O PROPRIETATE A POLINOAMELOR LUI S. N. BERNSTEIN*)

DE

O. ARAMĂ şi D. RIPIANU

(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8–13 decembrie 1960, Cluj

Se ştie [1–3] că dacă o funcţie $f(x)$ este neconcavă de ordinul 1 în intervalul [0, 1], adică dacă orice diferenţă divizată de ordinul doi a ei este negativă în intervalul [0, 1], atunci şirul polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein corespunzătoare acestei funcţii şi intervalului [0, 1] este necrescător, oricare ar fi, $x \in [0, 1]$. De asemenea se ştie [1, 2] că o proprietate asemănătoare are loc şi pentru şirul derivatelor de ordinul întîi ale polinoamelor lui S. N. Bernstein, în ipoteza că funcţia $f(x)$ este neconcavă de ordinul 1 şi de ordinul 2.

În legătură cu aceste rezultate, prof. Tiberiu Popoviciu a ridicat problema studierii proprietăţilor de monotonie de ordin superior a şirului polinoamelor lui S. N. Bernstein, adică problema studierii semnului diferenţelor de diferite ordine, considerate pe termenii unui astfel de şir.

Ocupîndu-ne de această problemă, am reuşit să demonstrăm următoarea

TEOREMĂ. *Dacă funcţia $f(x)$ este analitică în intervalul* [0, 1] *şi are în acest interval toate derivatele de ordin $\geqq 2$ nenegative, atunci are loc inegalitatea*

$$\Delta_2 B_n(x; f) = B_{n+2}(x; f) - 2B_{n+1}(x; f) + B_n(x; f) \geqq 0,$$

valabilă pentru orice $x \in [0, 1]$ *şi pentru orice număr natural* n.

Aici $B_n(x; f)$ reprezintă polinomul de interpoare al lui S. N. Bernstein de gradul n, referitor la funcţia $f(x)$ şi la intervalul [0, 1], adică

$$B_n(x; f) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

*) Această lucrare se publică şi în limba franceză în revista „Mathematica", vol. 3 (26), 1961.

Dacă se înseamnă cu $\Delta_1 B_n(x;f) = B_{n+1}(x;f) - B_n(x;f)$ diferenţele de ordinul 1 luate pe şirul polinoamelor lui S. N. Bernstein $B_n(x;f)$, $n = 1, 2, \ldots$, care, după cum s-a amintit anterior, sînt (in ipotezele teoremei) nepozitive în intervalul $[0, 1]$, teorema afirmă că

$$\Delta_1 B_1(x;f) \leqq \Delta_1 B_2(x,f) \leqq \ldots \leqq \Delta_1 B_n(x;f) \leqq \ldots \leqq 0; \; x \in [0, 1].$$

Evid nt că întrucît $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(x;f) = f(x)$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_1 B_n(x;f) = 0$. Teorema enunţată aduce însă precizarea că şirul $\Delta_1 B_n(x;f)$, $n = 1, 2, \ldots$, tinde *monoton* către zero cînd $n \to \infty$, pentru orice x din intervalul $[0, 1]$.

Demonstraţie. În ipotezele teoremei, funcţia $f(x)$ admite în vecinătatea originii o reprezentare de forma

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^k}{k!} f^k(0) + \ldots \tag{1}$$

cu toţi coeficienţii $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ nenegativi.

Se cunoaşte însă următoarea proprietate:

Dacă o serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ cu raza de convergenţă R $(0 < R < \infty)$ are toţi coeficienţii săi reali şi nenegativi, punctul $z = R$ este un punct singular pentru funcţia $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

De aici rezultă că în ipotezele teoremei în cauză, raza de convergenţă a seriei (1) este mai mare ca 1. Pe de altă parte, $\Delta_2 B_n(x;\varphi)$ este un operator definit pe spaţiul $C[0, 1]$, luînd valori în acelaşi spaţiu. Se observă cu uşurinţă că acest operator este liniar, adică aditiv, omogen şi continuu referitor la norma $\|\varphi\| = \max\limits_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$.

Ţinînd seamă de aceste observaţii, rezultă pentru funcţia $f(x)$ care îndeplineşte condiţiile teoremei, egalitatea

$$\Delta_2 B_n(x;f) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot \Delta_2 B_n(x; x^k), \tag{2}$$

seria $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ fiind uniform convergentă în intervalul $[0, 1]$.

Pentru a demonstra teorema în cauză, va fi suficient să arătăm că fiecare termen al seriei (2) este negativ, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Vom demonstra următoarea

TEOREMA (*). *Oricare ar fi numărul natural* $k \geqq 2$, *are loc inegalitatea*

$$\Delta_2 B_n(x; x^k) > 0$$

valabilă pentru orice $x \in (0, 1)$.

