CEA MAI BUNĂ TRANSFORMARE PROIECTIVĂ A SCĂRILOR LA NOMOGRAME CU PUNCTE ALINIATE

DE

FRANCISC RADÓ

Comunicare prezentată în ședința din 24 septembrie 1956 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

1. Fie

$$x = f(z) \tag{1}$$

ecuația scării rectilinii a rezultatului la o monogramă cu puncte aliniate. Să presupunem că intervalului de variație (z_0, z_1) al variabilei z îi corespunde intervalul $(0,1)$ al axei x. Notînd cu h eroarea geometrică a punctului de intersecție al scării rezultatului și al dreptei rezolvente (care poate fi evaluată la o nomogramă corect construită între 0,5 și 1 mm), pentru eroarea absolută a rezultatului avem

$$|\Delta z| \approx \frac{h}{|f'(z)|}$$

și pentru eroarea relativă a rezultatului

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \frac{h}{|zf'(z)|}.$$

Maximul expresiilor de mai sus, cînd $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$, măsoară eroarea absolută, respectiv cea relativă a nomogramei. Ținînd seamă că planul nomogramei poate fi supus unei transformări proiective, se pune problema determinării acelei transformări proiective, după aplicarea căreia eroarea absolută sau cea relativă devin minime, fără a depăși dimensiunile admise pentru desen. Considerăm proiectivitățile axei x, care păstrează punctele $x = 0$ și $x = 1$ (pentru a nu lungi scara),

$$x' = \frac{(\mu + 1)\, x}{\mu x + 1}; \tag{2}$$

punînd și condiția ca interiorul segmentului $[0,1]$ al axei x să se transforme în interiorul segmentului $[0,1]$ al axei x', găsim pentru μ

$$\mu > -1. \tag{3}$$

Ecuația scării transformate este

$$x' = \frac{(\mu+1)\cdot f(z)}{\mu f(z)+1} = f_\mu(z).$$

Vom determina parametrul μ în așa fel ca eroarea scării transformate să fie cea mai mică posibilă. Pentru aceasta trebuie să rezolvăm problema :

Să se determine μ *în așa fel ca* $\min\limits_{z_0\leqq z\leqq z_1} |f'_\mu(z)|$, *respectiv* $\min\limits_{z_0\leqq z\leqq z_1} |zf'_\mu(z)|$, *să fie cel mai mare posibil.*

M. V. Pentkovski a rezolvat această problemă pe cale analitică în cazul cînd $f'_\mu(z)$ nu admite minim relativ în intervalul $[z_0, z_1]$, oricare ar fi μ, și în cazul cînd $f'_\mu(z)$ nu admite maxim relativ, oricare ar fi μ (cazuri foarte frecvente în aplicații), stabilind totodată condiții necesare și suficiente pentru ca aceste cazuri să aibă loc [1]. A dat de asemenea o metodă nomografică pentru cazul general [2].

În această notă se dă următorul rezultat : să notăm cu z_2 valoarea z pentru care $f_\mu(z)=1/2$ și

$$m_s(\mu) = \min_{z_0\leqq z\leqq z_2} |f'_\mu(z)|$$

$$m_d(\mu) = \min_{z_2\leqq z\leqq z_1} |f'_\mu(z)|.$$

Problema de minim pusă pentru eroarea absolută admite o singură soluție și anume cu valoarea μ *pentru care* $m_s(\mu)=m_d(\mu)$. Problema pusă pentru eroarea relativă are o soluție analoagă. Se regăsesc rezultatele lui M. V. Pentkovski în cazurile amintite. Se dă o metodă simplă pentru aproximarea parametrului celei mai bune transformări proiective.

2. Punem în evidență cîteva proprietăți ale proiectivităților (2).

Proiectivitățile (2) formează un grup.

Ținînd seamă de (3), schimbăm notarea parametrului

$$\mu = \beta^2 - 1;$$

pentru β (real) nu avem nevoie de condiție suplimentară.

Calculul direct arată că produsul proiectivităților

$$x' = \frac{\beta^2 x}{(\beta^2-1)x+1} \qquad (2')$$

$$x' = \frac{\beta'^2 x}{(\beta'^2-1)x+1}$$

este

$$x' = \frac{(\beta\beta')^2 x}{[(\beta\beta')^2-1]x+1},$$

deci parametrul produsului a două transformări (2′) este egal cu produsul parametrilor transformărilor considerate.

