DESPRE STABILITATEA MIȘCĂRII GIROSCOPULUI SIMETRIC GREU CU PUNCT DE SPRIJIN OSCILANT ÎN JURUL VERTICALEI

DE

AUREL TURCU
(Cluj)

Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a universității „Babeș-Bolyai", Cluj, din 14—16 decembrie 1956

Se cercetează problema de stabilitate a unei soluții particulare a ecuațiilor diferențiale ale mișcării de rotație în jurul verticalei axei giroscopului greu simetric, sub influența forțelor perturbatoare periodice.

În lucrare se consideră mișcarea giroscopului greu simetric cu punctul de sprijin oscilant. Forțele perturbatoare periodice apar în acest caz datorită oscilațiilor punctului de sprijin al axei giroscopului.

Influența forțelor perturbatoare periodice asupra mișcării giroscopului greu simetric, prezintă un mare interes, datorită aplicațiilor tehnice numeroase ale aparatelor giroscopice.

Giroscopul simetric greu se folosește fie în calitate de aparat arătător or măsurător, fie ca aparat regulator etc. El este un dispozitiv destinat pentru arătarea, de exemplu, a verticalei adevărate sau a direcției nordului, or pentru păstrarea unei direcții date, de exemplu pentru păstrarea cursului dat al unui avion sau vapor ; pentru a arăta variația vitezei de curs sau a vitezei unghiulare a vaporului sau avionului și, în sfîrșit, pentru comanda (dirijarea) unuia sau mai multor motoare, ajutătoare, destinate asigurării stabilității avionului sau cursului vaporului.

Giroscopul este deci partea cea mai importantă a dispozitivelor de răspundere care se folosesc în aviație și marină, și de aceea e necesar un calcul exact al mișcării sale. În consecință nu este permis a neglija influența forțelor perturbatoare, care pot să apară în timpul lucrului său.

§ 1. Deducția ecuațiilor diferențiale ale mișcării în jurul verticalei a giroscopului greu simetric, cu punct de sprijin oscilant

Să considerăm un giroscop simetric greu (fig. 1), care se sprijină în punctul O.

Fie forța greutății giroscopului $\vec{p} = m\vec{g}$ aplicată în punctul G la distanța OG de la punctul de sprijin O.

Să presupunem că punctul de sprijin O împreună cu triedrul ξ, η, ζ oscilează după legea:

$$u = \mu \cos \omega t, \qquad (1.1)$$

unde amplitudinea μ o considerăm pozitivă și suficient de mică; ω — pulsația oscilațiilor, u — deplasarea lui O față de O'.

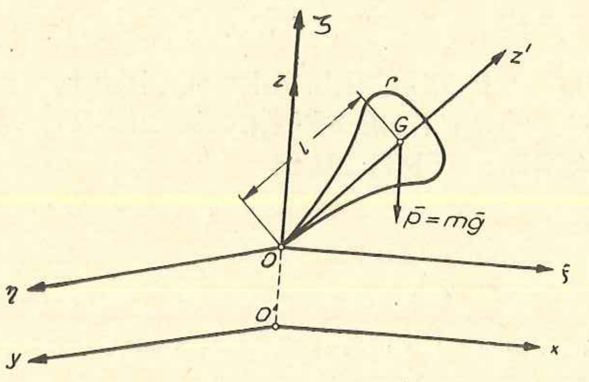

Fig. 1

Dacă $\vec{W}_a$ este accelerația absolută, atunci după legea lui Newton în sistemul de reper al lui Galileu $O'xyz$, avem:

$$m\vec{W}_a = \vec{p}. \qquad (1.2)$$

Avînd în vedere însă că:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_k$$

în sistemul mobil $O\xi\eta\zeta$, ecuația (1.2) se poate transcrie în felul următor:

$$m\vec{W}_r = \vec{p} - m\vec{W}_e - m\vec{W}_k. \qquad (1.3)$$

Deoarece sistemul nostru are numai o oscilație după legea (1.1), atunci forța de inerție a lui Koriolis

$$-m\vec{W}_k = 0$$

iar forța de inerție de antrenare (de transport)

$$\vec{I} = -m\vec{W}_e = +\mu m \omega^2 \cos \omega t\, \vec{i}, \qquad (1.4)$$

unde $\vec{i}$ e versorul axei $O'z$.