Demonstraţia teoremei se bazează pe următoarea identitate care aparţine prof. T. Popoviciu:

$$B_{n+1}(x;f) - B_n(x;f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)}[f]\, x^i (1-x)^{n-i+1}, \tag{3}$$

unde

$$\lambda_i^{(n)}[f] = -\frac{1}{n(n+1)} C_{n-1}^{i-1} \cdot \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}; f\right], \tag{4}$$

iar $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n+1}, \frac{i}{n}; f\right]$ reprezintă diferenţa divizată de ordinul doi a funcţiei $f(x)$ pe nodurile

$$x_1 = \frac{i-1}{n}, \quad x_2 = \frac{i}{n+1}, \quad x_3 = \frac{i}{n}. \tag{5}$$

Se deduce din (3) identitatea

$$\Delta_2 B_n(x;f) = B_{n+2}(x;f) - 2B_{n+1}(x;f) + B_n(x;f) =$$

$$= B_{n+2}(x;f) - B_{n+1}(x;f) - [x + (1-x)][B_{n+1}(x;f) - B_n(x,f)] =$$

$$= x(1-x) \cdot \sum_{i=0}^{n} \delta_i^{(n)}[f]\, x^i (1-x)^{n-i}, \tag{6}$$

unde

$$\delta_i^{(n)}[f] = \lambda_{i+1}^{(n+1)}[f] - \lambda_{i+1}^{(n)}[f] - \lambda_i^{(n)}[f] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\lambda_0^{(n)}[f] = \lambda_{n+1}^{(n)}[f] = 0. \tag{7}$$

Cu ajutorul relaţiei

$$[x_1, x_2, x_3; x^k] = \frac{x_1^k}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{x_2^k}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} + \frac{x_3^k}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} =$$
$$= \sum x_1^p x_2^q x_3^r, \tag{8}$$

suma de mai sus fiind extinsă la toate grupele de numere întregi nenegative p, q, r, care satisfac relaţia $p+q+r = k-2$ (k întreg $\geqq 2$), se deduce din (4) şi (7) că

$$\delta_i^{(n)}[x^k] = \frac{C_n^i}{n+1} \cdot \sum G_{p,q,r}(i), \tag{9}$$

unde

$$G_{p,q,r}(i) = \frac{i}{n^2}\left(\frac{i-1}{n}\right)^p \left(\frac{i}{n+1}\right)^q \left(\frac{i}{n}\right)^r +$$
$$+ \frac{n-i}{n^2}\left(\frac{i}{n}\right)^p \left(\frac{i+1}{n+1}\right)^q \left(\frac{i+1}{n}\right)^r - \frac{1}{n+2}\left(\frac{i}{n+1}\right)^p \left(\frac{i+1}{n+2}\right)^q \left(\frac{i+1}{n+1}\right)^r, \tag{10}$$

însumarea în relația (9) făcîndu-se pentru aceleași valori ale indicilor p, q, r, ca în relația (8).

Pentru a demonstra trorema, va fi deci suficient să arătăm că în cazul $f(x) \equiv x^k$, coeficienții $\delta_i^{(n)}[x^k]$ din (6) sînt toți pozitivi. În acest scop, ne vom servi de următoarea

Lemă. *Are loc relația*

$$G_{p,q,r}(i) \geqq 0 \tag{11}$$

pentru orice $n = 1, 2, \ldots,$ $p = 0, 1, \ldots;$ $q = 0, 1, \ldots;$ $r = 0, 1, \ldots;$ $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *egalitatea fiind realizată în singurul caz* $i = 0$, $p > 0$.

Demonstrație. Pentru $i = 0$, relația (11) se reduce la indentitate $0 = 0$ pentru $p > 0$ și la inegalitatea evidentă $\frac{1}{n(n+1)^q n^r} > \frac{1}{(n+2)(n+2)^q (n+1)^r}$ pentru $p = 0$.

Pentru $n = 2$, $i = 1$, relația devine $\frac{1}{2^r 3^q} + \frac{1}{2^q}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^q - \left(\frac{2}{3}\right)^r\right] > 0$ pentru $p = 0$ și $\left(\frac{3}{2}\right)^p \left(\frac{4}{3}\right)^q - \left(\frac{2}{3}\right)^r > 0$ pentru $p \geqq 1$, ambele inegalități fiind evidente în condițiile lemei.

Se va presupune deci în cele ce urmează, $i \geqq 1$ și $n \geqq 3$.

