DESPRE PROBLEMA PROGRAMĂRII LINIARE

DE

F. RADÓ

(Cluj)

Lucrare prezentată la Consfătuirea tehnico-științifică asupra mașinilor electronice de calcul din 13 — 15 ianuarie 1960, București

1. O serie de probleme practice, în special economice, conduc la următoarea problemă, numită „programare liniară'', a cărei formulare matematică se enunță astfel [1], [2], [3].

A. *Să se determine valorile reale* $x_1, x_2, \ldots, x_m$, *care satisfac condițiile*

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (1)$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \quad (2)$$

în așa fel ca forma liniară

$$F = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \quad (3)$$

să ia valoarea minimă, unde a_{ij}, b_i, c_j *sînt numere reale date.*

Se observă imediat că dacă în loc de minimizare se cere maximizarea formei liniare (3), atunci prin schimbarea semnelor coeficienților formei liniare, această problemă revine la problema **A**. La fel, dacă printre condițiile (1) figurează și inegalități de sens opus, acestea pot fi transfomate la forma (1) prin înmulțire cu -1. Alături de inegalitățile (1) pot figura și egalitățile de forma

$$\sum_{j=1}^{m} a_j x_j = d,$$

căci acestea se pot scrie

$$\sum_j a_j x_j \leqslant d,$$

$$\sum_j (-a_j)\, x_j \leqslant -d.$$

Dacă pentru unele necunoscute x_h nu se impune condiția (2), atunci înlocuim $x_h = x_h' - x_h''$, $x_h' \geqslant 0$, $x_h'' \geqslant 0$ și iarăși revenim la problema **A**.

Să cităm două din problemele economice cele mai cunoscute care conduc la problema **A**.

Problema sortimentelor complete. Într-o fabrică unde se produc l feluri de piese există k mașini. Mașina a μ-a poate produce în unitatea de timp $a_{\mu\nu}$ bucăți din piesa ν, ($a_{\mu\nu} \geqslant 0$), $\mu = 1, 2, \ldots, k$; $\nu = 1, 2, \ldots, l$. Piesele produse fiind necesare la asamblarea unei unități mai mari, ele trebuie confecționate în sortimente complete, un sortiment conținînd $s_1, s_2, \ldots, s_l$ bucăți din piesele respective. Cum trebuie repartizată fabricarea diferitelor piese la mașinile existente, în așa fel ca să se ajungă la un număr maxim de sortimente complete?

Această problemă figurează printre primele probleme de programare liniară, formulată și rezolvată de L. V. K a n t o r o v i c i încă în anul 1939 [2].

Notăm cu $x_{\mu\nu}$ timpul în care mașina μ lucrează la piesa ν. Atunci din piesa ν putem acoperi

$$F_\nu = \frac{1}{s_\nu} \sum_{\mu=1}^{k} a_{\mu\nu} x_{\mu\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l).$$

sortimente complete. Condiția de a fabrica sortimente complete, devine

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_l.$$

Mai avem

$$\sum_{\nu=1}^{l} x_{\mu\nu} = T \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k),$$

unde T este perioada de timp considerată. Trebuie să determinăm necunoscutele $x_{\mu\nu}$ astfel ca să verifice acest sistem de ecuații liniare, să avem $x_{\mu\nu} \geqslant 0$ și funcția liniară F_1 să fie maximă. Prin urmare această problemă revine la problema **A**.

Problema transporturilor. Un anumit produs care se găsește în k depozite, în cantitățile s_μ, ($\mu = 1, \ldots, k$), trebuie transportat în l locuri de distribuție cu capacitățile d_ν, ($\nu = 1, \ldots, l$). Fie $c_{\mu\nu}$ costul transportului pe unitatea de greutate de la depozitul μ la locul de distribuție ν. Ce cantități trebuie să transportăm de la fiecare depozit la fiecare loc de distribuție astfel încît costul total al transportului să fie minim? Se presupune $\sum s_\mu = \sum d_\nu$.

Notînd cu $x_{\mu\nu}$ cantitatea transportată de la depozitul μ la locul distribuției ν, avem pentru cele kl necunoscute următoarele condiții:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{\nu=1}^{l} x_{\mu\nu} = s_\mu, & (\mu = 1, \ldots, k) \\ \sum_{\mu=1}^{k} x_{\mu\nu} = d_\nu, & (\nu = 1, \ldots, l) \\ x_{\mu\nu} \geqslant 0, & (\mu = 1, \ldots, k;\ \nu = 1, \ldots, l) \end{array}\right\}$$

$$F = \sum_{\nu=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{k} c_{\mu\nu} x_{\mu\nu} = \text{minim},$$

deci am ajuns la un caz particular al problemei **A**.