Atunci ecuația (1.3) capătă forma:

$$m\vec{W} = \vec{p} + \vec{I} = \vec{P}. \qquad (1.5)$$

Dacă în vectorul rezultant al forțelor exterioare includem și forța de inerție, putem în continuare să considerăm axele ξ, η, ζ nemișcate împreună cu punctul O și, în consecință, să deducem ecuațiile diferențiale ale mișcării giroscopului cu ajutorul ecuațiilor obișnuite ale lui Euler în aceste axe.

Fie N, K, Z' sistemul mobil de axe, unde N — linia nodurilor, Z' — axa de simetrie a giroscopului iar K o oarecare axă perpendiculară pe planul NZ', care se află în planul $\zeta Z'$.

Poziția giroscopului nostru, în orice moment, se determină în sistemul ξ, η, ζ cu ajutorul unghiurilor lui Euler: θ, ψ, φ (fig. 2), unde:

θ — unghiul de nutație între axele Z' și ζ.

ψ — unghiul de precesie (azimutul planului $\zeta Z'$ în jurul axei ζ),

φ — azimutul giroscopului în jurul axei proprii Z'

(x', y', z' — axe mobile).

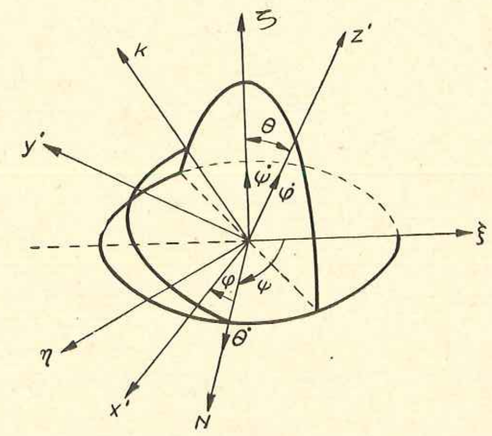

Fig. 2

Unghiurile θ, ψ, φ le considerăm pozitive, cînd sînt socotite de la axele ζ, ξ, N după mișcarea acelor de ceasornic pentru un observator, care privește respectiv din direcțiile pozitive ale axelor N, ζ și Z'.

Ecuațiile diferențiale pentru unghiurile lui Euler se obțin din ecuațiile generalizate ale lui Euler [3].

$$\begin{aligned} &\frac{d\tau_N}{dt} + q_1 \tau_{Z'} - r_1 \tau_K = M_N; \\ &\frac{d\tau_K}{dt} + r_1 \tau_N - p_1 \tau_{Z'} = M_K; \\ &\frac{d\tau_{Z'}}{dt} + p_1 \tau_K - q_1 \tau_N = M_{Z'}, \end{aligned} \qquad (1.6)$$

unde p_1, q_1, r_1 sînt proiecțiile vitezei unghiulare ale triedrului axelor mobile N, K, Z'; pe aceleași axe, τ_N, τ_K, $\tau_{Z'}$ sînt proiecțiile momentului cinetic al giroscopului pe axele N, K, Z'; M_N, M_K, $M_{Z'}$ sînt proiecțiile momentului tuturor forțelor exterioare și al forțelor de inerție (1.4) pe aceleași axe.

Proiectînd vitezele unghiulare $\dot\psi$, $\dot\theta$ şi $\dot\varphi$ (îndreptate respectiv pe axele ζ, N, Z') pe axele N, K, Z', obţinem

$$\begin{aligned} p &= \dot\theta, & p_1 &= \dot\theta, \\ q &= \dot\psi \sin\theta & q_1 &= \dot\psi \sin\theta, \\ r &= \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta, & r_1 &= \dot\psi\cos\theta, \end{aligned} \tag{1.7}$$

(p, q, r sînt proiecţiile vitezei unghiulare a giroscopului pe N, K, Z').

