UN PROCEDEU DE ORDINUL OPT DE EXACTITATE, DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

DE

A. COȚIU

(Cluj)

Comunicare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8—13 decembrie 1960, Cluj

Să considerăm ecuația diferențială de ordinul întîi

$$z' = \varphi(x, z) \tag{1}$$

și fie $z(x)$ integrala ei care satisface la condiția inițială

$$z(x_0) = z_0. \tag{2}$$

Presupunem că sînt îndeplinite condițiile care asigură existența și unicitatea integralei $z(x)$ pe intervalul $[x_0, x]$, unde $x = x_0 + h$.

1. Deoarece în cele ce urmează intervine des noțiunea de ordin de exactitate al unui procedeu de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi, vom indica definiția acestei noțiuni (a se vedea de exemplu [3]).

Să notăm cu $\tilde{z}(x)$ integrala ecuației diferențiale (1), calculată cu ajutorul unui procedeu numeric, dat, pe nodul x. Să dezvoltăm pe $z(x)$, integrala exactă a ecuației diferențiale (1) și pe $\tilde{z}(x)$ în serii Taylor, cu centrul în punctul x_0 :

$$z(x) = z(x_0) + \frac{h}{1!} z'(x_0) + \frac{h^2}{2!} z''(x_0) + \cdots + \frac{h^p}{p!} z^{(p)}(x_0) + \cdots, \tag{3}$$

$$\tilde{z}(x) = z(x_0) + \frac{h}{1!} a_1 + \frac{h^2}{2!} a_2 + \cdots + \frac{h^p}{p!} a_p + \cdots \tag{4}$$

Există un ultim termen în care coeficienții lui h^i încă mai coincid.

Exponentul puterii lui h, în acel termen, se numește ordinul de exactitate al procedeului numeric. Astfel, dacă ordinul de exactitate al procedeului numeric este p, atunci avem

$$a_1 = z'(x_0),\ a_2 = z''(x_0),\ \ldots,\ a_p = z^{(p)}(x_0), \tag{5}$$

însă

$$a_{p+1} \neq z^{(p+1)}(x^0).$$

2. Pentru integrarea numerică a ecuației diferențiale (1), cu condiția inițială (2), este bine cunoscut procedeul lui Runge-Kutta (mai precis al lui Kutta) (a se vedea de exemplu [1]), de ordinul al patrulea de exactitate. Aplicarea acestui procedeu necesită patru substituții în ecuația diferențială. De asemenea, sînt cunoscute procedeele lui Kutta [10] și Nyström [14], de ordinul al cincilea de exactitate. Aplicarea acestor procedee necesită șase substituții în ecuația diferențială. Huța [6], [7] a stabilit două procedee de ordinul al șaselea de exactitate, a căror aplicare necesită opt substituții în ecuația diferențială.

Problema găsirii unei metode care se permită construirea de procedee de tip Runge-Kutta, de orice ordin de exactitate, a fost rezolvată de prof. D. V. Ionescu [8], [9], fără însă ca procedeele menționate mai sus să se poată obține prin această metodă. Metoda arătată de prof. D. V. Ionescu permite construirea de procedee de tip Runge-Kutta, pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi, a sistemelor de astfel de ecuații și a ecuațiilor diferențiale de ordinul n.

Aplicarea procedeelor care se obțin prin metoda arătată de prof. D. V. Ionescu necesită însă mult mai multe substituții în ecuația diferențială, decît procedeele menționate mai sus. Astfel, pentru a se obține un procedeu de ordinul al patrulea de exactitate, prin această metodă, trebuie să se calculeze funcția $\varphi(x, z)$ pentru șapte perechi de valori (x, z), pe cînd aplicarea procedeului lui Kutta, de același ordin de exactitate, necesită calcularea funcției $\varphi(x, z)$ numai pentru patru perechi de valori (x, z). De aceea, prof. D. V. Ionescu menționează că pentru obținerea de procedee de ordinele al cincilea, al șaselea ș. a. m. d., de exactitate, prezintă interes cercetarea unor procedee de tip Runge-Kutta, a căror aplicare să necesite calcularea funcției $\varphi(x, z)$ pentru un număr mai mic de perechi de valori (x, z), decît cele date în lucrarea [8], reluîndu-se în acest scop metodele din cartea lui Runge și König [15], sau alte metode.