Se deduce atunci din (10) relația

$$H_{p,q,r}(i) = (n+2)\left(\frac{n+1}{i}\right)^p \left(\frac{n+2}{i+1}\right)^q \left(\frac{n+1}{i+1}\right)^r G_{p,q,r}(i) =$$

$$= \frac{n+2}{n^2}\left[i\, e_1^p\, e_2^q\, e_3^r + (n-i)e_4^{p+r} e_5^q\right] - 1, \tag{12}$$

unde

$$e_1 = \frac{n+1}{n}\frac{i-1}{i},\ e_2 = \frac{n+2}{n+1}\frac{i}{i+1},\ e_3 = \frac{n+1}{n}\frac{i}{i+1},\ e_4 = \frac{n+1}{n},\ e_5 = \frac{n+2}{n+1}. \tag{13}$$

De aici rezultă pentru $1 \leqq i \leqq n-1$, inegalitățile

$$e_1 < e_2 < e_3 \text{ și } e_5 < e_4$$

Așadar

$$H_{p,q,r}(i) \geqq F(i) = \frac{n+2}{n^2}\left[i\left(\frac{n+1}{n}\frac{i-1}{i}\right)^s + (n-i)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s\right] - 1, \tag{14}$$

unde $s = p + q + r = k - 2 \geqq 0$. De aici rezultă :

$$F(i)\Big|_{s=0} = \frac{2}{n} > 0;\quad F(i)\Big|_{s=1} = \frac{2n^3 - 5n - 2 + i(n+2)}{n^3(n+1)} > 0 \text{ pentru } n \geqq 2;$$

$$F(i)\Big|_{s=2} = \frac{1}{n^4(n+1)^2 i}\left[n^2(n^3 + 6n^2 + 14n + 16) + in^2(n-4)(2n^2 + 7n + 8) + \right.$$

$\left. + 2(n+4)i^2n^2 + (9n+2)(1-i)^2\right] > 0$ pentru $n \geqq 4$. Pentru $n = 2$, $i = 1$ și $n = 3$, $i = 1$ sau $i = 2$, relația $F(i)\,|_{s=2} > 0$ este imediată. Vom presupune deci în cele ce urmează $s \geqq 3$.

Vom demonstra în continuare că funcția $F(i)$ din (14) este descrescătoare în raport cu variabila i. În acest scop, înlocuind $i = \frac{1}{\sigma}$, se deduce din (14)

$$f_1(\sigma) = \frac{n^2}{n+2}F(i) = \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^s (1-\sigma)^s - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s\right] + n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s - \frac{n^2}{n+2},$$

așa că

$$f_2(\sigma) = -\sigma^2 f_1'(\sigma) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s [1 + (s-1)\sigma](1-\sigma)^{s-1} - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s,$$

$$f_2'(\sigma) = -\left(\frac{n+1}{n}\right)^s s(s-1)\sigma(1-\sigma)^{s-2} < 0, \text{ dacă } s > 1;$$

$$f_3(s) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^s f_2\left(\frac{1}{n-1}\right) = 1 + \frac{s}{n-2} - \left[\frac{n(n+2)(n-1)}{(n+1)^2(n-2)}\right]^s,$$

$$f_4(s) = \left[\frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n+2)(n-1)}\right]^s f_3'(s) = \frac{1}{n-2}\left[\frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n+2)(n-1)}\right]^s + \ln\frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n-1)(n+2)}.$$

Se observă de aici că funcția $f_4(s)$ este descrescătoare în raport cu variabila s, întrucît au loc inegalitățile $0 < \frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n+2)(n-1)} < 1$ pentru $n \geqq 3$. Se consideră în continuare funcția

$$f_5(n) = f_4(2) = \frac{(n+1)^4(n-2)}{n^2(n-1)^2(n+2)^2} + \ln\frac{(n+1)^2(n-2)}{n(n+2)(n-1)}.$$

Se obține îndată

$$f_5'(n) = \frac{n^8 + 12n^7 + 37n^6 - 3n^5 - 90n^4 - 101n^3 - 84n^2 + 20n + 16}{(n-2)(n-1)^3 n^3 (n+1)(n+2)^3} > 0$$

pentru $n \geqq 3$, de unde rezultă că $f_5(n) < \lim\limits_{n\to\infty} f_5(n) = 0$, și deci că $f_4(2) < 0$. prin urmare $f_4(s) \leqq f_4(2) < 0$, de unde rezultă că $f_3'(s) < 0$ pentru $s \geqq 2$ și deci că $f_3(s) \leqq f_3(3) = -\frac{10n^6 + 27n^5 - 9n^4 - 71n^3 - 57n^2 - 24n - 4}{(n-2)^3(n+1)^6} < 0$ pentru $s \geqq 3$ și $n \geqq 3$. Așadar $f_2\left(\frac{1}{n-1}\right) < 0$ pentru $s \geqq 3$, $n \geqq 3$, în care caz, tabelul 1 dă $\frac{1}{n-1} > \sigma_1$, deci $\frac{1}{i} \geqq \frac{1}{n-1} > \sigma_1$.

