conului 3, conținută în planul 1, formează cu paralela  $f$  dusă din  $a$  la  $Oy$  unghiul  $\delta$ . Dreptele  $f$  și  $t$  sînt situate în planul de bază al conului. Ducînd în  $C$  paralele  $t_1$  și  $f_1$  la  $t$  și  $f$ , se obține tot unghiul  $\delta$ . Deoarece tangenta  $T$  dusă în  $C$  la cilindrul de divizare și conținută în planul 1 se apropie mai mult de verticală decît  $t_1$ , urmează că

$$\delta^* > \delta. \quad (3)$$

$T$  este tangentă și la curbele de intersecție  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  ale suprafețelor date cu cilindrul de divizare.

Se știe că, elicele de intersecție ale flancurilor drepte ale spirei cu cilindrul de divizare trebuie să fie tangente exterior la suprafețele generatoare respective, adică la curbele  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , sau  $\Gamma_3$ . Deoarece tangenta într-un punct al elicei de intersecție închide unghiul  $\delta < \delta^*$  cu direcția axei  $oy$ , urmează că punctul  $C$  nu poate fi punct de tangentă între curbele  $\Gamma$  și elice. Punctul de tangentă devine  $C'$ , situat la dreapta lui  $C$  (fig. 2). Rezultă că elicea  $E_\Gamma$  va fi situată la stînga elicei  $E_i$ , ce trece prin  $C$ . Prin urmare lățimea  $s_\Gamma$  a canalului prelucrat va fi mai mare cu  $\Delta s'$  decît lățimea  $s'$  corespunzătoare prelucrării cu cuțitul:

$$s_\Gamma = s' + \Delta s'. \quad (4)$$

Ce rezultate se obțin cînd cilindrul de intersecție e diferit de cel de divizare?

Pentru cilindrii cu diametrii descrescînd față de cel de divizare, panta elicelor de intersecție ale flancurilor devenind din ce în ce mai mică, ele vor atinge curbele  $\Gamma$  în puncte  $C'$  tot mai îndepărtate de  $K_0$  spre dreapta. Pentru cilindrii cu diametrii crescînd, panta elicelor crește — punctul de tangentă  $C'$  se va apropia de  $K_0$  — pentru un diametru dat va fi chiar pe  $K_0$  și apoi se va depărta spre stînga de  $K_0$ .

În consecință, lățimea canalului pentru toți cilindrii de intersecție va fi mai mare ca cea determinată prin mișcarea elicoidală a profilului  $abcd$ , în afară de cilindrul la care  $C'$  ajunge pe  $K_0$ . În acest caz special, lățimea canalului pentru profilul  $abcd$  va fi identică cu cea determinată de suprafața respectivă.

Deoarece punctele  $C'$  sînt situate pe curbele caracteristice ale suprafețelor generatoare, analiza precedentă poate servi și la reprezentarea calitativă a acestor curbe în spațiu.

Se va determina în continuare profilul obținut în secțiunea axială a suprafețelor elicoidale de mai sus.

În cazul melcului convolut, generat de dreapta  $K_0$ , raza  $r_d$  a cilindrului director, este determinată în lucrarea [2], formula (413):

$$r_d = \Delta \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \gamma}}. \quad (5)$$

Unghiul  $\psi$  pe care îl formează generatoarea  $K_0$  cu planul normal pe axa  $oy$ , se determină din [1], formula (414).

$$\sin \psi = \cos \gamma \sin \alpha, \quad (6)$$

sau

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\cos \gamma \sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha}}. \quad (7)$$

Generatoarea  $K_0$  este tangentă la cilindrul director ca în figura 3a și în poziția sa inițială, intersectează planul axial  $zoy$  în punctul  $I$  situat

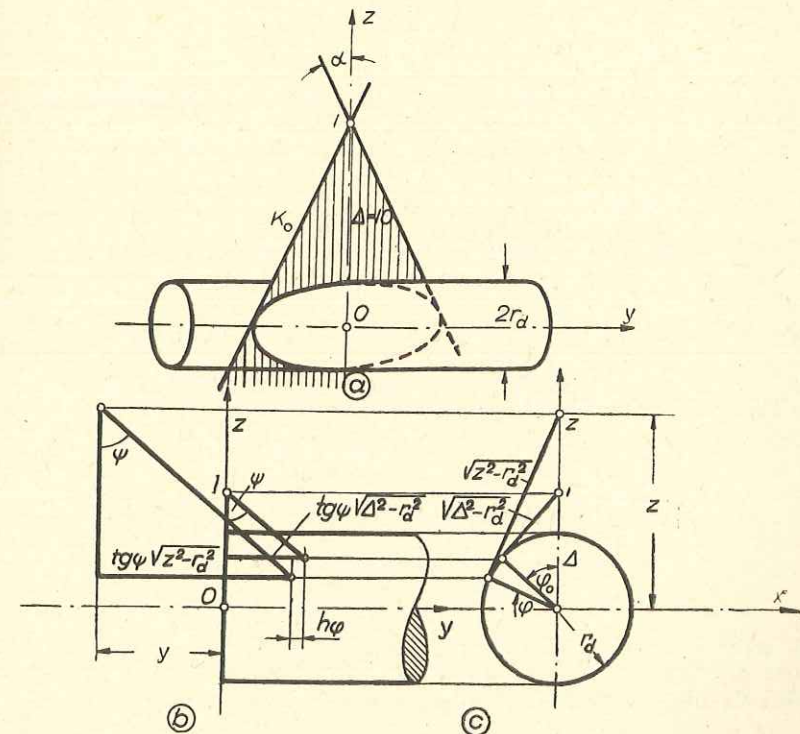


Fig. 3

pe  $oz$ . Adică punctul  $I$  este un punct al profilului în secțiune axială. Pentru a determina un alt punct al profilului avînd ordonata  $z > \Delta$ ,

generatoarei  $K_0$  i se va imprima o mișcare elicoidală de parametru  $h$  înspre stînga (fig. 3 b, c). Unghiului de rotire  $\varphi$  îi corespunde o deplasare spre stînga paralelă cu axa  $oy$  de mărime  $h\varphi$ . Pentru ordonata  $z$ , generatoarea  $K_0$  înțeapă planul axial  $zoy$  la abscisa  $y$ . Folosind notațiile din figură, se va putea scrie

$$y = -\operatorname{tg} \psi \sqrt{z^2 - r_d^2} + (\sqrt{\Delta^2 - r_d^2} \operatorname{tg} \psi - h\varphi) \quad (8)$$