3. În 1958, Fehlberg [5] a arătat că printr-o transformare a ecuației diferențiale (1) se poate stabili un procedeu de ordinul al șaselea de exactitate, a cărui aplicare necesită numai trei substituții în ecuația diferențială transformată. Prin transformarea dată de Fehlberg, integrarea numerică a ecuației diferențiale (1), cu condiția inițială (2), se reduce la integrarea numerică a unei alte ecuații diferențiale, tot de ordinul întîi, cu aceeași condiție inițială.

În comunicarea prezentată la Sesiunea științifică jubiliară a Universității „Al. I. Cuza" din Iași, din 28–30 oct. 1960 [4], am dat o extindere transformării lui Fehlberg, precum și o altă transformare, diferită de cea

a lui Fehlberg, care ne-au permis să stabilim un procedeu de ordinul al șaptelea de exactitate, a cărui aplicare necesită trei substituții în ecuația diferențială transformată, un procedeu de ordinul al șaptelea de exactitate, a cărui aplicare necesită două substituții în ecuația diferențială transformată, precum și un procedeu de ordinul al optele de exactitate, a cărui aplicare necesită trei substituții în ecuația diferențială transformată.

În lucrarea de față, ne propunem să dăm o extindere transformării, determinată în lucrarea [4], care ne permite să stabilim un procedeu de ordinul al optulea de exactitate, a cărui aplicare necesită numai două substituții în ecuația diferențială transformată. Vom indica, în încheierea lucrării, cîteva concluzii în legătură cu procedeele stabilite pe această cale.

4. Să trecem la stabilirea procedeului pe care-l avem în vedere.

În locul funcției $z(x)$, integrală a ecuației diferențiale (1), care satisface la condiția inițială (2), să introducem printr-o transformare, o nouă funcție $y(x)$, astfel încît să satisfacă la următoarele condiții:

a) $y(x)$ să fie integrală a ecuației diferențiale

$$y' = f(x, y) \tag{6}$$

și care satisface la aceeași condiție inițială

$$y(x_0) = y_0 = z_0\,; \tag{7}$$

b) pe nodul x_0, integrala $y(x)$, și funcția $f(x,y)$ care va fi determinată imediat, să îndeplinească condițiile

$$y'_0 = 0,\ y''_0 = 0,\ y'''_0 = 0,\ y^{IV}_0 = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 = 0. \tag{9}$$

Din condițiile (8) rezultă că sînt satisfăcute și condițiile

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 = 0. \tag{10}$$

Într-adevăr, condițiile (10) rezultă imediat din egalitățile

$$y''_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y'_0 = 0,$$

$$y'''_0 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 y'_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y'^2_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y''_0 = 0,$$

$$y^{IV}_0 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 y'_0 + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_0 y'^2_0 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 y'^3_0 + 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0 y''_0 + 3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y'_0\, y''_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y'''_0 = 0.$$

Să considerăm acum următoarea relaţie între integralele z şi y, care, aşa cum se va vedea, ne conduce la transformarea ce trebuie s-o facem asupra ecuaţiei diferenţiale (1) :

$$z = \theta(x, y) = y + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2!} z_0''(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} z_0'''(x - x_0)^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!} z_0^{IV}(x - x_0)^4 + A(x - x_0)(y - y_0) + B(x - x_0)^2(y - y_0), \tag{11}$$

unde A şi B sînt, deocamdată, două constante oarecare.

Se verifică uşor că condiţiile (7) şi (8) satisfac relaţia (11).

Să determinăm acum constantele A şi B astfel ca şi condiţiile (9) să fie satisfăcute.

Pentru aceasta, să derivăm relaţia (11) în raport cu x şi să ţinem seamă de ecuaţiile (1) şi (6) ; avem

$$\varphi(x, z) = [1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2] f(x, y) + z_0' + z_0''(x - x_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!} z_0'''(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} z_0^{IV}(x - x_0)^3 + A(y - y_0) +$$

$$+ 2B(x - x_0)(y - y_0). \tag{12}$$

Să derivăm apoi relaţia (12), parţial, în raport cu y ; avem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = [1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2]\frac{\partial f}{\partial y} + A + 2B(x - x_0). \tag{13}$$

Din relaţia (11) avem egalitatea

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2 \tag{14}$$

pe care dacă o înlocuim în egalitatea (13), se obţine

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)[1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2] = A + 2B(x - x_0). \tag{15}$$