În cadrul Institutului de calcul din Cluj al Academiei R.P.R., am rezolvat o **problemă de amestec** pusă de industria sticlei. La fabricarea sticlei se utilizează m materii prime, fiecare conținînd anumiți componenți, în total p. Se cunoaște că 1 kg din materia primă j conține după calcinare d_{ij} kg din componentul i. Ce cantități trebuie luate din materiile prime astfel ca să rezulte o sticlă de compoziție dată? Se admite o abatere de la această compoziție cu $\rho_i\%$ la fiecare component i, ($i = 1, 2, \ldots, p$).

Cantitățile de materii prime $x_1, x_2, \ldots, x_m$, care după calcinare dau 100 kg de sticlă avînd $f_1, f_2, \ldots, f_p$ kg din componenți, trebuie să satisfacă sistemul liniar

$$\sum_{j=1}^{m} d_{ij} x_j = f_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

și inegalitățile

$$x_j \geqslant 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

Notînd $e_j = \sum_{i=1}^{p} d_{ij} \leqslant 1$, din sistemul (4) rezultă

$$\sum_{j=1}^{m} e_j x_j = 100. \tag{6}$$

Chiar în cazul compatibilității sistemului (4) se poate întîmpla să nu existe soluții nenegative. Dar noi putem înlocui sistemul de ecuații (4) prin inegalitățile

$$f_i - \rho_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} d_{ij} x_j \leqslant f_i + \rho_i \tag{7}$$

și ecuația (6). În multe cazuri practice tocmai prin această slăbire a condițiilor devine problema posibilă.

Condițiile problemei pot fi scrise acum sub forma (1) și (2). Problema avînd în general o infinitate de soluții, este natural să căutăm pe cea mai economică. Notînd cu $c_1, c_2, \ldots, c_m$ unitățile de valoare ale materiilor prime, punem problema minimizării formei liniare (3) și astfel am ajuns la problema **A**. În multe cazuri prin soluția minimizantă se realizează o economie considerabilă față de o soluție luată la întîmplare (în particular cînd din același fel de materie primă există mai multe calități cu mici variații în compoziție și la unități de valoare diferite). În alte cazuri însă, toate soluțiile sînt apropiate; dacă putem prevedea acest lucru, atunci se poate pune $c_j = 1$, $(j = 1, \ldots, m)$.

În acest din urmă caz, algoritmul de rezolvare al programării liniare servește numai ca o metodă practică de a găsi o soluție oarecare a unui sistem de inegalități, sau de a decide dacă sistemul respectiv este sau nu compatibil. Chiar în acest scop merită să încadrăm problema de amestec în cadrul programării liniare, nemaivorbind de eventualele economii realizabile.

Trebuie atrasă atenția asupra importanței problemei de amestec, care poate să apară în orice ramură a industriei chimice și în metalurgie.

Pentru rezolvarea problemei propuse de industria sticlei, ,,metoda simplex duală'' [3] s-a dovedit a fi cea mai practică. Problema are particularitatea că toți coeficienții c_j în formă liniară [3] sînt nenegativi. Expunem mai jos metoda simplex duală cu o nouă justificare, directă, bazată tocmai pe această particularitate. Cazul general (c_j oarecare) revine la acest caz particular.

În cazul rezolvat de noi am avut $m = 7$, $n = 13$. Calculele necesare s-au efectuat cu o mașină de calcul de birou. La problemele de programare liniară cu mai multe necunoscute este nevoie de mașini rapide automate de calcul. Algoritmul descris mai jos se poate transforma ușor într-un program de mașină. Considerăm că avem aici o aplicație importantă a mașinii automate de calcul. Enunțăm alături de problema **A** următoarea problemă ,,duală'':

B. *Să se determine valorile $y_1, y_2, \ldots, y_n$, care satisfac condițiile*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \leqslant c_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{1'}$$

$$y_i \geqslant 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2'}$$

în așa fel ca forma liniară

$$G = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \tag{3'}$$

să ia valoarea maximă.