și

$$\frac{r_d}{z} = \cos(\varphi + \varphi_0). \quad (9)$$

Ecuția (9) poate fi scrisă sub forma

$$\sin^2 \varphi + 2 \frac{r_d}{z} \sin \varphi_0 \sin \varphi + \frac{r_d^2}{z^2} - \cos^2 \varphi_0 = 0. \quad (10)$$

De aici se deduce

$$\sin \varphi = -\frac{r_d}{z} \sin \varphi_0 \mp \cos \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{r_d^2}{z^2}} \quad (11)$$

sau, exprimînd valorile lui  $\sin \varphi_0$  și  $\cos \varphi_0$  din figura 3c, relația (11) se mai poate scrie

$$\sin \varphi = -\frac{r_d}{z} \frac{\sqrt{\Delta^2 - r_d^2}}{\Delta} \mp \frac{r_d}{\Delta} \sqrt{1 - \frac{r_d^2}{z^2}}. \quad (12)$$

Pentru  $z = \Delta$  trebuie ca  $\varphi = 0$ , ceea ce se verifică numai pentru semnul  $+$  din fața radicalului. Prin urmare

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{r_d}{\Delta} \sqrt{1 - \frac{r_d^2}{z^2}} - \frac{r_d}{z} \frac{\sqrt{\Delta^2 - r_d^2}}{\Delta} \right). \quad (13)$$

Înlocuind această valoare în (8) se obține

$$y = -\operatorname{tg} \psi \sqrt{z^2 - r_d^2} - h \arcsin \left( \frac{r_d}{\Delta} \sqrt{1 - \frac{r_d^2}{z^2}} - \frac{r_d}{z} \frac{\sqrt{\Delta^2 - r_d^2}}{\Delta} \right) + \operatorname{tg} \psi \sqrt{\Delta^2 - r_d^2}. \quad (14)$$

Cu ajutorul acestei relații, pentru orice valoare a lui  $z$  se poate determina valoarea  $y$  corespunzătoare. Dacă  $z$  este egal cu raza  $R_d$  a cilindrului de divizare,  $y$  va fi semilățimea canalului obținut, adică va fi egală cu  $\frac{s'}{2}$  din formula (2). În toate formulele de mai sus:

$$\Delta = R_d - \frac{s_c}{2} \cotg \alpha. \quad (15)$$

În mod asemănător se poate determina ecuația secțiunii axiale în cazul elicoidului evolventic, generat de planul  $I$ . Acesta se poate considera

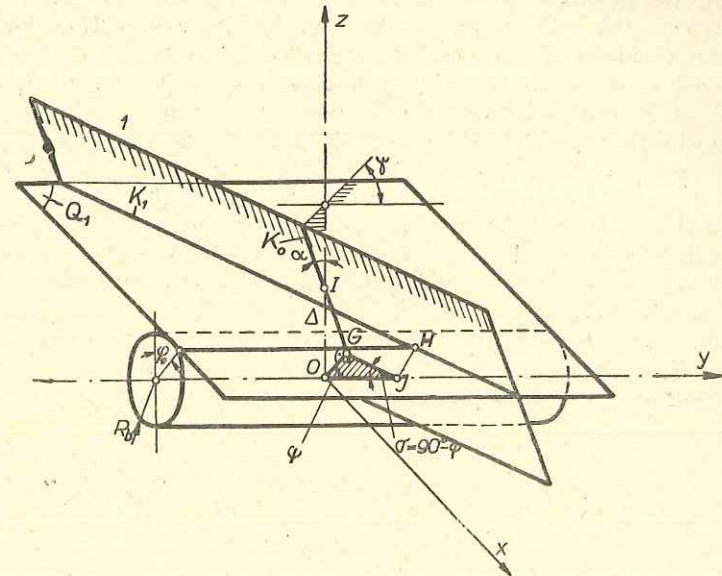


Fig. 4

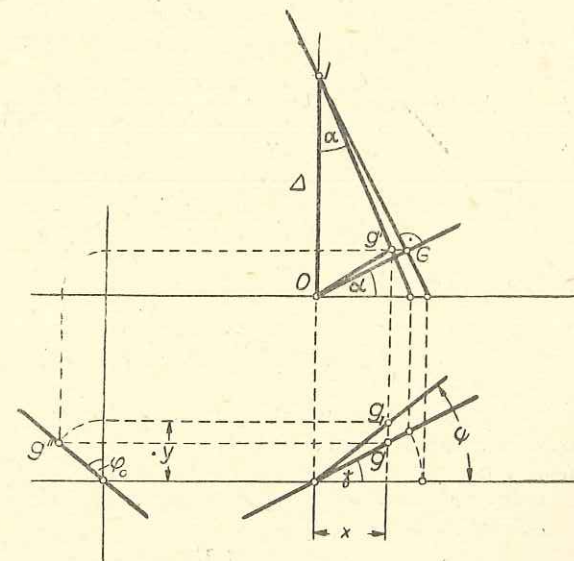


Fig. 5

fixat ortogonal de planul  $Q_1$  tangent la cilindrul de bază, coaxial cu cel de divizare (fig. 4).

Generarea are loc prin rostogolirea fără alunecare a planului  $Q_1$  peste cilindrul de bază. Dreapta de intersecție  $K_1$  a planelor  $I$  și  $Q_1$  va fi în contact permanent cu suprafața înfășurată și deci va reprezenta curba caracteristică. Aflind parametrii geometrici ai acesteia, metoda de calcul poate fi identică cu cea din cazul precedent.