Tabelul 1

σ	0		σ_1		1
$f_2(\sigma)$	> 0	$+$	0	$-$	< 0
$f_1'(\sigma)$		$-$	0	$+$	

Rezultă în definitiv inegalitatea $F'(i) = -\frac{n+2}{n^2 i^2} f_1'(\sigma)\Big|_{\sigma=\frac{1}{i}} < 0$. Dacă se va arăta că $F(n-1) > 0$, va rezulta de aici $F(i) \geqq F(n-1) > 0$. Ținînd seamă de această relaţie, va rezulta succesiv, din (14) inegalitatea $H_{p,q,r}(i) > 0$, iar din (12) inegalitatea $G_{p,q,r}(i) > 0$.

Pentru a demonstra inegalitatea $F(n-1) > 0$, considerăm funcţia

$$f_6(s) = F(n-1) = \frac{n+2}{n^2}\left[(n-1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^s\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^s + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s\right] - 1, \tag{15}$$

care se obţine luînd în (14) $i = n-1$. Derivata ecestei funcţii este

$$f_6'(s) = \frac{n+2}{n^2}\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^s \ln\frac{n+2}{n+1} - (n-1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^s\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^s \ln\frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)}\right]$$

şi are o singură rădăcină reală $s_1(n)$, avînd expresia

$$s_1 = s_1(n) = \left[\ln\frac{(n-1)\lg\frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)}}{\lg\frac{n+2}{n+1}}\right]\cdot\left[\ln\frac{n(n-1)(n+2)}{(n+1)^2(n-2)}\right]^{-1}. \tag{16}$$

Se obţine

$$f_6(s_1) = e^B - 1, \tag{17}$$

unde s-a notat

$$B = \ln\frac{n+2}{n^2} + \theta\ln(n-1) - [\theta\ln\theta + (1-\theta)\ln(1-\theta)] \tag{18}$$

şi

$$\theta = \left[\ln\frac{n+2}{n+1}\right]\left[\ln\frac{n(n-1)(n+2)}{(n+1)^2(n-2)}\right]^{-1} \tag{19}$$

Făcînd în (16) substituţia $n = \frac{1}{u}$, se obţine $s_1 = \frac{1}{u}\ln 2 + a_0 + a_1 u + \ldots$ de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} s_1 = \infty. \tag{20}$$

Vom arăta în continuare că rădăcina s_1 este pozitivă. Aceasta revine la inegalitatea $f_7(n) = \ln\frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)} - \frac{1}{n-1}\ln\frac{n+2}{n+1} > 0$. Pentru a demonstra această inegalitate, se ţine seamă că

$$f_8(n) = (n-1)^2 f_7'(n) = \ln\frac{n+2}{n+1} - \frac{(n-1)(3n^2+8n-4)}{n(n+1)(n-2)(n+2)},$$

$$f_8'(n) = \frac{2n^6 + 11n^5 - 13n^4 + 12n^3 + 72n^2 - 32n - 16}{n^2(n+1)^2(n-2)^2(n+2)^2} > 0$$

pentru $n \geqq 3$, de unde rezultă inegalităţile

$$f_8(n) < \lim_{n\to\infty} f_8(n) = 0,\ f_7'(n) < 0,\ f_7(n) > \lim_{n\to\infty} f_7(n) = 0,$$

ultima din ele demonstrînd pozitivitatea rădăcinii s_1.

Putem acum construi tabelul 2 pentru variaţia funcţiei $f_6(s)$ în intervalul $[0, \infty)$, din care rezultă că minimul acestei funcţii în intervalul $[0, \infty]$ este atins pentru valoarea s_1 a variabilei s. Pentru a arăta că funcţia $f_6(s)$ este pozitivă în intervalul $[0, \infty)$, va fi suficient să arătăm că acest minim este pozitiv. În acest scop vom demonstra că numărul B care intervine în expresia (17) a minimului în cauză, este pozitiv, de unde va rezulta pozitivitatea acestui minim. Pentru aceasta, observăm mai întîi că dacă $n \geqq 3$, atunci rezultă din (19) că $0 < \theta < 1$. Mai mult, vom arăta că în aceeaşi ipoteză, are loc următoarea delimitare mai precisă: $1 - \frac{3}{n} < \theta < 1$. În acest scop considerăm funcţia auxiliară

Tabelul 2

s	0		s_1		∞
$f_6'(s)$		$-$	0	$+$	
$f_6(s)$	$\frac{2}{n}$	$\searrow$	$f_6(s_1)$	$\nearrow$	∞

$$f_9(n) = n\left[\theta - \left(1 - \frac{3}{n}\right)\right]\ln\frac{n(n-1)(n+2)}{(n+1)^2(n-2)},$$

care, ţinînd seamă de (19), are expresia

$$f_9(n) = 3\ln\frac{n(n-1)(n+2)}{(n+1)^2(n-2)} - n\ln\frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)}.$$

Obţinem

$$f_9'(n) = \frac{n^3 + 3n^2 - 28n + 12}{n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)} - \ln\frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)},$$

$$f_9''(n) = \frac{2n^7 - 3n^6 + 88n^5 - 75n^4 - 236n^3 + 216n^2 - 16n - 48}{n^2(n-1)^2(n+1)^2(n-2)^2(n+2)^2} > 0.$$

Deci aici se deduce că dacă $n \geqq 3$, atunci au loc succesiv relaţiile:

$$f_9'(n) < \lim_{n\to\infty} f_9'(n) = 0, \quad f_9(n) > \lim_{n\to\infty} f_9(n) = 0,$$

Din ultima rezultă că $\theta > 1 - \frac{3}{n}$.