Amintim următoarea teoremă a dualității: dacă problema **A** are o soluție finită, atunci și problema **B** are o soluție finită și invers, iar

$$\min F = \max G.$$

Dacă una din cele două probleme are o soluție infinită, atunci sistemul de inegalități al celeilalte este incompatibil.

2. Să trecem la rezolvarea problemei **A** cu metoda amintită și să presupunem

$$c_j \geqslant 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Vom numi *soluție admisibilă* orice sistem de valori $x_1, x_2, \ldots, x_m$, care satisface inegalitățile:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 \geqslant 0, \\
\quad x_2 \geqslant 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad x_m \geqslant 0. \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1r} x_r + \ldots + a_{1m} x_m + b_1 \geqslant 0, \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2r} x_r + \ldots + a_{2m} x_m + b_2 \geqslant 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{kr} x_r + \ldots + a_{km} x_m + b_k \geqslant 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nr} x_r + \ldots + a_{nm} x_m + b_n \geqslant 0,
\end{array}\right\} \tag{8}$$

(am schimbat semnele termenilor liberi b_i). Trebuie să găsim soluția admisibilă pentru care

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_r x_r + \ldots + c_m x_m \tag{3''}$$

ia valoarea minimă. Să notăm cu A matricea cu $n + m + 1$ linii și $m + 1$ coloane, formată din toți coeficienții și termenii liberi ai formei liniare (3'') și ai sistemului (8).

Pentru orice soluție admisibilă avem $F \geqslant 0$, deci $\min F \geqslant 0$. Deosebim trei cazuri:

a) $b_1 \geqslant 0$, $b_2 \geqslant 0, \ldots, b_n \geqslant 0$; atunci $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ este o soluție admisibilă pentru care $F = 0$, deci $x_j = 0$, $(j = 1, \ldots, m)$, este o soluție minimizantă și $\min F = 0$.

b) Există cel puțin un b_i negativ; atunci notăm cu b_k unul (oarecare) din aceste numere negative. Dacă dintre coeficienții a_{kj} nici unul nu este pozitiv, sistemul (8) este incompatibil.

c) $b_k < 0$ și $a_{kj} > 0$ pentru anumiți j. Fie a_{kr} unul din ei (r va fi determinat mai tîrziu). Facem schimbarea de variabilă:

$$\left.\begin{array}{ll}
y_j = x_j, & (j \neq r), \\
y_r = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{km} x_m + b_k, &
\end{array}\right\} \tag{9}$$

sau

$$
\left.\begin{aligned}
x_j &= y_j, \qquad\qquad (j \neq r),\\
x_r &= -\frac{a_{k1}}{a_{kr}} y_1 - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} y_2 - \ldots - \frac{a_{kr-1}}{a_{kr}} y_{r-1} + \frac{1}{a_{kr}} y_r -\\
&\quad - \frac{a_{kr+1}}{a_{kr}} y_{r+1} - \ldots - \frac{a_{km}}{a_{kr}} y_m - \frac{b_k}{a_{kr}},
\end{aligned}\right\} \qquad (9')
$$

prin care sistemul (8) devine următorul sistem de inegalități (10):

$$
\begin{aligned}
&y_1 \geqslant 0,\\
&\quad y_2 \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\frac{a_{k1}}{a_{kr}} y_1 - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} y_2 - \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{a_{kr}} y_r - \ldots - \frac{a_{km}}{a_{kr}} y_m - \frac{b_k}{a_{kr}} \ldots\ldots \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad y_m \geqslant 0,\\
&\left(a_{11} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} a_{1r}\right) y_1 + \left(a_{12} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{1r}\right) y_2 + \ldots + \frac{a_{1r}}{a_{kr}} y_r + \ldots +\\
&\qquad + \left(a_{1m} - \frac{a_{km}}{a_{kr}} a_{1r}\right) y_m + b_1 - \frac{b_k}{a_{kr}} a_{1r} \geqslant 0,\\
&\left(a_{21} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} a_{2r}\right) y_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{2r}\right) y_2 + \ldots + \frac{a_{2r}}{a_{kr}} y_r + \ldots +\\
&\qquad + \left(a_{2m} - \frac{a_{km}}{a_{kr}} a_{2r}\right) y_m + b_2 - \frac{b_k}{a_{kr}} a_{2r} \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad y_r \geqslant 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left(a_{n1} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} a_{nr}\right) y_1 + \left(a_{n2} - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} a_{nr}\right) y_2 + \ldots + \frac{a_{nr}}{a_{kr}} y_r + \ldots +\\
&\qquad + \left(a_{nm} - \frac{a_{km}}{a_{kr}} a_{nr}\right) y_m + b_n - \frac{b_k}{a_{kr}} a_{nr} \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