În acest scop se va coborî din  $o$  normala  $oG$  pe planul  $I$ , adică pe dreapta  $K_0$ . Unghiul  $\psi$  format de aceasta cu axa  $oy$  reprezintă complementul unghiului  $\sigma$ , pe care îl închide dreapta generatoare  $K_1$  cu direcția axei  $oy$ . Normala în  $G$  pe  $oG$  rotită în jurul axei  $oG$  se va sprijini pe  $oy$  în punctul  $J$ . Acesta va fi punctul de intersecție al planului  $I$  cu axa  $oy$ . Normala în  $J$  la planul  $oGJ$  înțeapă cilindrul de bază în punctul  $H$ , care va fi punctul de contact al caracteristicii  $K_1$  cu cilindrul de bază în poziția inițială. Pentru trasarea normalei  $HJ$  va trebui determinat unghiul  $\varphi_0$  pe care îl formează planul  $oGJ$  cu  $xoy$ .

La calcularea unghiurilor  $\psi$  și  $\varphi_0$  se va folosi metoda rabaterii pentru segmentul  $oG$ , reprezentat prin trei proiecții în figura 5.

Din această figură se poate deduce

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\Delta \sin^2 \alpha}{x \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\Delta \sin^2 \alpha}{\Delta \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \gamma} \quad (16)$$

și

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y}{x} = \frac{\sin \varphi_0}{\Delta \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \gamma} \sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (17)$$

Din triunghiul  $oGJ$  (fig. 4), după ce se ține seama și de relația (15), se deduce

$$oJ = \frac{oG}{\cos \psi} = \frac{\Delta \sin \alpha}{\cos \psi} = \Delta \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \gamma} = \left( R_d - \frac{s_e}{2} \cotg \alpha \right) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \gamma}. \quad (18)$$

Raza  $R_b$  a cilindrului de bază se determină din formula cunoscută

$$R_b = h \cotg \psi, \quad (19)$$

sau introducînd aici valoarea lui  $\psi$  din (7)

$$R_b = \frac{h \cos \gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \quad (20)$$

Aflînd acești parametri, după metoda din figura 3 *b* și *c* se poate determina abscisa corespunzătoare a punctului de intersecție de ordonată  $z$ . Rotînd generatoarea  $K_1$  din poziția dată cu unghiul  $\varphi$  spre dreapta, căruia îi corespunde o deplasare  $h\varphi$  spre dreapta, în baza relațiilor geometrice din figura 6, se va putea scrie

$$y = OJ + h\varphi - \operatorname{tg} \psi \sqrt{z^2 - R_b^2} \quad (21)$$

și

$$\frac{R_b}{z} = \cos(\varphi + \varphi_0). \quad (22)$$

Ecuția (22) fiind identică cu (9), dacă  $r_d$  se înlocuiește cu  $R_b$ , din formula (11), se poate deduce

$$\varphi = \arcsin \left( \cos \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{R_b^2}{z^2}} - \frac{R_b}{z} \sin \varphi_0 \right). \quad (23)$$

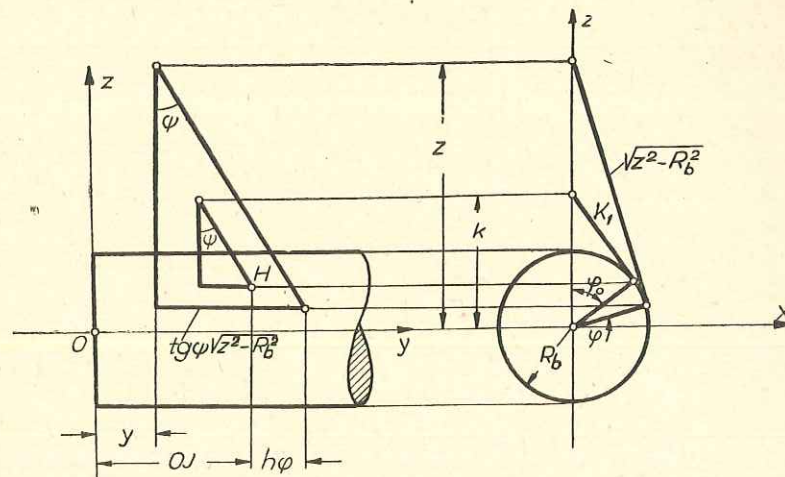


Fig. 6

Valorile lui  $\sin \varphi_0$  și  $\cos \varphi_0$  se pot exprima cu ajutorul relației (16), adică

$$\begin{aligned} \sin \varphi_0 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \\ \cos \varphi_0 &= \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Înlocuindu-le în relația (23) se obține

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \sqrt{1 - \frac{R_b^2}{z^2}} - \frac{R_b}{z} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right). \quad (25)$$

Introducînd în sfîrșit valoarea lui  $\varphi$  din (25) în (21), și ținînd seamă de (15), se ajunge la forma

$$\begin{aligned} y &= \left( R_d - \frac{s_e}{2} \cotg \alpha \right) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \gamma} + \\ &+ h \arcsin \left( \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \sqrt{1 - \frac{R_b^2}{z^2}} - \frac{R_b}{z} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \right) - \\ &- \frac{1}{\cos \gamma} \sqrt{\sin^2 \gamma + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{z^2 - R_b^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Pentru  $z = R_d$  se obține semilățimea  $\frac{\delta \Gamma_1}{2}$  a canalului pe cilindrul de divizare, cuprinsă în expresia (4).

În continuare se va studia profilul prelucrat de suprafața conică 2.