Derivata

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{\beta^2}{[(\beta^2-1)x+1]^2}$$

variază monoton de la β^2 la $\frac{1}{\beta^2}$, cînd x descrie segmentul $[0,1]$. Pentru $x=\alpha=\frac{1}{\beta+1}$, avem $\frac{dx'}{dx}=1$. Imaginea punctului α este $1-\alpha$. Dacă $\beta^2>1$, vecinătățile suficient de mici ale punctelor situate între 0 și α se dilată, cele ale punctelor situate între α și 1 se constractă (în acest caz $0<\alpha<\frac{1}{2}$); dacă $\beta^2<1$, atunci $\frac{1}{2}<\alpha<1$, vecinătățile suficient de mici ale punctelor situate între 0 și α se contractă și cele ale punctelor între α și 1 se dilată. Punctul neutru α are vecinătăți care păstrează lungimile lor. Contraimaginea punctului $\frac{1}{2}$ este $\frac{1}{\beta^2+1}$, care coincide cu punctul neutru al transformării iterate (fig. 1).

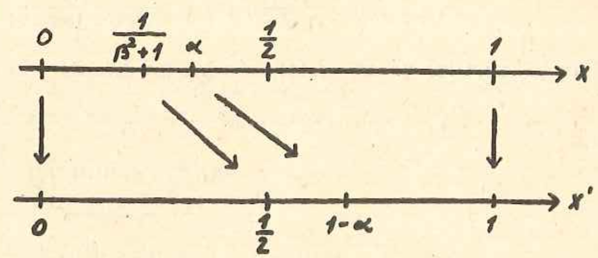

Fig. 1

Proiectivitatea (2) este determinată, dacă se cunoaște punctul neutru α. Fiind dat α, construcția grafică a proiectivității se face luînd triunghiul isoscel ABB' ($AB=AB'=1$), măsurînd pe laturi $AE=B'E'=\alpha$ și proiectînd din punctul S de intersecție al dreptelor BB' și EE' segmentul AB pe AB' (fig 2.).

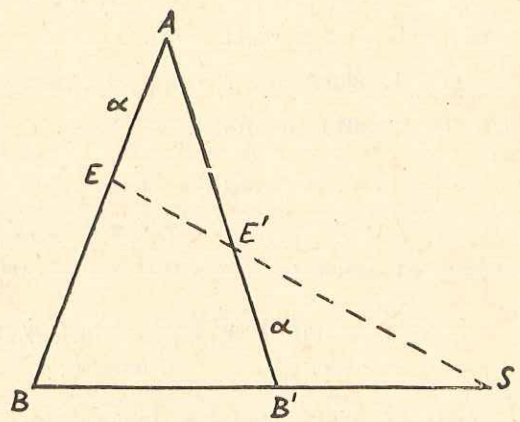

Fig. 2

3. Să considerăm scara rectilinie de ecuația (1). Dacă $f'(z)$ se anulează între z_0 și z_1, Δz devine infinit și nomograma nu se poate utiliza. Trebuie deci să presupunem că $f'(z)\neq 0$, pentru $z_0\leqslant z\leqslant z_1$. Pentru a fixa ideile să presupunem

$$f'(z)>0, \qquad z_0\leqslant z\leqslant z_1. \qquad (4)$$

Să notăm cu

$$z=\Psi(x)$$

inversa funcției $x=f(z)$ (continuă și monotonă în $[z_0, z_1]$) și

$$m_s = \min_{z_0\leqq z\leqq \Psi\left(\frac{1}{2}\right)} f'(z) \qquad m_d = \min_{\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\leqq z\leqq z_1} f'(z).$$

Din (4) rezultă $m_s>0$, $m_d>0$.

Aplicînd proiectivitatea (2′), scara (1) se transformă în

$$x' = \frac{\beta^2 f(z)}{(\beta^2-1)f(z)+1} = f_\beta(z). \tag{5}$$

Calculăm derivata acestei funcții în raport cu z și o exprimăm și în funcție de x, prin intermediul funcției monotone $z=\Psi(x)$

$$\frac{d}{dz} f_\beta(z) = \frac{dx'}{dx} f'(z) = \frac{\beta^2}{[(\beta^2-1)x+1]^2} \cdot f'[\Psi(x)]. \tag{6}$$

Din (6) rezultă că $x'=f_\beta(z)$ este și ea o funcție monotonă ; notăm inversa ei cu

$$z = \Psi_\beta(x')$$

și

$$m_s(\beta) = \min_{z_0 \leqq z \leqq \Psi_\beta\left(\frac{1}{2}\right)} f'_\beta(z)$$

$$m_d(\beta) = \min_{\Psi_\beta\left(\frac{1}{2}\right) \leqq z \leqq z_1} f'_\beta(z).$$

Evident, $m_s(1)=m_s$ și $m_d(1)=m_d$.