În continuare, vom considera în expresia (18) a funcţiei B pe n fix iar pe θ ca o variabilă independentă, care parcurge intervalul $\left[1 - \frac{3}{n}, 1\right]$. Notînd $B = B(\theta)$, se obţine din (18) că $B'(\theta) = \ln\left[(n-1)\frac{1-\theta}{\theta}\right]$. Putem deci construi tabelul 3 pentru variaţia funcţiei $B(\theta)$ în intervalul considerat. Vom demonstra că $B\left(1 - \frac{3}{n}\right) > 0$, de unde în baza tabelului 3, va rezulta po-

Tabelul 3

θ	$1 - \frac{3}{n}$		$1 - \frac{1}{n}$		1
$B'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$B(\theta)$	$B\left(1 - \frac{3}{n}\right)$	$\nearrow$	$B\left(1 - \frac{1}{n}\right)$	$\searrow$	$\ln\left(1 + \frac{n-2}{n^2}\right) > 0$

zitivitatea funcției $B(\theta)$ în intervalul $1 - \frac{3}{n} \leqq \theta \leqq 1$, și deci pozitivitatea numărului B dat de formula (18), în care θ are expresia (19). În acest scop se obține din (18)

$$f_{10}(n) = B\left(1 - \frac{3}{n}\right) = \ln \frac{(n-1)(n+2)}{n(n-3)} + \frac{3}{n} \ln \frac{n-3}{3(n-1)},$$

astfel că

$$f_{11}(n) = -\frac{n^2}{3} f'_{10}(n) = \frac{2n(2n+1)}{3(n-1)(n+2)} + \ln \frac{n-3}{3(n-1)},$$

$$f'_{11}(n) = 4 \cdot \frac{2n^3 - n^2 + 11n - 3}{3(n-3)(n-1)^2(n+2)^2}.$$

De aici se vede că dacă $n > 3$, atunci $f'_{11}(n) > 0$. Putem deci construi tabelul 4 privind variația funcției $f_{10}(n)$ în intervalul $[3, \infty)$.

Tabelul 4

n	3		6	n_1	7		n_2		∞
$f_{11}(n)$	$-\infty$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	$\frac{4}{3} - \ln 3 > 0$
$f'_{10}(n)$				$+$			0	$-$	
$f_{10}(n)$	$-\ln \frac{9}{5}$		$\nearrow$	0		$\nearrow$	$f_{10}(n_2)$	$\searrow$	0

Întrucît $f_{10}(6) = \ln \frac{20}{9\sqrt{5}} < 0$, iar $f_{10}(7) = \ln \frac{27}{14}\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{3}{7}} = \frac{1}{7} \ln \frac{14348907}{13176688} > 0$, se deduce că numărul n_1 care figurează în tabelul 4 verifică inegalitățile $6 < n_1 < 7$. Ținînd seamă de acestea, se deduce din tabloul 4 că pentru $n \geqq 7$, are loc inegalitatea $B\left(1 - \frac{3}{n}\right) > 0$, care împreună cu relația $\theta > 1 - \frac{3}{n}$, stabilită anterior, demonstrează că numărul B din (18) este pozitiv pentru $n \geqq 7$. De aici rezultă în baza relației (17) și a tabelului 2, că funcția $f_6(s)$ și deci $F(n-1)$ din (15) sînt pozitive pentru $n \geqq 7$, ceea ce conform unei observații anterioare arată că $G_{p,q,r}(i) > 0$. Astfel, lema este demonstrată pentru $n \geqq 7$. Verificarea ei pentru valorile $n = 3, 4, 5, 6$, se face precum urmează:

Întrucît în expresia (16) a lui $s_1(n)$ nu intervin decît cîturi de logaritmi, valoarea ei nu se schimbă dacă înlocuim logaritmii naturali cu logaritmi zecimali. Făcînd această înlocuire și mărind, respectiv micșorînd logaritmii zecimali care intervin în expresiile lui $s_1(n)$, $n = 3, 4, 5, 6$, cu cîte o unitate

de ordinul ultimei zecimale considerate, spre a majora valorile acestor expresii, se obține din (16):

$$s_1(3) = \left(\log \frac{2 \log \frac{3}{2}}{\log \frac{5}{4}}\right)\left(\log \frac{15}{8}\right)^{-1} < \frac{\log 2 + \log 2}{0{,}27298} < 3,$$

$$s_1(4) = \frac{\log 3}{2 \log \frac{6}{5}} < \frac{0{,}47713}{0{,}15834} < 4,$$

$$s_1(5) = \left[\log\left(\frac{4 \log \frac{10}{9}}{\log \frac{7}{6}}\right)\right]\left[\log \frac{35}{27}\right]^{-1} < \frac{\log 4 + \log 7 - 1}{0{,}11269} < 4,$$

$$s_1(6) = \left[\log\left(\frac{5 \log \frac{15}{14}}{\log \frac{8}{7}}\right)\right]\left[\log \frac{60}{49}\right]^{-1} < \frac{\log 5 + \log 6 - 1}{0{,}08794} < 6,$$