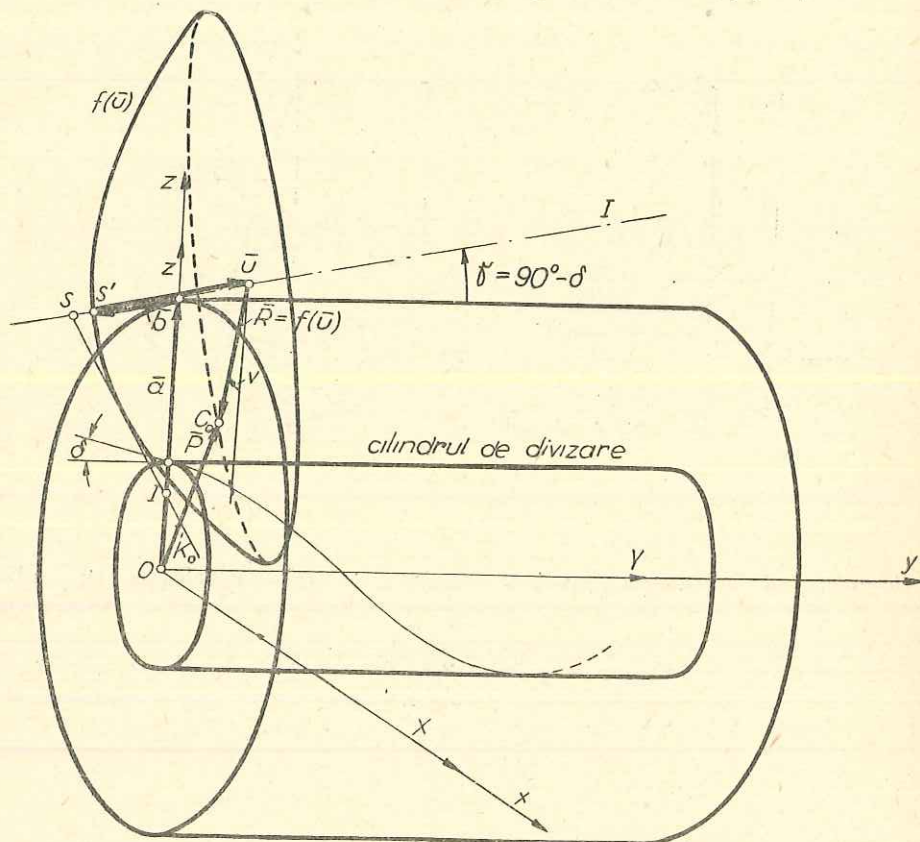


Fig. 7

Pentru generalizarea problemei și pentru a deschide perspective de noi cercetări, curba meridiană a suprafeței conice situată în planul  $abcd$  se va alege ca funcție arbitrară  $f(u)$  de un parametru  $u$ . Se va presupune însă că această curbă este tangentă la dreapta  $K_0$ .

Conul se va presupune fixat în sistemul de referință mobil  $OXYZ$ , care la origine coincide cu sistemul de referință fix  $oxyz$ , și a cărei axă  $OY$  alunecă continuu pe  $oy$  (fig. 7). Sistemul  $OXYZ$  se alege astfel încât  $OZ$  să coincidă cu normala comună  $\bar{a}$  dintre  $I$  și  $oy$ . Punctul  $S'$  de intersecție a curbei meridiane cu axa  $I$  fie situat la distanța  $\bar{b}$  de axa  $OZ$ .

Se consideră punctul curent  $C_0$  de pe suprafața conului. Vectorul său de poziție, măsurat din originea sistemului  $OXYZ$  funcție de para-

metrul  $u$  și  $v$ , unde unghiul  $v$  se măsoară în sensul arătat — de la direcția paralelă cu  $OZ$  va fi

$$\bar{P} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{u} + f(\bar{u}). \quad (27)$$

Notînd cu  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  versorii sistemului  $OXYZ$ , ecuația (27) se poate scrie

$$\bar{P} = e_1 X + e_2 Y + e_3 Z, \quad (28)$$

unde, folosind proiecțiile pe planul  $XOY$

$$\begin{aligned} X &= b \sin \gamma - (u \sin \gamma + f(u) \sin v \cos \gamma), \\ Y &= -b \cos \gamma + (u \cos \gamma - f(u) \sin v \sin \gamma), \\ Z &= a - f(u) \cos v. \end{aligned} \quad (29)$$

La rotirea sistemului  $OXYZ$  cu unghiul  $\varphi$  înspre dreapta, originea lui  $OXYZ$  se va deplasa față de cea a lui  $oxyz$  cu cantitatea

$$\bar{H} = \bar{e}_2 h \varphi. \quad (30)$$

Vectorul de poziție  $\bar{M}$  al punctului  $C_0$  față de sistemul  $oxyz$  va fi deci

$$\bar{M} = \bar{H} + \bar{P} = \bar{e}_1 X + \bar{e}_2 (h \varphi + Y) + \bar{e}_3 Z. \quad (31)$$

Pentru a determina relația dintre parametrii  $u$  și  $v$  în cazul punctelor situate pe curba caracteristică a conului, expresia (31) va trebui derivată în raport cu  $\varphi$  și egală apoi cu zero. Știind că

$$\bar{e}'_1 = -\bar{e}_3, \bar{e}'_2 = 0 \text{ și } \bar{e}'_3 = \bar{e}_1, \quad (32)$$

se obține

$$\bar{M}' = \bar{e}_1 (X' + Z) + \bar{e}_2 (h \varphi + Y)' + \bar{e}_3 (Z' - X). \quad (33)$$

După derivarea expresiilor (29), ecuației vectoriale (33) îi va corespunde următoarele ecuații scalare:

$$\begin{aligned} X' + Z &= u' \sin \gamma - f'_u(u) u' \sin v \cos \gamma - f(u) \cos v v' \cos \gamma + \\ &\quad + a - f(u) \cos v = 0, \\ (h \varphi + Y)' &= h + u' \cos \gamma - f'_u(u) u' \sin v \sin \gamma - f(u) \cos v v' \sin \gamma = 0, \\ Z' - X &= -f'_u(u) u' \cos v + f(u) \sin v v' - b \sin \gamma + \\ &\quad + u \sin \gamma - f(u) \sin v \cos \gamma = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Din prima și a doua ecuație a sistemului (34) se poate deduce

$$u' = a \sin \gamma - h \cos \gamma - f(u) \sin \gamma \cos v \quad (35)$$

și

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\sin v \cdot f'_u(u) (h \cos \gamma - a \sin \gamma)}{f(u) \cos v} + \\ &\quad + \frac{\cos v (f(u) \cdot f'_u(u) \sin v \sin \gamma - f(u) \cos \gamma) + h \sin \gamma + a \cos \gamma}{f(u) \cos v}. \end{aligned} \quad (36)$$

Înlocuind aceste valori în a treia ecuație, se obține

$$\cos v \cdot \sin \gamma [f(u) f'_u(u) + (u - b)] + \sqrt{1 - \cos^2 v} (h \sin \gamma + a \cos \gamma) + f'_u(u) (h \cos \gamma - a \sin \gamma) = 0, \quad (37)$$

sau

$$(A^2 + C^2) \cos^2 v - 2B C \cos v - A^2 + B^2 = 0, \quad (38)$$

unde

$$\begin{aligned} A &= h \sin \gamma + a \cos \gamma, \\ B &= f'_u(u) (a \sin \gamma - h \cos \gamma), \\ C &= \sin \gamma (f(u) f'_u(u) + u - b). \end{aligned} \quad (39)$$

Rezolvând ecuația (38) de gradul doi, se obține

$$\cos v = \frac{BC \mp \sqrt{A^2 - B^2 + C^2}}{A^2 + C^2} = F(u), \quad (40)$$

de unde

$$v = \arccos F(u) = \Phi(u). \quad (41)$$

De aici se observă că pentru orice valoare dată parametrului  $u$ , se pot determina valorile corespunzătoare ale parametrului  $v$ .