Făcînd în egalitatea (15), $x = x_0$, avem

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = A,$$

de unde rezultă că pentru a avea

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

trebuie ca

$$A = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0 \tag{16}$$

Pentru determinarea lui B, să derivăm egalitatea (15), parţial, în raport cu x ; avem

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)[1 + A(x - x_0) + B(x - x_0)^2] +$$

$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)[A + 2B(x - x_0)] = 2B. \tag{17}$$

Dacă facem $x = x_0$ şi ţinem seama de egalitatea (16), se obţine

$$B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0^2\right] \tag{18}$$

Din relaţia (12), în care constantele A şi B se înlocuiesc cu valorile lor date de relaţiile (16), respectiv (18), avem

$$f(x, y) = \left\{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0(x - x_0) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0^2\right](x - x_0)^2\right\}^{-1}\Big\{\varphi[x, \theta(x, y)] -$$

$$- z_0' - z_0''(x - x_0) - \frac{1}{2!} z_0'''(x - x_0)^2 - \frac{1}{3!} z_0^{IV}(x - x_0)^3 -$$

$$- \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0(y - y_0) - \left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0^2\right](x - x_0)(y - y_0)\Big\} \tag{19}$$

In concluzie, integrarea ecuaţiei diferenţiale (1), cu condiţia iniţială (2), se reduce, prin transformarea (11), unde constantele A şi B se înlocuiesc prin valorile lor date de egalităţile (16), respectiv (18), la integrarea ecuaţiei diferenţiale (6), cu condiţia iniţială (7), unde funcţia $f(x, y)$ care figurează în membrul al doilea al ecuaţiei (6) este dată de egalitatea (19).

Integrala $y(x)$ şi funcţia $f(x, y)$, satisfac la condiţiile (8), (9) şi (10).

Dacă ecuaţia diferenţială (6) a fost integrată numeric şi s-a obţinut integrala ei aproximativă, $\tilde{y}(x)$, atunci formula (11) dă integrala aproximativă $\tilde{z}(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1), înlocuind pe $y(x)$ cu $\tilde{y}(x)$, adică

$$\tilde{z}(x) = \tilde{y}(x) + z_0'(x - x_0) + \frac{1}{2!} z_0''(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} z_0'''(x - x_0)^3 +$$

$$+ \frac{1}{4!} z_0^{IV}(x - x_0)^4 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0(x - x_0)[\tilde{y}(x) - y_0] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_0^2\right](x - x_0)^2[\tilde{y}(x) - y_0]. \tag{20}$$

5. Metoda pe care o vom folosi în această lucrare pentru stabilirea procedeului de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (6), cu condiţia iniţială (7), este cea dată în cartea lui R u n g e şi K ö n i g [15] sau în cartea lui B e r e z i n şi J i d k o v [1].

Integrala $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale transformată (6), dezvoltată după formula lui Taylor, în vecinătatea nodului x_0, este

$$y(x) = y_0 + \frac{y'_0}{1!} h + \frac{y''_0}{2!} h^2 + \ldots + \frac{y_0^{(8)}}{8!} h^8 + \frac{y_0^{(9)}}{9!} h^9 + \ldots \tag{21}$$

Coeficienţii $y_0^{(\nu)}$, din dezvoltarea (21), pot fi exprimaţi cu ajutorul derivatelor parţiale ale funcţiei $f(x, y)$, în raport cu x şi y pe nodul x_0. Dacă se ţine seama cu această ocazie de condiţiile (8), (9) şi (10), care simplifică foarte mult formulele, se găseşte

$$\begin{gathered} y'_0 = 0,\ y''_0 = 0,\ y'''_0 = 0,\ y_0^{IV} = 0, \\ y_0^{(5)} = \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0,\ y_0^{(6)} = \left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_0, \\ y_0^{(7)} = \left(\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\right)_0,\ y_0^{(8)} = \left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}\right)_0 + 21 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0. \end{gathered} \tag{22}$$

8. Să scriem acum următorul procedeu de calcul numeric al integralei ecuaţiei diferenţiale transformată (6), a cărui aplicare să necesite calcularea valorilor funcţiei $f(x, y)$ numai pe două noduri ale intervalului $[x_0, x]$, unde $x = x_0 + h$:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0 + \alpha_1 h,\ y_0)\ h, \\ k_2 &= f(x_0 + \alpha_2 h,\ y_0 + \beta_1)\ h, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\tilde{y}(x) = y_0 + c_1 k_1 + c_2 k_2. \tag{24}$$

S-a notat cu $\tilde{y}(x)$ integrala aproximativă a ecuaţiei diferenţiale, transformată, pe nodul $x = x_0 + h$.