Lema 1. *Dacă $\beta > 1$, atunci $m_s(\beta) > m_s$ și $m_d(\beta) > m_d$.*

Din (6) rezultă imediat :

$$m_s(\beta) = \min_{0 \leqq x \leqq \frac{1}{\beta^2+1}} \frac{dx'}{dx} \cdot f'[\Psi(x)]. \tag{7}$$

Am văzut că, dacă $\beta^2 > 1$ și $0 < x < \alpha$, atunci $\frac{dx'}{dx} > 1$, deci

$$m_s(\beta) > \min_{0 \leqq x \leqq \frac{1}{\beta^2+1}} f'[\Psi(x)] > \min_{0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}} f'[\Psi(x)] = \min_{z_0 \leqq z \leqq \Psi\left(\frac{1}{2}\right)} f'(z) = m_s.$$

Pentru a arăta cealaltă inegalitate, să notăm cu x_1 punctul în care $\min\limits_{\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1} f'[\Psi(x)]$ este atins. Avem

$$f'[\Psi(x_1)] = m_d$$

și deoarece $\frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant 1$, cu atît mai mult $\alpha < x_1 \leqslant 1$, deci

$$\left(\frac{dx'}{dx}\right)_{x=x_1} < 1.$$

Rezultă

$$m_d(\beta) = \min_{\frac{1}{\beta^2+1} \leqq x \leqq 1} \frac{dx'}{dx} f'[\Psi(x)] \leqslant \left(\frac{dx'}{dx}\right)_{x=x_1} f'[\Psi(x)_1] < 1.m_d.$$

Lema 2. *Dacă $\beta'' > \beta'$, atunci $m_s(\beta'') > m_s(\beta')$ și $m_d(\beta'') < m_d(\beta')$.*

Să înlocuim în lema 1 funcția $f(z)$ cu $f_{\beta'}(z)$. Atunci în loc de m_s și m_d avem $m_s(\beta')$, respectiv $m_d(\beta')$, și în loc de $m_s(\beta)$, $m_d(\beta)$ avem $m_s(\beta\beta')$, $m_d(\beta\beta')$. Alegînd $\beta = \frac{\beta''}{\beta'} > 1$, rezultă lema 2.

Cu alte cuvinte: dacă β' crește de la 0 la ∞, $m_s(\beta)$ crește monoton și $m_d(\beta)$ descrește monoton.

Din (7) se vede

$$m_s(\beta) \geqslant \left(\frac{dx'}{dx}\right)_{x=\frac{1}{\beta+1}} \cdot \min_{z_0 \leqq z \leqq z_1} f'(z) = \frac{1}{4}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 \cdot \min_{z_0 \leqq z \leqq z_1} f'(z),$$

deci $m_s(\beta) \to \infty$ cînd $\beta \to \infty$. Se vede în mod analog: $m_d(\beta) \to \infty$, cînd $\beta \to 0$.

Rezultă că există o singură valoare $\beta=\beta_0$, pentru care $m_s(\beta_0)=m_d(\beta_0)$. Ținînd seamă de faptul că

$$\min_{z_0 \leqq z \leqq z_1} f'_\beta(z) = \min\,[m_s(\beta),\ m_d(\beta)],$$

se vede că $\min\limits_{z_0 \leqq z \leqq z_1} f'_\beta(z)$ pentru $\beta=\beta_0$ este cel mai mare posibil.

TEOREMĂ. — *Există o singură valoare a lui β pentru care $\min\limits_{z_0 \leqq z \leqq z_1} f'_\beta(z)$ este maxim. Ea se determină rezolvînd ecuația $m_s(\beta)=m_d(\beta)$. Aplicînd omografia (2′) cu această valoare β, găsim scara cu eroarea absolută cea mai mică.*

Parametrul β_0 al transformării proiective, care conduce la cea mai mică eroare absolută, se poate determina aproximativ în felul următor : fie β_1 o primă aproximație pentru β_0, luată la întîmplare, și β_2 abscisa punctului de intersecție al dreptelor care trec prin punctele de coordonate $(1, m_s)$, $(\beta_1, m_s(\beta_1))$, respectiv $(1, m_d)$, $(\beta_1, m_d(\beta_1))$; β_2 este o nouă aproximație pentru β_0.

Deoarece $\min\limits_{z_0 \leqq z \leqq z_1} f'_\beta(z)$ este cuprins între $m_d(\beta_2)$ și $m_s(\beta_2)$, diferența $|m_d(\beta_2) - m_s(\beta_2)|$ arată precizia cu care valoarea β_2 o aproximează pe β_0. În caz de nevoie procedeul poate fi continuat.