Ecuația caracteristicii va fi dată de sistemul (29), înlocuind valoarea lui  $v$  dată de (40) și (41). Astfel

$$\begin{aligned} X &= b \sin \gamma - (u \sin \gamma + f(u) \sin \Phi(u) \cos \gamma), \\ Y &= -b \cos \gamma + (u \cos \gamma - f(u) \sin \Phi(u) \sin \gamma), \\ Z &= a - f(u) F(u). \end{aligned} \quad (42)$$

Ecuația suprafeței înfășurate în sistemul fix  $oxyz$ , se va putea determina exprimând versorii  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  din relația (31) în funcție de versorii sistemului fix  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  adică,

$$\bar{M}(\varphi, u) = \tau [X \cos \varphi + Z \sin \varphi] + \bar{j}(h\varphi + Y) + \bar{k}(Z \cos \varphi - X \sin \varphi). \quad (43)$$

Această ecuație vectorială corespunde la următoarele ecuații scalare

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi [(b - u) \sin \gamma - f(u) \sin \Phi(u) \cos \gamma] + (a - f(u) F(u)) \sin \varphi, \\ y &= h\varphi + (u - b) \cos \gamma - f(u) \sin \Phi(u) \sin \gamma, \end{aligned} \quad (44)$$

$$z = (a - f(u) F(u)) \cos \varphi - \sin \varphi [(b - u) \sin \gamma - f(u) \sin \Phi(u) \cos \gamma].$$

Pentru determinarea ecuației secțiunii suprafeței elicoidale cu planul axial  $x = 0$ , se vor folosi următoarele notații:

$$\begin{aligned} E &= (b - u) \sin \gamma - f(u) \sin \Phi(u) \cos \gamma \\ G &= a - f(u) F(u). \end{aligned} \quad (45)$$

Egalând cu zero expresia lui  $x$  din prima ecuație a sistemului (44) și ținând seama de (45), se obține

$$\sin \varphi = -\frac{E}{\sqrt{E^2 + G^2}} = \theta(u) \quad (46)$$

Înlocuind aceste valori în ultimele două ecuații ale sistemului (44), se obține ecuația parametrică (cu parametrul  $u$ ) a secțiunii

$$\begin{aligned} y &= h \arcsin \theta(u) + (u - b) \cos \gamma - f(u) \sin \Phi(u) \sin \gamma, \\ z &= G \sqrt{1 - \theta^2(u)} - \theta(u) E. \end{aligned} \quad (47)$$

În cazul suprafeței conului circular drept 2 (fig. 1), are loc

$$f(u) = u \cotg \alpha. \quad (48)$$

Înlocuind în (39) se obține

$$\begin{aligned} A &= h \sin \gamma + a \cos \gamma, \\ B &= \cotg \alpha (a \sin \gamma - h \cos \gamma), \\ C &= \sin \gamma \left( \frac{u}{\sin^2 \alpha} - b \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Pentru o valoare dată parametrului  $u$ ,  $A$  și  $B$  fiind constante, se determină  $C$ , apoi  $F(u)$  din (40). Cunoscându-se  $F(u)$ , din relațiile (45) se determină

$$\begin{aligned} E &= (b - u) \sin \gamma - u \cotg \alpha \sin \Phi(u) \cos \gamma, \\ G &= a - u \cotg \alpha F(u), \end{aligned} \quad (50)$$

apoi  $\theta(u)$  din relația (46).

Cunoscând toate aceste valori, din relația (47), se determină coordonatele punctului de pe profilul axial, adică

$$\begin{aligned} y &= h \arcsin \theta(u) + (u - b) \cos \gamma - u \cotg \alpha \sin \Phi(u) \sin \gamma, \\ z &= G \sqrt{1 - \theta^2(u)} - \theta(u) E. \end{aligned} \quad (51)$$

Pentru diferite valori ale lui  $u$  se determină în continuare o serie de puncte ale profilului, acesta putându-se apoi trasa cu aproximație.

Pentru suprafața conică 3 rezultă  $a = 0$ ;  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ;  $\beta = \alpha$ ;  $b = -\Delta$ .

Relațiile (49) vor deveni

$$\begin{aligned} A &= h, \\ B &= 0, \\ C &= \frac{u}{\cos^2 \alpha} + \Delta, \end{aligned} \quad (52)$$

iar (40)

$$\cos v = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{u}{\cos^2 \alpha} + \Delta\right)^2}} = F(u). \quad (53)$$

Deoarece la acest melc, în poziția inițială axa frezei deget coincide cu axa  $ox$ , secțiunea axială se va obține cu planul  $z = 0$ . Din a treia ecuație a sistemului (44), pentru  $z = 0$  se obține

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{u \operatorname{tg} \alpha F(u)}{u + \Delta}, \quad (54)$$

de unde

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{u \operatorname{tg} \alpha F(u)}{u + \Delta}. \quad (55)$$

Înlocuind această valoare în primele două ecuații ale sistemului (44), se obțin ecuațiile parametrice ale secțiunii axiale:

$$\begin{aligned} x &= -(u + \Delta) \cos \varphi - u \operatorname{tg} \alpha F(u) \sin \varphi \\ y &= h \varphi - u \operatorname{tg} \alpha \sin \Phi(u). \end{aligned} \quad (56)$$

### Exemplu

Să se determine abaterile la prelucrarea cu cele patru scule descrise anterior, a unui melc, având următoarele date:

- modulul axial  $m_a = 10$  mm;
- diametrul cilindrului de divizare  $D_d = 80$  mm;
- diametrul exterior  $D_e = 100$  mm;
- diametrul interior  $D_i = 56$  mm;
- numărul de începuturi  $k = 4$ .