și din (15) inegalitățile

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=3\\s=3}} > \frac{5}{9}\left(\frac{16}{27} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{79}{486},$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=4\\s=3}} > \frac{3}{8}\left(\frac{125}{72} + 1\right) - 1 = \frac{5}{192}; \quad F(n-1)\Big|_{\substack{n=4\\s=4}} > \frac{3}{8}\left(\frac{625}{432} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{363}{3456};$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=5\\s=3}} > \frac{7}{25}\left(\frac{729}{250} + 1\right) - 1 = \frac{603}{6250}; \quad F(n-1)\Big|_{\substack{n=5\\s=4}} > \frac{7}{25}\left(\frac{6561}{2500} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{9677}{62500};$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=6\\s=3}} > \frac{2}{9}\left(\frac{2744}{675} + 1\right) - 1 = \frac{763}{6075}; \quad F(n-1)\Big|_{\substack{n=6\\s=4}} > \frac{2}{9}\left(\frac{38416}{10125} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{16082}{91125};$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=6\\s=5}} > \frac{2}{9}\left(\frac{537824}{151875} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{164398}{1366875};$$

$$F(n-1)\Big|_{\substack{n=6\\s=6}} > \frac{2}{9}\left(\frac{7529536}{2278125} + \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{1390322}{20503125}.$$

Ținînd seamă de aceste inegalități precum și de faptul că $f_6(s) > 0$ pentru $s \geqq \sigma > s_1$, dacă $f_6(\sigma) > 0$ (ceea ce se constată din tabelul 2), rezultă că inegalitatea $F(n-1) > 0$ se menține și pentru $n = 3, 4, 5, 6$, ceea ce completează demonstrația lemei.

Demonstraţia teoremei (*). Din relaţia (9) şi din lema stabilită, rezultă inegalităţile $\delta_i^{(n)}[x^k] \geqq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Pentru a demonstra teorema (*), va trebui să arătăm că inegalităţile de mai sus sînt stricte şi în plus că $\delta_n^{(n)}[x^k] > 0$.

În acest scop vom presupune întîi $0 \leqq i \leqq n-1$. Dacă $k = 2$, atunci în relaţia (9), $p=q=r=0$, deci $G_{0,0,0}(i) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} > 0$, astfel că $\delta_i^{(n)}[x^2] > 0$, iar dacă $k > 2$, atunci conform lemei, dacă $i > 0$, are loc relaţia $G_{p,q,r}(i) > 0$, iar dacă $i = 0$, are loc relaţia $G_{0,q,r}(i) > 0$.

Aşadar, termenii sumei din (9) sînt, nenegativi şi printre ei se află şi termeni pozitivi, astfel că pentru $i=0, 1, \ldots, n-1$, are loc inegalitatea $\delta_i^{(n)}[x^k] > 0$. Pentru $i = n$, se deduce din (7) relaţia

$$\delta_n^{(n)}[x^k] = \lambda_{n+1}^{(n+1)}[x^k] - \lambda_n^{(n)}[x^k]. \tag{21}$$

Ori, după cum s-a arătat în [1]

$$\lambda_i^{(n)}[f] = C_n^i\left[\frac{n+1}{n-i+1} f\left(\frac{i}{n+1}\right) - \frac{i}{n-i+1} f\left(\frac{i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right], \tag{22}$$

în care caz expresia (21) devine

$$\delta_n^{(n)}[x^k] = (n+2)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k - 2(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^k + n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k =$$

$$= \frac{2}{n(n+1)(n+2)}[x_1, x_2, x_3; x^k] > 0, \tag{23}$$

cum se deduce din (8) luînd $x_1 = \frac{n-1}{n}$, $x_2 = \frac{n}{n+1}$, $x_3 = \frac{n+1}{n+2}$.

Astfel, teorema (*) este demonstrată.