Exemplu. Ecuația unei scări rectilinii este $F(z) = z^2$ și limitele de variație pentru z sînt : $z_0=1$, $z_1=4$. Să se transforme scara, printr-o proiectivitate, în așa fel ca eroarea absolută să fie cea mai mică posibilă.

Printr-o transformare liniară trecem de la funcția $F(z)$ la

$$f(z) = \frac{z^2-1}{15};$$

$f(z)$ verifică ipoteza noastră de a transforma intervalul (z_0, z_1) al axei z pe intervalul $(0,1)$ al axei x. Rezolvînd ecuația $x=f(z)$ în raport cu z, obținem : $z=\Psi(x)=\sqrt{15x+1}$ și $\Psi(1/2)=\sqrt{34}/2$. Pentru m_s și m_d, minimele lui $f'(z)$ în intervalele $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ și $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ale axei x, găsim

$$m_s = \min_{1 \leqq z \leqq \frac{\sqrt{34}}{2}} f'(z) = \frac{2}{15} \approx 0{,}13 \qquad m_d = \min_{\frac{\sqrt{34}}{2} \leqq z \leqq 4} f'(z) = \frac{\sqrt{34}}{15} \approx 0{,}39.$$

Luăm pentru prima aproximaţia lui β_0: $\beta_1=2$; atunci

$$x'=\frac{\beta_1^2 x}{(\beta_1^2-1)x+1}=\frac{4x}{3x+1},$$

$$f_2'(z)=\frac{\beta_1^2}{[(\beta_1^2-1)f(z)+1]^2}f'(z)=\frac{4}{[3f(z)+1]^2}\cdot\frac{2}{15}z=\frac{8}{15}\frac{\sqrt{15x+1}}{(3x+1)^2}=$$
$$=\frac{1}{15}\sqrt{(4-3x')^3(3x'+1)}.$$

În intervalul $0\leqslant x'\leqslant 1$ această functie are un maxim pentru $x'=1/12$. Pentru $x'=0$, $f'_2(z)=8/15$; pentru $x'=1/2$, $f'_2(z)=5/12\approx 0{,}42$; pentru $x'=1$, $f_2'(z)=2/15\approx 0{,}13$. Deci minimele în intervalele $0\leqslant x'\leqslant 1/2$ şi $1/2\leqslant x'\leqslant 1$ sînt atinse de $f_2'(z)$ în capetele de la dreapta ale acestor intervale. Rezultă: $m_s(2)\approx 0{,}42$ şi $m_d(2)\approx 0{,}13$. Valoarea β_2 este abscisa punctului de intersecţie al dreptelor: $y-0{,}13=0{,}29\,(x-1)$ şi $y-0{,}39=-0{,}26\,(x-1)$; $\beta_2=1{,}47$. Precizia acestei aproximări se măsoară cu $m_s(1{,}47)-m_d(1{,}47)=0{,}28-0{,}25=$ $=0{,}03$. Luînd în loc de β_0 aproximaţia găsită $\beta_2=1{,}47$, eroarea absolută va fi mai mare decît cea mai mică posibilă cu cel mult

$$100\cdot\frac{0{,}03}{0{,}25}\%=12\%.$$

În cazul acestui exemplu se poate calcula în mod direct valoarea precisă a lui β_0. Se găseşte: $\beta_0=\sqrt{2}\approx 1{,}41$ şi $\min\limits_{z_0\leqq z\leqq z_1} f'(z)=2{,}27$.

4. Pentru a obţine cea mai mică *eroare relativă*, notăm

$$\overline{m}_s(\beta)=\min_{z_0\leqq z\leqq \psi_\beta\left(\frac{1}{2}\right)} z f_\beta'(z)$$

$$\overline{m}_d(\beta)=\min_{\psi_\beta\left(\frac{1}{2}\right)\leqq z\leqq z_1} z f_\beta'(z)$$

şi se vede uşor că atît lemele cît şi teorema rămîn valabile, dacă înlocuim m_s, m_d, $\min f'(z)$ şi eroarea absolută cu $\overline{m}_s$, $\overline{m}_d$, $\min z f'(z)$, respectiv eroarea relativă.

Academia R.P.R. – Filiala Cluj,
Institutul de calcul

BIBLIOGRAFIE

1. M. V. Pentkovski, *Nomografia*. Moscova–Leningrad, 1949.
2. — *Nomograficeski metod otîskania nailucişeva preobrazovania priamolineinîh şkal.* D.A.N., t. LXVI (1949), pag. 339–342.