Sculele folosite au  $\alpha = 20^\circ$ , și  $a = 100$  mm.

Se vor determina celelalte dimensiuni necesare pentru calcul:

1° Lățimea canalului calculată practic

$$s = \frac{m_a \pi}{2} = \frac{10 \pi}{2} = 15,70797 \text{ mm.}$$

2° Unghiul de înclinare  $\delta$  al elicei pe cilindrul de divizare

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\pi D_d}{4 m_a \pi} = 2,$$

$$\delta = 63^\circ 26' 6''.$$

3° Unghiul  $\gamma = 90^\circ - \delta = 26^\circ 33' 54''$ .

4° Cota  $s_c$  din relația (1)

$$s_c = 14,04964 \text{ mm.}$$

5° Parametrul mișcării de șurub  $h$

$$h = \frac{4 m_a \pi}{2\pi} = 20 \text{ mm.}$$

6° Din relația (15),

$$\Delta = 20,699469 \text{ mm.}$$

**Soluție:**

*Prelucrarea prin strunjire cu cutitul avînd profilul abcd.*

Din (5) rezultă că  $r_d = 3,325535$  mm.

Din (7) rezultă că  $\operatorname{tg} \psi = 0,321322$ .

Tabelă

	Profilul $C_0$	Profilul $C_1$	Profilul $C_2$		Profilul $C_3$	
$z$	$y$	$y$	$y$	$u$	$y$	$u$
51,567971	.....	.....	-12,576763	18	.....	.....
50,838037	.....	.....	.....	.....	-11,731402	30
50,040251	.....	.....	-11,888491	18,5	.....	.....
50,000000	-11,366215	-12,482782	-11,870361	.....	-11,430025	.....
49,836516	.....	.....	.....	.....	-11,371038	29
47,000000	-10,314468	-10,997144	.....	.....	.....	.....
46,830863	.....	.....	.....	.....	-10,288630	26
45,363829	.....	.....	-9,983059	20	.....	.....
43,823348	.....	.....	.....	.....	-9,200499	23
43,000000	-8,887146	-9,132738	.....	.....	.....	.....
40,813630	.....	.....	.....	.....	-8,105685	20
40,303365	.....	.....	-7,999552	21,7	.....	.....
40,000000	-7,806040	-7,853214	-7,852389	.....	-7,808050	.....
39,809703	.....	.....	.....	.....	-7,738438	19
39,658263	.....	.....	-7,686612	22	.....	.....
36,000000	-6,334228	-6,368269	.....	.....	.....	.....
34,460064	.....	.....	-5,831152	24	.....	.....
32,773324	.....	.....	.....	.....	-5,116794	12
32,000000	-4,808540	-5,341442	.....	.....	.....	.....
31,024585	.....	-5,239930	.....	.....	.....	.....
30,759958	.....	.....	.....	.....	-4,341503	10
32,369219	.....	.....	-5,193813	25	.....	.....
28,745400	.....	.....	.....	.....	-3,547341	8
29,016617	.....	.....	-4,309244	27	.....	.....
28,000000	-3,215781	.....	-4,309127	.....	-3,247152	.....
27,931721	.....	.....	-4,285255	28	.....	.....
27,737868	.....	.....	.....	.....	-3,141586	7
27,120328	.....	.....	-4,272961	30	.....	.....
27,207413	.....	.....	-4,261456	30,5	.....	.....
27,406678	.....	.....	-4,225999	31	.....	.....
28,124140	.....	.....	-4,199725	32	.....	.....
30,662463	.....	.....	-3,094178	34	.....	.....

La întocmirea acestei tabele au contribuit: B. Jankó, E. Munteanu și E. Sándor.

Dând lui  $z$  diferite valori, din ecuația (14) se pot determina abscisele corespunzătoare ale punctelor profilului  $C_0$  centralizate în tabelă și reprezentate în figura 8.

Pentru  $z = 40$  mm,  $y = \frac{s'}{2} = -7,80604$ ; sau  $s' = 15,61208$  mm.

Comparând cu (2) se poate determina  $\Delta s = -0,09589$  mm.

*Prelucrarea cu cuțitul prin rabotare, sau cu sculă abrazivă plană:*  
Din (20) rezultă că  $R_b = 31,024585$ .

Dând lui  $z$  diferite valori, din (26) se determină abscisele corespunzătoare ale punctelor profilului  $C_1$ , centralizate în tabelă și reprezentate în figura 8.

Pentru  $z = R_b$ , profilul prezintă un punct de înapoiere, legătura cu fundul canalului făcându-se prin profilul de racord.

Pentru  $z = 40$ , se obține  $y = \frac{s_{r_1}}{2} = -7,853214$  sau  $s_{r_1} = 15,706428$ .

Din (4) rezultă  $\Delta s' = 0,094348$ .

*Prelucrarea cu freză conică disc, sau cu sculă abrazivă conică:*

Dând parametrului  $u$  diferite valori și ținând seamă succesiv de formulele (48), (49), (40), (41), (50), (46), (51), se pot determina valorile corespunzătoare ale variabililor  $y$  și  $z$ . Pentru  $\cos v$ , în baza figurii 7, se va lua numai valoarea pozitivă, corespunzătoare pentru  $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$ .

Ținând seamă de faptul că unghiul  $v$  poate fi negativ sau pozitiv pentru aceeași valoare a cosinusului său și urmînd raționamentul anterior asupra aspectului calitativ al caracteristicii, se poate trage concluzia că pentru punctele de cotă  $z = 40$  sau  $z < 40$ ,  $v$  este negativ;  $v$  devine egal cu zero pentru un punct situat deasupra cotei  $z = 40$ . Pentru valori mai mari ale lui  $z$ ,  $v$  va fi pozitiv.

Punctele profilului  $C_2$  astfel determinat, s-au centralizat în aceeași tabelă și s-au reprezentat în aceeași figură.