Constantele α_1, α_2, c_1, c_2 şi β le vom determina dezvoltînd după formula lui Taylor, în vecinătatea nodului x_0, membrii al doilea ai egalităţilor (23) şi (24). Vom compara apoi coeficienţii acestor dezvoltări cu coeficienţii dezvoltării (21), ţinîndu seama de relaţiile (22).

Dacă ţinem de condiţiile (8), (9) şi (10), se găseşte

$$\begin{aligned} k_1 = {} & \frac{1}{4!} \alpha_1^4 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 h^5 + \frac{1}{5!} \alpha_1^5 \left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_0 h^6 + \frac{1}{6!} \alpha_1^6 \left(\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\right)_0 h^7 + \\ & + \frac{1}{7!} \alpha_1^7 \left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}\right)_0 h^8 + \ldots, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} k_2 = {} & \frac{1}{4!} \alpha_2^4 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 h^5 + \frac{1}{5!} \alpha_2^5 \left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_0 h^6 + \frac{1}{6!} \alpha_2^6 \left(\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\right)_0 h^7 + \\ & + \left[\frac{1}{48} \alpha_1^4 \alpha_2^2 \beta \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 + \frac{1}{7!} \alpha_2^7 \left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}\right)_0\right] h^8 + \ldots \end{aligned} \tag{26}$$

7. Compararea coeficienţilor din relaţiile (21) şi (24), ţinînd seamă de egalităţile (22), (25) şi (26), ne conduce la următorul sistem de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 h^5: && \frac{1}{4!} c_1 \alpha_1^4 + \frac{1}{4!} c_2 \alpha_2^4 = \frac{1}{5!}, \\ &\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_0 h^6: && \frac{1}{5!} c_1 \alpha_1^5 + \frac{1}{5!} c_2 \alpha_2^5 = \frac{1}{6!}, \\ &\left(\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}\right)_0 h^7: && \frac{1}{6!} c_1 \alpha_1^6 + \frac{1}{6!} c_2 \alpha_2^6 = \frac{1}{7!}, \\ &\left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^7}\right)_0 h^8: && \frac{1}{7!} c_1 \alpha_1^7 + \frac{1}{7!} c_2 \alpha_2^7 = \frac{1}{8!}, \\ &\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3 \partial y}\right)_0 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 h^8: && \frac{1}{48} c_2 \alpha_1^4 \alpha_2^2 \beta = \frac{21}{8!}. \end{aligned} \tag{27}$$

Efectuînd simplificările, din sistemul (27) se obţine sistemul

$$\begin{aligned} c_1 \alpha_1^4 + c_2 \alpha_2^4 &= \frac{1}{5}, \\ c_1 \alpha_1^5 + c_2 \alpha_2^5 &= \frac{1}{6}, \\ c_1 \alpha_1^6 + c_2 \alpha_2^6 &= \frac{1}{7}, \\ c_1 \alpha_1^7 + c_2 \alpha_2^7 &= \frac{1}{8}, \\ c_2 \alpha_1^4 \alpha_2^2 \beta &= \frac{1}{40}. \end{aligned} \tag{28}$$

Pentru ca primele patru ecuaţii să fie compatibile în raport cu c_1 şi c_2, trebuie să avem

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^4 & \alpha_2^4 & \frac{1}{5} \\ \alpha_1^5 & \alpha_2^5 & \frac{1}{6} \\ \alpha_1^6 & \alpha_2^6 & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1^5 & \alpha_2^5 & \frac{1}{6} \\ \alpha_1^6 & \alpha_2^6 & \frac{1}{7} \\ \alpha_1^7 & \alpha_2^7 & \frac{1}{8} \end{vmatrix} = 0.$$

Calculul acestor determinanţi conduce, presupunînd că α_1 şi α_2 sînt diferiţi de zero şi diferiţi între ei, la următoarele ecuaţii

$$\frac{1}{5}\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{6}(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{1}{7} = 0,$$
$$\frac{1}{6}\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{7}(\alpha_1+\alpha_2) + \frac{1}{8} = 0. \tag{29}$$