De aici, pentru momentele cinetice ale giroscopului faţă de axele N, K, Z' primim expresiile :

$$\begin{aligned} \tau_N &= J'\,\dot\theta, \\ \tau_K &= J'\,\dot\psi \sin\theta, \\ \tau_{Z'} &= J\,(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi), \end{aligned} \tag{1.8}$$

unde J' e momentul ecuatorial de inerţie iar J, momentul polar de inerţie.

Observăm mai departe că :

$$\begin{aligned} M_K &= 0, \\ M_{Z'} &= 0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

deoarece forţa care acţionează P intersectează axele K şi Z' ;

$$M_N = ml\,(g - \mu\omega^2 \cos\,\omega t)\sin\theta. \tag{1.10}$$

Înlocuind expresiile din (1.7), (1.8), (1.9) şi (1.10) în (1.6), obţinem pentru unghiurile lui Euler următoarele ecuaţii diferenţiale :

$$\begin{aligned} &\ddot\varphi + \ddot\psi\cos\theta - \dot\psi\,\dot\theta\sin\theta = 0, \\ &J'\,\ddot\psi\sin\theta - J\dot\varphi\,\dot\theta - (J - 2J')\,\dot\psi\,\dot\theta\cos\theta = 0, \\ &J'\,\ddot\theta + J\,\dot\varphi\,\dot\psi\sin\theta + (J - J')\,\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta = \\ &= ml\,(g - \mu\omega^2\cos\omega t)\sin\theta. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Toate aceste ecuaţii sînt ecuaţii neliniare de ordinul doi.

După prima integrare a primelor două ecuaţii (1.11), obţinem :

$$\begin{aligned} &\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi = C_1 = \dot\psi_0\cos\theta_0 + \dot\varphi_0, \\ &J'\,\dot\psi\sin^2\theta + JC_1\cos\theta = C_2 = J\,\dot\varphi_0\cos\theta_0 + \\ &+ \dot\psi_0\,(J\cos^2\theta_0 - J'\sin^2\theta_0), \end{aligned} \tag{1.12}$$

unde C_1 şi C_2 sînt nişte constante de integrare.

După cum se ştie, constantele C_1 şi C_2 au o reprezentare simplă, evidentă : JC_1 este proiecţia momentului cinetic pe axa Z', C_2 este proiecţia momentului cinetic pe axa ζ.

Să exprimăm din ecuaţiile (1.12) pe $\dot\varphi$ şi $\dot\psi$ prin C_1 şi C_2.

$$\begin{aligned} \dot\varphi &= \frac{C_1(J\cos^2\theta + J'\sin^2\theta) - C_2\cos\theta}{J'\sin^2\theta}, \\ \dot\psi &= \frac{C_2 - JC_1\cos\theta}{J'\sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Înlocuind pe $\dot\varphi$ şi $\dot\psi$, exprimate în acest fel (1.13) în ecuaţia a treia din (1.11), obţinem pentru unghiul de nutaţie θ următoarea ecuaţie diferenţială :

$$J\,\ddot\theta + F(\theta) = ml\,(g - \mu\omega^2\cos\,\omega t)\sin\theta, \tag{1.14}$$

unde

$$F(\theta) = \frac{JC_1}{J'}\,\frac{C_2 - JC_1\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{J'}\,\frac{(C_2 - JC_1\cos\theta)^2\cos\theta}{\sin^3\theta}. \tag{1.15}$$