НАИЛУЧШЕЕ ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШКАЛ У НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК

(Краткое содержание)

Пусть $x=f(z)$ уравнение прямолинейной шкалы результата у номограммы из выравненных точек. Предполагается, что интервалу (z_0, z_1) изменения переменной z соответствует интервал $(0,1)$ оси x. Обозначая через h геометрическую погрешность точки пересечения шкалы результата с разрашающей прямой, получаем для абсолютной погрешности, соответственно для относительной погрешности результата:

$$|\Delta z|\approx\frac{h}{|f'(z)|}\quad \text{и}\quad \left|\frac{\Delta z}{z}\right|\approx\frac{h}{|z f'(z)|}.$$

Максимальное значение этих выражений, когда $z_0\leqq z\leqq z_1$, измеряет абсолютную, соответственную относительную, погрешность номограммы. Проективности оси x, сохраняющие отрезок $(0,1)$, пишутся

$$x'=\frac{(\mu+1)\,x}{\mu x+1},\ \mu>-1.$$

Уравнение преобразованной шкалы есть:

$$x'=\frac{(\mu+1)\,f(z)}{\mu f(z)+1}=f_\mu(z).$$

Ввиду получения шкалы с наименьшей возможной погрешностью, М. В. Пентковский определяет μ так, что бы $\min\limits_{z_0\leqq z\leqq z_1}|f_\mu'(z)|$ соответственно $\min\limits_{z_0\leqq z\leqq z_1}|z f_\mu'(z)|$ был наибольшим возможным. Общее решение было дыно Пентковским номографическим путем [2], и, в частных случаях, аналитическим путем [1].

В этой заметке устанавливается следующий результат: обзначим через z_2 значение z для которого $f_\mu(z)=\frac{1}{2}$

$$m_s(\mu)=\min_{z_0\leqq z\leqq z_2}|f_\mu'(z)|\qquad \text{и}\qquad m_d(\mu)=\min_{z_2\leqq z\leqq z_1}|f_\mu'(z)|.$$

Проблема минимумма, поставленная для абсолютной погрешности, допускает единственное решение а именно для значения μ для которого $m_s(\mu)=m_d(\mu)$. Поставленная задача для относительной погрешности имеет аналогичное решение. Дается метод для приближенного вычисления параметра наилучшего проективного преобразования.

LA MEILLEURE TRANSFORMATION PROJECTIVE DES ÉCHELLES DE NOMOGRAMMES À POINTS ALIGNÉS

(Résumé)

Soit $x=f(z)$ l'équation de l'échelle rectiligne du résultat dans le cas d'un nomogramme à points alignés. On suppose qu'à l'intervalle de variation (z_0, z_1) de la variable z correspond l'intervalle (0,1) de l'axe x. Notant par h l'erreur géométrique du point d'intersection de l'échelle du résultat avec la droite résolvante, on a pour l'eurreur absolu ou relative du résultat

$$|\Delta z| \approx \frac{h}{|f'(z)|} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \frac{h}{|zf'(z)|}.$$

Le maximum de ces expressions, quand $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$, mesure l'erreur absolue ou relative du nomogramme. Les projectivités de l'axe x qui gardent le segment $[0,1[$ s'écrivent:

$$x' = \frac{(\mu+1)\,x}{\mu x+1}, \quad \mu > -1.$$

L'équation de l'échelle transformée est

$$x' = \frac{(\mu+1)\,f(z)}{\mu f(z)+1} = f_\mu(z).$$

En vue d'obtenir une échelle avec la moindre erreur possible, M. V. Pentkovski détermine μ de manière à ce que

$$\min_{z_0 \leqq z \leqq z_1} |f'_\mu(z)| \quad \text{ou} \quad \min_{z_0 \leqq z \leqq z_1} |z f'_\mu(z)|$$

soit le plus grand possible. Il a donné la solution générale par voie nomographique [2], et dans des cas particuliers, par voie analytique [1].

Dans la présente note, on donne le résultat suivant: on note par z_2 la valeur z pour laquelle $f_\mu(z) = \frac{1}{2}$ et

$$m_s(\mu) = \min_{z_0 \leqq z \leqq z_1} |f'_\mu(z)| \quad \text{et} \quad m_d(\mu) = \min_{z_2 \leqq z \leqq z_1} |f'_\mu(z)|.$$

Le problème du minimum posé pour l'erreur absolue admet une seule solution, á savoir avec la valeur μ, pour laquelle $m_s(\mu) = m_d(\mu)$. Le problème posé pour l'erreur relative a une solution analogue.

On indique une méthode pour l'approximation du paramètre de la meilleure transformation projective.