iar forma liniară (3)

$$
\begin{aligned}
F = \left(c_1 - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} c_r\right) y_1 + \left(c_2 - \frac{a_{k2}}{a_{kr}} c_r\right) y_2 + \ldots +&\\
+ \frac{c_r}{a_{kr}} y_r + \ldots + \left(c_m - \frac{a_{km}}{a_{kr}} c_r\right) y_m - \frac{b_k c_r}{a_{kr}}.&
\end{aligned} \qquad (11)
$$

Sistemul de inegalități (10) are o formă analoagă cu (7), numai că rolul inegalităților de rang $1, 2, \ldots, r-1, r, r+1, \ldots, m$ este preluat de cele de rang $1, 2, \ldots, r-1, m+k, r+1, \ldots, m$. Matricea A' a sistemului transformat se obține din matricea A prin următorul procedeu de eliminare: împărțim elementele coloanei a r-a cu a_{kr}, la elementele celorlalte coloane j adunăm elementele coloanei r amplificate cu $-\frac{a_{kj}}{a_{kr}}$ $(j \leqslant m,\ j \neq r)$, iar la coloana $m+1$ se adună coloana r amplificată cu $-\frac{b_k}{a_{kr}}$.

Schimbînd între ele inegalitățile din liniile r și $m+k$, sistemul (10) se scrie

$$
\begin{aligned}
&y_j \geqslant 0, && (j = 1, 2, \ldots, m),\\
&\sum_{j=1}^{m} a'_{ij} y_j + b'_i \geqslant 0, && (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned} \qquad (10')
$$

Funcția liniară (11) se scrie

$$
F = \sum_{j=1}^{m} c'_j y_j + M'. \qquad (11')
$$

Pentru a avea o analogie completă cu sistemul inițial, căutăm să determinăm pe r în așa fel ca să avem $c'_j \geqslant 0$. Pentru aceasta observăm mai întîi că $c'_r = \frac{c_r}{a_{kr}}$ este nenegativ, iar $c'_j = c_j - \frac{a_{kj} c_r}{a_{kr}}$, $(j \neq r)$, este de asemenea în mod sigur nenegativ, dacă $a_{kj} \leqslant 0$. Deci trebuie să ne îngrijim numai de c'_j, pentru care $a_{kj} > 0$; dar el are semnul lui

$$
\frac{c_j}{a_{kj}} - \frac{c_r}{a_{kr}}.
$$

Prin urmare pentru a avea coeficienți negativi în (11′) formăm rapoartele

$$
\theta_{k,j} = \frac{c_j}{a_{kj}}
$$

pentru acei a_{kj} care sînt pozitivi și căutăm dintre ele pe cel mai mic; indicele respectiv se ia ca r, adică

$$
\theta_k = \min_{a_{kj} > 0} \theta_{k,j} = \theta_{k,r} = \frac{c_r}{a_{kr}} \geqslant 0. \qquad (12)
$$

Dacă $\min\limits_{a_{kj}>0} \theta_{kj}$ este atins la mai mulți j, luăm deocamdată pentru r pe oricare din ei, rămînînd să precizăm mai tîrziu alegerea lui r în acest caz.

Repetînd raționamentul aplicat sistemului inițial și formei liniare inițiale, deducem

$$\min F \geqslant M' = -\, b_k \cdot \frac{c_r}{a_{kr}} = (-\, b_k) \cdot \theta_k \geqslant 0,$$

și acest lucru este adevărat oricare ar fi fost alegerea lui k (din acei pentru care $b_k < 0$). Iarăși putem avea trei cazuri:

a) $b'_i \geqslant 0$, $(i = 1, \ldots, n)$; atunci $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$ furnizează o soluție minimizantă și $\min F = M' = -\, b_k \theta_k$.

b) Există cel puțin un k' pentru care $b'_{k'} < 0$ și în același timp $a'_{k'j} \leqslant 0$, $(j = 1, \ldots, m)$. Sistemul de inegalități este incompatibil.

c) Există cel puțin un k' și un r' astfel ca $b'_{k'} < 0$ și $a'_{k'r'} > 0$.