Să considerăm mişcarea axei giroscopului în vecinătatea verticalei. În acest caz, după cum nu este greu de arătat, ecuaţia unghiului de nutaţie (1.14), după descompunerea funcţiei $F(\theta)$ şi $\sin\theta$ în serie după θ, ia forma [8] :

$$\ddot\theta = \frac{A}{\theta^3} + (B + \mu C\cos\omega t)\,\theta + (D + \mu E\cos\omega t)\,\theta^3 + \ldots, \tag{1.16}$$

unde :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{J'^2}(C_2 - JC_1)^2, \\ B &= \frac{mgl}{J'} - \frac{1}{J'^2}\left(\frac{1}{15}C_2^2 + \frac{7}{60}JC_1C_2 + \frac{1}{15}C_1^2J^2\right), \\ C &= -\frac{m\omega^2 l}{J'}, \\ D &= -\frac{mgl}{6J'} - \frac{1}{J'^2}\left(\frac{4}{189}C_2^2 + \frac{31}{756}JC_1C_2 + \frac{4}{189}J^2C_1^2\right), \\ E &= \frac{m\omega^2 l}{6J'}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Ecuaţia (1.16) admite soluţia particulară $\theta = 0$; $\dot\theta = 0$, cu condiţia ca $A = 0$, adică atunci cînd constantele arbitrare C_1 şi C_2 satisfac relaţia

$$C_2 = JC_1. \tag{1.18}$$

În acest caz ecuația (1.16) ia forma :

$$\ddot{\theta} = (B + \mu C \cos \omega t)\ \theta + (D + \mu E \cos \omega t)\ \theta^3 + \ldots \tag{1.19}$$

unde B, C, D și E se determină cu ajutorul egalităților (1.17), unde facem $C_2 = JC_1$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{m\,g\,l}{J'} - \frac{C_2^2}{4\,J'^2}, & D &= \frac{m\,g\,l}{6\,J'} - \frac{63}{756}\,\frac{C_2^2}{J'^2}, \\ C &= \frac{m\,\omega^2\,l}{J'}, & E &= \frac{m\,\omega^2\,l}{6\,J'}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Este evident că ecuația (1.19) este ecuația mișcării perturbate pentru soluția $\theta = 0$ și $\dot{\theta} = 0$.

§ 2. Problema stabilității soluțiilor ecuației diferențiale (1.19)

Să cercetăm acum problema stabilității soluției particulare :

$$\theta = 0\,; \quad \dot{\theta} = 0 \tag{2.1}$$

a ecuației diferențiale (1.19) și să arătăm că, în general vorbind, această soluție este instabilă.

Pentru $\mu = 0$, adică în cazul lipsei unei forțe periodice perturbante, ecuația (1.19) ia forma

$$\ddot{\theta} = B\theta + D\theta^3 + \ldots \tag{2.2}$$

Această ecuație, după cum se știe, descrie mișcarea unui giroscop greu simetric în jurul verticalei (sau mișcarea „giroscopului dormitand").

Evident că ecuația (2.2) are ca soluție, soluția particulară :

$$\theta = 0\,; \quad \dot{\theta} = 0. \tag{2.3}$$

Observăm de asemenea că ecuația difrențială a mișcării perturbate corespunzătoare acesti soluții, coincide cu ecuația (2.2).

Pentru ecuația difrențială (2.2) primim următoarele rădăcini ale ecuației caracteristice :

$$\rho_i = \pm \sqrt{B}. \tag{2.4}$$

Evident că pentru $B > 0$ avem instabilitate, deoarece pe baza teoremei lui L i a p u n o v [1], dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice a sistemului primei aproximații există cel puțin o rădăcină cu partea reală pozitivă, atunci mișcarea neperturbată este instabilă pentru orice alegere a termenului de ordin superior lui unu în ecuația diferențială a mișcării perturbate (2.2).