Observaţii. 1°. Relaţia (20) ne arată că nu se poate indica un număr întreg S independent de n, astfel încît să aibă loc inegalitatea $s_1 < S$, pentru orice n, cu alte cuvinte, astfel încît în tabelul 2 funcţia $f_6(s)$ să crească cu s, cînd $s \geqq S$. Din ipoteza existenţei unui astfel de număr şi din ipoteza că el s-ar putea lua destul de mare încît $f_6(S) > 0$ pentru orice n, s-ar deduce că $f_6(s) > 0$ pentru $s \geqq S$ şi pentru orice n. În acest caz relaţia $F(i) > 0$, unde funcţia $F(i)$ este dată de formula (14), ar rămîne de verificat pentru $s = 0, 1, \ldots, S-1$ şi $n = 1, 2, \ldots$

2°. Relaţia (11) nu mai are loc în general pentru $i = n$, întrucît pentru p şi r destul de mari, se deduce din (10) inegalitatea

$$n\left(\frac{n}{n-1}\right)^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^r G_{p,q,r}(n) = 1 - \frac{n}{n+2}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^p\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^r < 0.$$

Pentru a arăta că $\delta_n^{(n)}[x^k] > 0$, nu se mai poate deci utiliza expresia (9) a lui $\delta_n^{(n)}[x^k]$; spre a demonstra pozitivitatea acestui număr s-a utilizat expresia lui dată de formula (7).

3°. Ar părea natural ca în vederea demonstrării teoremei (*) să se utilizeze direct relaţia (3). Din aceasta s-ar deduce, în locul relaţiei (6), următoarea relaţie

$$\Delta_2 B_n(x; f) = \sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i^{(n+1)}[f](1-x) - \lambda_i^{(n)}[f]\}\, x^i(1-x)^{n-i+1} + \lambda_{n+1}^{(n+1)}[f]\, x^{n+1}(1-x),$$

de unde ar rezulta

$$R(x) = \frac{\Delta_2 B_n(x; f)}{x^{n+1}(1-x)} = \lambda_{n+1}^{(n+1)}[f] + \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i^{(n+1)}[f](1-x) - \lambda_i^{(n)}[f]\}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{n-i}$$

şi deci

$$R'(x) = \frac{1}{x^3}\sum_{i=1}^{n} P_i(x)\left(\frac{1-x}{x}\right)^{n-i-1} \tag{24}$$

$$P_i(x) = (n-i+1)\{\lambda_i^{(n)}[f] - \lambda_i^{(n+1)}[f]\} - x\{\lambda_i^{(n)}[f] - (n-i+1)\lambda_i^{(n+1)}[f]\}. \tag{25}$$

De aici ar rezulta

$$\operatorname{sgn} P_i(0) = \operatorname{sgn}\{\lambda_i^{(n)}[f] - \lambda_i^{(n+1)}[f]\},$$

şi $P_i(1) = (n-i)\,\lambda_i^{(n)}[f] < 0$ pentru $f(x) = x^k$, cum se deduce din formulele (4) şi (8). Dacă deci ar avea loc inegalitatea $\lambda_i^{(n)}[x^k] - \lambda_i^{(n+1)}[x^k] < 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci s-ar deduce de aici că pentru $0 < x \leqq 1$, ar avea loc inegalitatea $P_i(x) < 0$, deci $R'(x) < 0$, de unde ar rezulta că $R(x) \geqq R(1)$. Dar $R(1) = \lambda_{n+1}^{(n+1)}[x^k] - \lambda_n^{(n)}[x^k] = \delta_n^{(n)}[x^k]$. În baza inegalităţii (23) ar rezulta deci că $R(x) > 0$, ceea ce ar demonstra teorema.

Însă inegalitatea $\lambda_i^{(n)}[x^k] - \lambda_i^{(n+1)}[x^k] < 0$, nu are întotdeauna loc. Într-adevăr, se deduce din formula (22) că

$$f_{12}(i) = \frac{\lambda_i^{(n)}[x^k] - \lambda_i^{(n+1)}[x^k]}{C_n^{i-1}} = \frac{n+1}{n-i+2}\left(\frac{i-1}{n+1}\right)^k - \frac{n+1}{n-i+2}\left(\frac{i}{n+2}\right)^{k-1} +$$

$$+ 2\left(\frac{i}{n+1}\right)^{k-1} - \left(\frac{i-1}{n}\right)^k - \frac{n-i+1}{i}\left(\frac{i}{n}\right)^k. \tag{26}$$

Dacă în această relaţie se ia de exemplu $i = n-1$, se obţine

$$f_{13}(n) = f_{12}(n-1) = 2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{k-1} + \frac{n+1}{3}\left[\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^k - \left(\frac{n-1}{2}\right)^{k-1}\right] -$$

$$- \frac{2}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k - \left(\frac{n-2}{n}\right)^k = \frac{C_k^2}{n^2} + \frac{b_3}{n^3} + \ldots \tag{27}$$

de unde rezultă că pentru $n \geqq N = N(k)$, are loc inegalitatea $f_{13}(n) > 0$, deci în aceste condiţii, inegalitatea în cauză nu are loc.