În cazurile a) și b) problema este rezolvată. În cazul c) se aplică sistemului (10) și funcției liniare (11) același procedeu pe care l-am aplicat lui (8) și (3).

La fiecare etapă introducem variabile noi pe care le vom numi *variabile actuale*. Primii membrii ai inegalităților și funcției liniare de minimizat sînt egali la orice etapă cu membrii întîi din (8) respectiv (3), numai că sînt exprimați în funcție de alte variabile. Pentru fixarea ideilor vom presupune că tot timpul să păstrează ordinea inițială a inegalităților (schimbarea de ordine cu ocazia trecerii de la (10) la (11) s-a considerat numai pentru un moment și de fapt nu se efectuează).

Vom demonstra că după un număr finit de etape procedeul se termină, ajungîndu-se cu necesitate la un caz a) sau b). Notăm marginile inferioare găsite la diferite etape pentru min F cu $0, M', M'', \ldots, M^{(\nu)}, \ldots$ Avem

$$0 \leqslant M' \leqslant M'' \leqslant \ldots \leqslant M^{(\nu)} \leqslant \ldots$$

Să presupunem mai întîi că acest șir este crescător

$$0 < M' < M'' < \ldots < M^{(\nu)} < \ldots$$

La etapa ν-a sistemul de inegalități se reduce în anumite m linii la cîte o variabilă actuală în membrul întîi. Notăm Σ_ν sistemul de ecuații format din aceste m linii prin schimbarea semnului $\geqslant$ în $=$ (coeficienții acestui sistem formează o matrice unitară). Luînd liniile de același rang din (8) se formează în mod analog un sistem de ecuații S_ν cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Din S_ν deducem prin schimbările de variabile succesive sistemul Σ_ν, deci și soluțiile lor se deduc una din alta pe această cale; în particular obținem că S_ν este compatibil și determinat. Prin înlocuirea soluției sistemului S_ν în (3) obținem pentru F tocmai valoarea pe care ne-o dă înlocuirea soluției $(0, 0, \ldots, 0)$ a sistemului Σ_ν în transformata

de la această etapă a formei liniare F, adică tocmai $M^{(\nu)}$. Dacă am putea continua indefinit procedeul nostru de calcul, atunci după cel mult $\binom{m+n}{m}$ etape ar trebui să revenim la un sistem S_ν întîlnit mai înainte; cum sistemul S_ν determină univoc pe M_ν, vedem că M_ν ar trebui să coincidă pentru doi indici diferiți, ceea ce este în contradicție cu ipoteza că șirul M_ν este crescător. Rezultă că procedeul nostru de calcul se termină după cel mult $\binom{m+n}{m}$ etape.

Să trecem acum la cazul general (M_ν poate stagna la anumite etape). Atunci se poate întîmpla că procedeul descris nu are sfîrșit, ceea ce este în legătură cu alegerea arbitrară a lui r (cînd $\min\limits_{a_{kj}>0} \theta_{k,j}$ este atins de mai mulți indici j). Fixăm acum pentru acest caz un mod de a alege univoc pe r. În acest scop considerăm forma liniară

$$\Phi = F + \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + \ldots + \varepsilon^m x_m, \tag{13}$$

unde $\varepsilon > 0$ se alege atît de mic încît puterile mai mari ale lui ε să fie neglijabile față de puteri mai mici. Aplicăm procedeul nostru de calcul sistemului de inegalități (8) și formei liniare (13). Șirul $M'_\varepsilon, M''_\varepsilon, \ldots, M^{(\nu)}_\varepsilon, \ldots$ al marginilor inferioare ale lui min Φ, calculate la etapele succesive, trebuie să fie iarăși necrescător. Dar o stagnare în acest șir atrage după sine că F și x_1 și $x_2, \ldots,$ și x_m stagnează, ceea ce e absurd căci în (9) (deci și în formulele analoge de la următoarele etape) există totdeauna un termen liber $b_k < 0$. Rezultă că numerele $M^{(\nu)}_\varepsilon$ formează un șir crescător și atunci, în baza celor demonstrate mai sus, procedeul nostru are sfîrșit.