Este de remarcat că și aici profilul prezintă un punct de înapoiere corespunzător însă unei valori mai mici pentru  $z$  ca în cazul precedent.

*Prelucrarea cu freză deget:*

Calculul punctelor pentru diferite valori ale parametrului  $u$  se face cu ajutorul formulei (56). În formulele pregătitoare (52)–(55) se vor introduce valorile corespunzătoare datelor problemei. La determinarea limitelor în care se poate încadra unghiul  $v$  s-a ținut seama de cele amintite asupra aspectului calitativ al caracteristicii, trăgîndu-se concluzia că  $v$  trebuie să fie  $> \frac{\pi}{2}$ ;  $\cos v$  din (53) s-a luat ca atare întotdeauna

cu semnul minus. Deoarece valorile  $x$  pot fi considerate și ca valori ale variabilei  $z$ , dacă axa  $x$  se rabate în jurul lui  $y$  cu  $90^\circ$  spre dreapta, în tabelă pentru curba  $C_3$  în loc de  $-x$  s-a trecut  $+z$ .

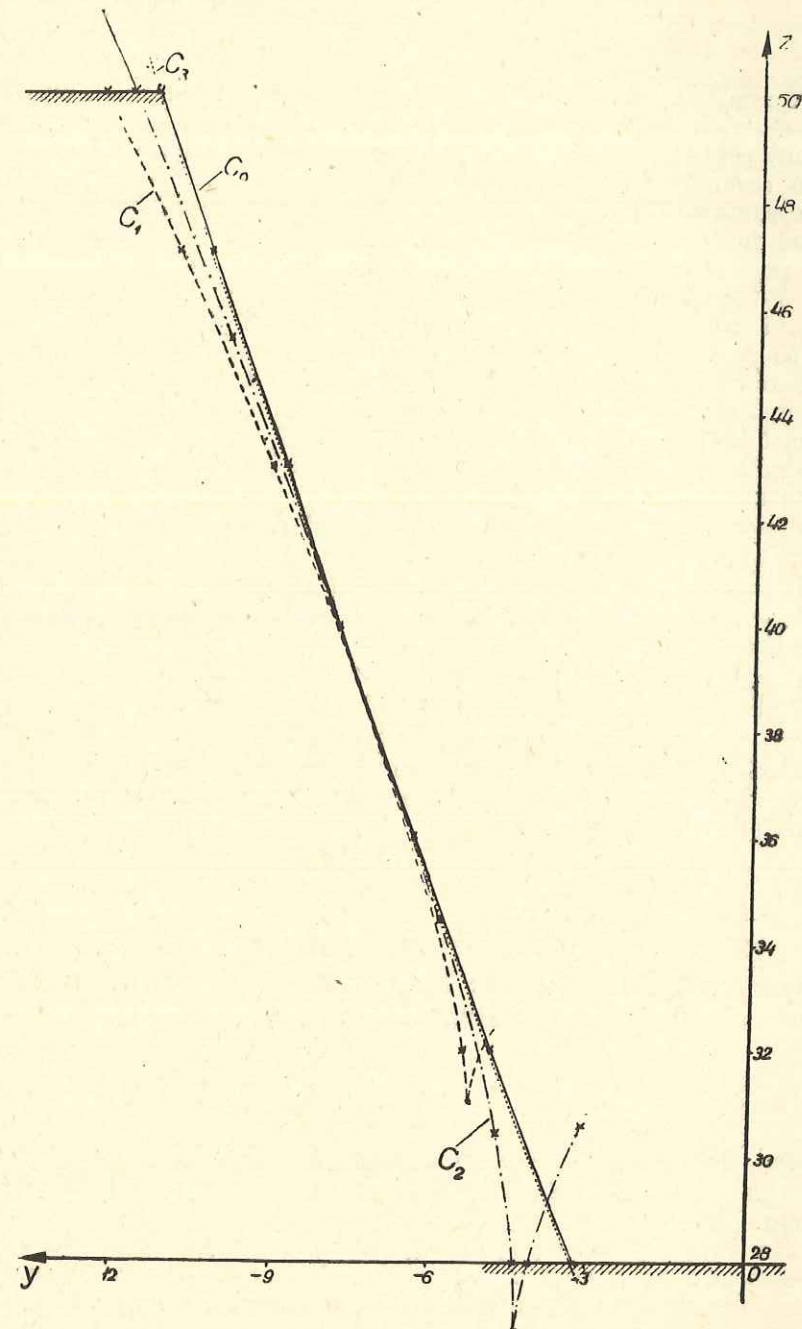


Fig. 8

## CONCLUZII

Comparând cele patru profile reprezentate în figura 8, cu coordonatele centralizate în tabelă, se verifică cele demonstrate în figura 2, prin care profilul  $abcd$  prelucurează prin strunjire canalul cel mai îngust (vezi de exemplu valorile lui  $y$  pentru cota  $z = 40$ ). Prelucrarea cu freză deget aproximează cel mai bine canalul prelucrat cu cuțitul prin strunjire. Cea mai mare abatere de la profilul de bază  $C_0$  se obține prin prelucrarea cu cuțitul prin rabotare sau prin rectificarea cu scula abrazivă plană. Pe diametrul exterior al canalului această abatere, după cum rezultă și din tabelă, ajunge la valoarea maximă de 1,116567 mm, ceea ce nu se poate neglija din punct de vedere practic. Profilul obținut prin prelucrarea cu freză conică disc, se încadrează între profilul de bază  $C_0$  și cel prelucrat cu scula abrazivă plană. Abaterea maximă de la profilul de bază  $C_0$  este de 0,504146 mm, ceea ce la fel nu se poate neglija.

Profilele se atașează la cilindrul interior al melcului prin muchie ascuțită numai în cazul  $C_0$  în toate celelalte cazuri ca  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  atașarea se face printr-un profil de racord prelucrat de muchia sculei, care este cea mai apropiată de axa melcului.

În baza celor arătate mai sus și ilustrate prin exemplul concret, reiese clar că abaterile obținute prin cele patru metode de prelucrare pot fi destul de mari.