Din ecuaţiile (29) obţinem

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{15}{28}, \tag{30}$$

şi de aici avem mai departe

$$\alpha_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{7}},$$
$$\alpha_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{7}}. \tag{31}$$

Dacă rezolvăm apoi primele două ecuaţii din sistemul (28), în raport cu c_1 şi c_2, unde α_1 şi α_2 sînt înlocuiţi cu valorile lor din (31), se găseşte

$$c_1 = \frac{784}{253\,125}\left(102 + 49\sqrt{\frac{3}{7}}\right),$$
$$c_2 = \frac{784}{253\,125}\left(102 - 49\sqrt{\frac{3}{7}}\right). \tag{32}$$

Din ultima ecuaţie a sistemului (28) se obţine β,

$$\beta = \frac{7}{12\,500}\left(1269 + 1253\sqrt{\frac{3}{7}}\right). \tag{33}$$

Am stabilit deci următorul procedeu de ordinul opt de exactitate de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale transformată

$$y' = f(x, y),$$

cu condiţia iniţială $y(x\,0) = y_0' = z_0$,

$$\tilde{y}(x) = y_0 + 0,\,415\; k_1 + 0,\,217\; k_2, \tag{34}$$

cu notaţiile

$$k_1 = f(x_0 + 0,\,586\, h,\, y_0)\, h,$$
$$k_2 = f(x_0 + 0,\,914\, h,\, y_0 + 1{,}169\, k_1)\, h. \tag{35}$$

Aplicarea acestui procedeu necesită două substituţii în ecuaţia diferenţială transformată.

Numerele care figurează în relaţiile (34) şi (35) sînt valori aproximative, cu două zecimale exacte, a treia fiind luată prin lipsă sau prin exces, ale constantelor α_1, α_2, c_1, c_2 şi β.

8. Integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale

$$z' = \varphi(x, z) = x + z, \tag{36}$$

cu condiţia iniţială $z(0) = 0$, se reduce prin transformarea (11), la integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale

$$y' = f(x, y) = \frac{1}{12}\,\frac{x^4 + 12x^2y}{x^2 + 2x + 2}, \tag{37}$$

cu condiţia iniţială $y(0) = 0$.

In cazul de faţă avem

$$z_0' = 0,\; z_0'' = 1,\; z_0''' = 1,\; z_0^{IV} = 1,$$

iar transformarea ce trebuie făcută asupra ecuaţiei diferenţiale iniţiale este

$$z = \theta(x, y) = y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + xy + \frac{1}{2}x^2y. \tag{38}$$

Dacă ecuaţia diferenţială (37) se integrează numeric şi se obţine integrala ei aproximativă $\tilde{y}(x)$, atunci formula (38) dă integrala aproximativă $\tilde{z}(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (36), înlocuind pe $\tilde{y}(x)$ cu $y(x)$.

Concluzii

Procedeul dat în lucrarea de faţă, precum şi procedeele date în [4], se recomandă în aplicaţii pentru următoarele motive :

1. Prin stabilirea acestor procedee, a căror aplicare necesită un număr minim de substituţii în ecuaţia diferenţială, se aduce o contribuţie la rezolvarea unei probleme de mare importanţă în analiza numerică, problemă căreia îi este consacrat azi un volum foarte mare de cercetări şi anume : determinarea procedeelor care — pentru probleme date — conduc la un număr cît mai mic de operaţii [12].

Pînă în prezent, în literatura matematică, în afara procedeelor care se pot construi prin metoda arătată de prof. D. V. Ionescu, lăsînd la o parte procedeele de ordin de exactitate mai mic, erau cunoscute procedee de ordinul al patrulea de exactitate, a căror aplicare necesită patru substituţii în ecuaţia diferenţială, procedee de ordinul al cincilea de exactitate a căror aplicare necesită şase substituţii în ecuaţia diferenţială, precum şi procedee de ordinul al şaselea de exactitate a căror aplicare necesită opt substituţii în ecuaţia diferenţială. Nu de mult a fost dat un procedeu de ordinul al şaselea de exactitate, a cărui aplicare necesită numai trei substituţii în ecuaţia diferenţială transformată.

Faţă de procedeele menţionate, procedeul stabilit de noi în lucrarea de faţă are avantajul că este de ordinul al optălea de exactitate, iar aplicarea lui necesită doar două substituții în ecuația diferențială transformată. Se pare că, pînă în prezent, în literatura matematică nu este dat un astfel de procedeu.