De aceea, pentru ca soluția să fie stabilă, e necesar ca :

$$B < 0. \tag{2.5}$$

Pe baza formulelor (1.20), condiția (2.5) ia forma

$$-\,m\,g\,l + \frac{C_2^2}{4\,J'^2} > 0. \tag{2.6}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} C_2 &\approx J\ (\dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0) - \left[\frac{J}{2}\,\dot{\varphi}_0 + (J - J')\ \dot{\psi}_0\right]\theta_0^2, \\ C_1 &\approx (\dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0^2) - \frac{\dot{\psi}_0}{2}\,\theta_0^2\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

atunci condiția (2.6), prin considerarea relațiilor (1.18), se poate scrie cu o exactitate suficient de mare astfel :

$$\dot{\varphi}_0 > \frac{2}{J}\sqrt{J'\,mgl}\,. \tag{2.6'}$$

S-a demonstrat [4] că giroscopul simetric dormitand este stabil dacă viteza sa unghiulară satisface inegalitatea (2.6'). În acest caz valoarea minimă, pe care trebuie s-o aibă impulsul de rotație $J\dot{\varphi}$ al giroscopului dormitand stabil, se definește prin formula

$$J\,\dot{\varphi}_0 = 2\sqrt{J'\,m\,g\,l}.$$

Această valoare este cu atît mai mare, cu cît este mai mare momentul ecuatorial de inerție al giroscopului J' și momentul de sprijin mgl.

Astfel, s-a arătat [4], [5] că condițiile (2.6) și (2.6') sînt nu numai necesare dar și suficiente pentru stabilitatea soluției considerate (2.3). În particular, acest lucru l-a arătat N. G. C e t a e v [2] cu ajutorul funcției lui Liapunov.

Vom arăta că condițiile stabilității (2.6) și (2.6') devin insuficiente în prezența forței periodice perturbante. Cu alte cuvinte, vom arăta că o dată cu apariția forței perturbante

$$\mu C \cos \omega t$$

în (1.19), deși condiția stabilității (2.6) sau (2.6') se îndeplinește, totuși soluția $\theta = 0$ și $\dot{\theta} = 0$ a ecuației (1.19), în general vorbind, este instabilă.

Într-adevăr, în prezența forței perturbante prima aproximație a ecuației (1.19) se transformă în ecuația Mathieu :

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau) = 0, \tag{2.8}$$

unde

$$\delta = \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{C_2^2}{4\,J'^2} - \frac{m\,g\,l}{J'}\right];\ \varepsilon = \frac{\mu\, m\, l}{J'};\ \tau = \omega t. \tag{2.9}$$

Observație. Dacă $\delta < 0$ pentru ε suficient de mici (tocmai cazul pe care-l studiem deoarece, în expresia pentru ε (2.9), μ e un parametru mic), pentru ecuația (2.8) are loc întotdeauna instabilitatea (1).

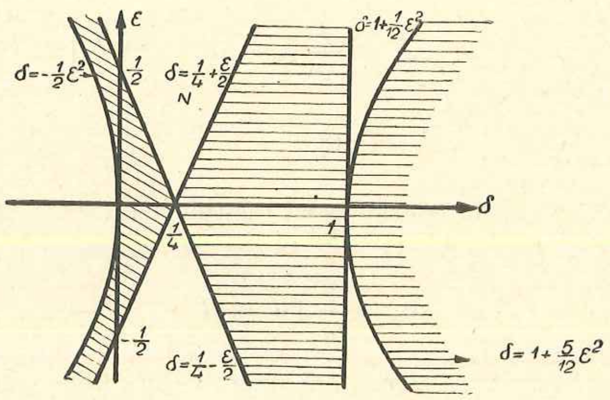

Fig. 3

Problema stabilității soluției ecuației Mathieu (2.8) a fost amănunțit studiată [6, 7]. S-a arătat că pentru toate punctele (δ, ε) din domeniul hașurat (cu excepția frontierelor arătate în fig. 3), soluțiile ecuației Mathieu pentru valorile mici ale lui ε sînt stabile; pentru punctele în afara acestui domeniu soluțiile sînt instabile.

Pe baza acestei constatări, noi putem totdeauna să alegem condițiile inițiale (adică pe C_2 sau, mai exact, pe $\dot\varphi_0$, care intră în C_2), astfel încît δ să fie pozitiv și astfel ca pentru ε corespunzător, punctul să se găsească în domeniul de instabilitate N.