Soluția minimizantă poate fi citită direct pe sistemul de inegalități de la ultima etapă. Ea este formată din valorile 0 pentru fiecare variabilă actuală. Valorile corespunzătoare pentru $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se obțin înlocuind în loc de variabile actuale 0 în primii membrii ai primelor m inegalități de la ultima etapă. Deci soluția $x_1, x_2, \ldots, x_m$ se găsește în matricea ultimului sistem în ultima coloană de la linia a doua pînă la linia a $(m+1)$-a.

Procedeul de calcul este aplicabil cu orice alegere a lui k astfel ca $b_k < 0$. Se pune însă problema alegerii lui k la etapele succesive în așa fel ca procedeul să se termine în cît mai puține etape. Deoarece nu se poate prevedea în mod simplu ce se va întîmpla la etapele următoare, se caută de a alege pe k în așa fel ca să se obțină o creștere maximă pentru $M^{(\nu)}$ la cîte o etapă. Situîndu-ne la etapa întîia, trebuie deci să determinăm pe k în așa fel ca $(-\, b_k)\ \theta_k$ să fie minim. Avînd în vedere că este greoi calculul lui θ_k pentru fiecare k cu $b_k < 0$, în [1] și [3] se preferă de a alege cel mai mare b_k și a lua indicele acestuia, iar experiența arată că atunci sînt necesare m pînă la 2 m etape.

Cu ocazia rezolvării problemei de amestec în cadrul Institutului de calcul din Cluj, am observat că merită să se calculeze cu o aproximație foarte brută pe θ_k și a lua dintre aproximațiile brute ale lui $(-b_k)\cdot\theta_k$ pe cea mai mare.

Pentru a rezolva problema **A** în cazul general (fără restricția $c_j \geqslant 0$), vom presupune că

$$\begin{aligned} c_j &< 0, \qquad && (j = 1, 2, \ldots, s), \\ c_j &\geqslant 0, && (j = s+1, s+2, \ldots, m). \end{aligned}$$

La condițiile (1) și (2) atașăm și condițiile

$$x_j \leqslant M, \qquad (j = 1, 2, \ldots, s); \tag{14}$$

problema **A** s-a transformat într-o altă problemă $\mathbf{A}_M$. Soluția problemei $\mathbf{A}_M$ pentru M tinzînd către infinit, coincide evident cu soluția problemei **A**. (Dacă pentru $M \to \infty$, valoarea lui F tinde către $-\infty$, atunci problema **A** are o soluție infinită, iar dacă problema $\mathbf{A}_M$ nu are soluție pentru M oricît de mare, atunci nici problema **A** nu are soluție). Deci putem înlocui problema **A** cu problema $\mathbf{A}_M$.

Prin schimbarea de variabilă

$$\left.\begin{aligned} u_j &= M - x_j, \qquad && (j = 1, 2, \ldots, s) \\ u_j &= x_j && (j = s+1, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

problema $\mathbf{A}_M$ devine

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{s} -a_{ij}u_j + \sum_{j=s+1}^{m} a_{ij}u_j \geqslant b_i - M\sum_{j=1}^{s} a_{ij}, && (i = 1, 2, \ldots, n) \\ &\qquad -u_j \geqslant -M, && (j = 1, 2, \ldots, s) \\ &\qquad u_j \geqslant 0, && (j = 1, 2, \ldots, m) \\ &\sum_{j=1}^{s} -c_j u_j + \sum_{j=s+1}^{m} c_j u_j = \text{minim}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

care este o problemă de tip **A** cu toți coeficienții formei liniare de minimizat nenegativi. Sistemului (16) îi putem aplica algoritmul nostru.

О ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

РЕЗЮМЕ

В работе приводится прямое доказательство для двойственного симплекс-метода решения задачи линейного программирования.

Линейное программирование применяется к решению задачи о смеси, встречающейся при производстве стекла.

SUR LE PROBLÈME DU PROGRAMME LINÉAIRE

RÉSUMÉ

L'auteur donne, dans le présent travail, une démonstration directe de la méthode simplex duale pour résoudre le problème du programme linéaire.

Il applique le programme linéaire à la solution d'un problème de mélange, intervenant dans la fabrication du verre.

BIBLIOGRAFIE

1. EISEMANN K., *Linear Programming*. Quaterly of Applied Math., **13**, 209–232 (1955).
2. КАНТАРОВИЧ Л. В., *Экономический расчет наилучшего использования ресурсов*. Москва, 1959.
3. VAJDA S., *Theory of Games and Linear Programming*. London, 1956.

Primit la 9.XII. 1959.