De asemenea, dacă se ia de exemplu în formula (27) $R = k-1$, se obţine

$$f_{14}(k) = f_{13}(k-1) = 2\left(1-\frac{2}{k}\right)^{k-1} - \frac{2}{k-2}\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^{k} - \left(1-\frac{2}{k-1}\right)^{k} + \\ + \frac{k}{3}\left[\left(1-\frac{3}{k}\right)^{k} - \left(1-\frac{3}{k+1}\right)^{k-1}\right],$$

aşa că $\lim_{k\to\infty} f_{14}(k) = \frac{e-2}{e^3} > 0$, de unde rezultă că pentru k suficient de mare au loc relaţiile $f_{14}(k) = f_{13}(n)|_{n=k-1} = f_{12}(i)|_{i=n-1=k-2} > 0$, din care rezultă iarăşi pozitivitatea expresiei $\lambda_{k-2}^{(k-1)}[x^k] - \lambda_{k-2}^{(k)}[x^k]$ în condiţiile menţionate.

În cazurile în care expresia $\lambda_i^{(n)}[x^k] - \lambda_i^{(n+1)}[x^k]$ este pozitivă, se poate lua pe x suficient de mic astfel încît expresia $P_i(x)$ din (25) să aibă o valoare pozitivă. În aceste condiţii termenul corespunzător din expresia (24) a lui $R'(x)$ este de asemenea pozitiv. Prin urmare, din simpla considerare a expresiei (24) a lui $R'(x)$, nu se poate deduce direct că această derivată are întotdeauna o valoare negativă. Pentru acest motiv, în demonstraţia teoremei (*) s-a utilizat forma (6) a expresiei $\Delta_2 B_n(x; f)$.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОЛИНОМОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой заметке устанавливается следующее свойство:

Если функция $f(x)$ является аналитической на интервале $[0, 1]$ *и на этом интервале все ее производные порядка* ≥ 2 *являются неотрицательными, то имеет место неравенство:*

$$\Delta_2 B_n(x;f) = B_{n+2}(x;f) - 2B_{n+1}(x;f) + B_n(x;f) \geq 0,$$

верное при любом $x \in [0, 1]$ *и для любого натурального числа* n.

Здесь $B_n(x; f)$ представляет собой интерполяционный полином С. Н. Бернштейна n-ой степени относительно функции $f(x)$ и интервала $[0, 1]$.

Если обозначаем $\Delta_1 B_n(x; f) = B_{n+1}(x; f) - B_n(x; f)$ то вышеуказанное свойство выражает то, что ряд $\Delta_1 B_n(x; f)$, $n=1, 2, \ldots$ стремится монотонно к нулю, когда n стремится к бесконечности, для любого x на интервале $[0, 1]$. Этим дополняются некоторые результаты, полученные в трудах [1, 2, 4].

UNE PROPRIÉTÉ DES POLYNOMES DE S. N. BERNSTEIN

RÉSUMÉ

Dans cette note on établit la propriété suivante :

Si la fonction $f(x)$ est analytique dans l'intervalle $[0, 1]$ *et si elle a dans cet intervalle toutes les dérivées d'ordre* ≥ 2 *non-négatives, alors l'inégalité suivante*

$$\Delta_2 B_n(x;f) = B_{n+2}(x;f) - 2\,B_{n+1}(x;f) + B_n(x;f) \geq 0$$

est valable pour tout $x \in [0, 1]$ *et pour tout nombre naturel* n.

Ici $B_n(x;f)$ représente le polynome d'interpolation de S. N. Bernstein de degré n, relatif à la fonction $f(x)$ et à l'intervalle $[0, 1]$.

Si l'on note par $\Delta_1 B_n(x;f) = B_{n+1}(x;f) - B_n(x;f)$, la propriété ci-dessus exprime le fait que la suite $\Delta_1 B_n(x;f)$, $n=1, 2, \ldots$, tend de manière *monotone* vers zéro, lorsque n tend vers l'infini, pour tout x de l'intervalle $[0, 1]$. De la sorte ont été complétés certains résultats obtenus dans les travaux [1, 2, 4].

BIBLIOGRAFIE

1. Aramă O., *Proprietăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor.* Stud. şi cercet. de matem. (Cluj), **VIII**, 195–210 (1957).
2. Арамэ О., *Относительно свойств монотонности последовательности интерполяционных многочленов С. Н. Бернштейна и их применения к исследованию приближения функций.* Mathematica, **2 (25)**, *1*, 25–40 (1960).
3. Lorentz G. G., *Bernstein Polynomials.* Toronto, 1953.
4. Schoenberg I. J., *On Variation diminishing Approximation Methods.* On Numerical Approximation. Proceedings of a Symposium, Madison, April 21–23, 1958, pp. 249–274. Publication nr. 1 of the Mathematics Research Center, U. S. Army. The University of Wisconsin Press, Madison, 1959.
5. Widder D. V., *Laplace Transformation*, London, 1946.

Primit la 9. XII. 1960.