Analiza problemei sub acest aspect prezintă o importanță deosebită în special la stabilirea procesului tehnologic al frezei melc, menite să prelucreză roata melcată, care se va împerechia cu melcul considerat.

Dacă melcul este prelucrat prin altă metodă decât freza melc sculă, intervîn abaterile de mai sus care pot cauza scăderea randamentului angrenajului în exploatare.

### ОБ ОТКЛОНЕНИЯХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЧЕРВЯКОВ, ОБРАБОТАННЫХ ИНСТРУМЕНТАМИ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ПРОФИЛЯМИ

## РЕЗЮМЕ

Рассматривается трапециoidalный исходный профиль  $abcd$ , перпендикулярный в своей средней точке к делительному винту  $Em$  червяка.

На сторону  $ad$  профиля (рис. 1) накладываются следующие поверхности: плоскость  $1$ , перпендикулярная профилю, коническая поверхность  $2$  с осью  $1$ , расположенная в плоскости профиля, с образующей, совпадающей с  $ad$  и коническая поверхность  $3$  с осью  $oz$  и с осевым сечением  $abcd$ .

Профиль  $abcd$  представляет собой режущий профиль токарно-го резца, плоскость  $1$  — поверхность, обрабатываемую строганием режущей кромкой  $ad$  резца или плоской стороной абразивного инструмента, а конические поверхности  $2$  и  $3$  — режущие поверхности дисковой или пальцевой фрезы, либо конического абразивного инструмента.

Выводятся уравнения винтовых поверхностей, образуемых профилем  $abcd$  и поверхностями  $1$ ,  $2$ , и  $3$  в винтообразном движении параметров  $h$ .

В дальнейшем выводится уравнение осевого сечения и на конкретном примере численно определяются координаты соответствующих точек в четырех вышеупомянутых случаях.

Сопоставление полученных результатов позволяет установить отклонения, которыми, с практической точки зрения, не всегда можно пренебречь.

Наконец, подчеркивается важность учета этих отклонений, в особенности в том случае, когда червяк изготавливается другим способом чем червячная фреза, которая нарезает колесо, зацепляющее данный червяк.

### SUR LES ÉCARTS ENTRE LES FLANCS DES VIS SANS FIN EXÉCUTÉES AU MOYEN D'OUTILS À PROFILS RECTILIGNES

## RÉSUMÉ

Les auteurs considèrent un profil de référence trapézoïdal  $abcd$ , perpendiculaire en son point moyen sur l'hélice-diviseur  $Em$  d'une vis sans fin.

Sur le côté  $ad$  du profil (fig. 1) s'appuient les surfaces suivantes : un plan  $1$  perpendiculaire sur le profil ; une surface conique  $2$ , dont l'axe  $1$  est situé dans le plan du profil et dont la génératrice coïncide avec  $ad$  ; une surface conique  $3$  ayant  $oz$  pour axe et  $abcd$  pour section axiale.

Le profil  $abcd$  représente le profil de coupe d'un outil de tour, le plan  $1$  la surface balayée, par rabotage, par le tranchant  $ad$  d'un couteau ou par la surface plane d'un outil abrasif. Les surfaces coniques  $2$  et  $3$  représentent les surfaces tranchantes d'une fraise ou d'une fraise à bout, ou bien d'une meule tronconique.

Les auteurs établissent les équations des surfaces hélicoïdales engendrées par le profil  $abcd$  et par les surfaces  $1$ ,  $2$  et  $3$  au mouvement hélicoïdal avec le paramètre  $h$ .

Après avoir déterminé aussi l'équation de la section axiale, ils passent à une application sur un exemple concret, en faisant le calcul numérique des coordonnées des points respectifs, dans les quatre cas mentionnés.

En confrontant les résultats obtenus, ils constatent des écarts, qui ne sont pas toujours négligeables dans la pratique.

Ils concluent en soulignant qu'il est important de prendre ces écarts en considération, surtout lorsque la vis sans fin est exécutée par une méthode autre que la fraise hélicoïdale qui taillera la roue avec laquelle s'accouplera la vis sans fin.

## BIBLIOGRAFIE

1. BUCKINGHAM E., *Analytical Mechanics of Gears*. Mc. Graw-Hill-London, 1949.
2. MAROS D., *Cinematica roților dințate*. Ed. tehnică, București, 1958.

Primit la 4.XII.1959.

## NOI FORMULE DE TIP ADAMS PENTRU INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNȚÎI

DE

D. V. IONESCU  
(Cluj)

*Lucrare prezentată la Consfătuirea tehnico-științifică asupra mașinilor electronice de calcul  
din 13-15 ianuarie 1960, București*

1. Am arătat importanța formulelor de derivare numerică în integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale [1]. Fie  $f(x)$  o funcție de clasa  $C^{n+1}$  în intervalul  $[a, b]$  și  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noduri din acest interval astfel ca  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Pentru derivata de ordinul  $p$  a funcției  $f(x)$  în nodul  $x_0$ , unde  $1 \leq p \leq n$ , am dat următoarea formulă de derivare numerică

$$\begin{aligned} \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} = & [x_0, x_1, \dots, x_p; f(x)] - \mu_1(x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0)[x_0, x_1, \dots, x_{p+1}; f(x)] + \\ & + \mu_2(x_1 - x_0, \dots, x_{p+1} - x_0)[x_0, x_1, \dots, x_{p+2}; f(x)] + \dots + \\ & + (-1)^{n-p} \mu_{n-p}(x_1 - x_0, \dots, x_{n-1} - x_0)[x_0, x_1, \dots, x_n; f(x)] + \\ & + (-1)^{n-p+1} \mu_{n-p+1}(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0) \int_{x_0}^{x_n} \Psi_p(s) f^{(n+1)}(s) ds, \quad (1) \end{aligned}$$

unde în general  $\mu_k(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)$  este un polinom omogen și de gradul  $k$  în  $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$  cu coeficienții egali cu 1. Mai scurt vom nota  $\mu_k(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0) = \mu_k$ . S-a demonstrat că funcția  $\Psi_p(s)$  este pozitivă în intervalul  $(x_0, x_n)$  și că avem

$$\int_{x_0}^{x_n} \Psi_p(s) ds = \frac{1}{(n+1)!}. \quad (2)$$