De aici conchidem că condiția (2.6) sau (2.6′) e îndeplinită, deoarece:

$$\delta = \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{C_2^2}{4\,J'^2} - \frac{m\,g\,l}{J'}\right] > 0,$$

dar cu toate acestea soluția este instabilă.

Soluția $\theta = 0$, $\dot\theta = 0$ a ecuației diferențiale (1.19) este instabilă, deoarece e cunoscut că în domeniile de instabilitate valoarea modulului unei rădăcini a ecuației caracteristice este mai mare decît unu și atunci este valabilă următoarea teoremă a lui Liapunov despre instabilitatea în raport cu prima aproximație:

Dacă printre rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare ecuației variațiilor (în cazul nostru: (2.8)) pentru mișcarea periodică studiată (în cazul nostru: $\theta = 0$ și $\dot\theta = 0$), avem cel puțin o rădăcină în modul mai mare decît unu, atunci această mișcare este instabilă, oricare ar fi termenii de ordin superior în ecuațiile mișcării perturbate (1.19).

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО СИММЕТРИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА С КОЛЕБАЮЩЕЙСЯ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА, ВОКРУГ ВЕРТИКАЛИ

РЕЗЮМЕ

Целью этой работы является исследование вопроса об устойчивости одного частного решения дифференциального уравнения вращения вблизи вертикали оси симметрического тяжелого гироскопа под влиянием периодических возмущающих сил. Рассматривается движение симметрического тяжелого гироскопа с колеблющейся точкой подвеса. Периодические возмущающие силы появляются в этом случае именно за счет колебаний точки подвеса оси гироскопа.

В работе показано, что с появлением небольшой периодической возмущающей силы движения тяжелого симметрического гироскопа вблизи вертикали (решение $\theta = 0$, $\dot\theta = 0$), которое до этого при некоторых условиях было устойчиво, становится неустойчивым, хотя прежние условия устойчивости выполняются.

SUR LA STABILITÉ DU MOUVEMENT DU GYROSCOPE SYMÉTRIQUE LOURD À POINT D'APPUI OSCILLANT AUTOUR DE LA VERTICALE

RÉSUMÉ

On étudie le problème de la stabilité d'une solution des équations différentielles du mouvement de rotation autour de la verticale de l'axe d'un *gyroscope lourd symétrique*, sous l'influence des forces perturbantes périodiques. On étudie le mouvement d'un gyroscope lourd appuyé sur un point qui oscille. Les forces perturbantes périodiques apparaissent dans ce cas à cause des oscillations du point d'appui de l'axe du gyroscope.

Dans le travail, on montre qu'à l'apparition d'une petite force perturbante périodique dans le mouvement du gyroscope lourd symétrique autour de la verticale, la solution $\theta = 0$, $\dot\theta = 0$, qui jusque-là, dans certaines conditions, était stable, devient instable, quoique les conditions de stabilité ci-dessus soient remplies.

BIBLIOGRAFIE

1. МАЛКИН И. Г., *Теория устойчивости движения*. Москва-Ленинград, 1952.
2. ЧЕТАЕВ Н. Г., *Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа*. Приклад. мат. и мех., **18**, 1 (1954).
3. НИКОЛАИ Е. Л., *Теория гироскопов*. ОГИЗ, 1948.
4. ГРАМЕЛЬ Р., *Гироскоп, его теория и применение*. Том I, II (перевод с немецкого), Москва, 1952.
5. КАРМАН Т., БИО М., *Математические методы в инженерном деле* (перевод с английского). ОГИЗ, 1946.
6. МАК МИХЛАН Н. В., *Теория и приложения функций Матье* (перевод с английского). Москва, 1953.
7. СТОКЕР Дж., *Нелинейные колебания в механических и электрических системах* (перевод с английского). Москва, 1953.
8. BRAUNBEK W., *Der symmetrische Kreisel mit zeitlich periodischem Richtmoment*. Zeitschr. für ang. Math. und Mech., **XXXIII**, 5, p. 165–220 (1953).