2. Stabilirea de procedee de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale, a căror aplicare necesită un număr cît mai mic de substituții în ecuația diferențială, prezintă mare interes și din punct de vedere al delimitărilor restului acestor procedee. In analiza numerică, o problemă tot așa de importantă ca cea semnalată mai sus, este aceea a evaluării erorilor de calcul, a delimitării restului în procedeele de integrare numerică [12].

Pentru delimitarea restului procedeelor de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale, o metodă destul de simplă s-a dovedit a fi metoda lui Bieberbach [2]. Insă, din cauza felului cum este concepută această metodă, delimitările obținute prin aplicarea ei sînt destul de grosolane tocmai datorită faptului că procedeele cunoscute pînă în prezent necesită un număr mare de substituții în ecuația diferențială.

In analiza numerică, prezintă interes deocamdată delimitările restului. Determinarea restului este o problemă mult mai dificilă, dat fiind faptul că în special în procedeele de tip Runge-Kutta, restul are o structură complicată. Așa se explică faptul că structura restului (și nu delimitările restului) a fost puțin studiată pînă în prezent. Spre deosebire de formulele de cuadratură și de derivare numerică, în care restul este o funcțională liniară de f, restul în procedeele de tip Runge-Kutta, de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale, nu mai este o funcțională liniară. In acest caz f este o funcție de două sau mai multe variabile. Se pare că problema structurii restului în cazul cînd acesta nu mai e o funcțională liniară de f, este în legătură cu generalizarea noțiunii de convexitate în raport cu un sistem interpolator de funcții [13].

In această ultimă direcție, menționăm în țara noastră rezultatele obținute de El. Moldovan. O serie de rezultate foarte importante se află conținute în lucrarea [11]. La sfîrșitul lucrării se află o vastă bibliografie în legătură cu această direcție de cercetări.

ПРИЕМ ВОСЬМОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Преобразованием (11), где константы A и B даются равенствами (16), соответственно (18), автор сводит интегрирование дифференциального уравнения (1), при начальном условии (2), к интегрированию дифференциального уравнения (6), при начальном условии (7). Функция $f(x, y)$, фигурирующая в правой части уравнения (6), дается равенством (19).

Решение $y(x)$ и функция $f(x, y)$ удовлетворяют условиям (8), (9) и (10).

Если численно интегрируется дифференциальное уравнение (6) и получается его приближенный интеграл $\tilde{y}(x)$, то формула (20) дает приближенный интеграл $\tilde{z}(x)$ дифференциального уравнения (1).

Для численного интегрирования дифференциального уравнения (6) в труде установлен прием, выраженний формулой (34) с обозначениями (35).

Данный прием рекомендуется для применения, так как ведет к минимальному числу действий и представляет интерес с точки зрения ограничения остатка, именно потому что, хотя он является восьмого порядка точности, его применение требует только двух замен в преобразованном дифференциальном уравнении.

UN PROCÉDÉ DU HUITIÈME ORDRE D'EXACTITUDE, D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

RÉSUMÉ

Par la transformation (11), où les constantes A et B sont données par les égalités (16), respectivement (18), l'auteur réduit l'intégration de l'équation différentielle (1), à la condition initiale (2), à l'intégration de l'équation différentielle (6), à la condition initiale (7). La fonction $f(x, y)$, qui figure au deuxième membre de l'équation (6), est donnée par l'égalité (19).

L'intégrale $y(x)$ et la fonction $f(x, y)$ satisfont aux conditions (8), (9) et (10).

Si l'on procède à l'intégration de l'équation différentielle (6) et l'on obtient son intégrale approximative, $\tilde{y}(x)$, alors la formule (20) donne l'intégrale approximative $\tilde{z}(x)$ de l'équation différentielle (1).

Pour l'intégration numérique de l'équation différentielle (6) on établit, dans le travail, le procédé exprimé par la formule (34), avec les notations (35).

L'auteur recommande le procédé indiqué dans le présent travail pour les applications parce qu'il conduit à un nombre très réduit d'opérations et présente de l'intérêt du point de vue de la délimitation du reste, précisément parce que, bien qu'il soit du huitième ordre d'exactitude, son application ne réclame néanmoins que deux substitutions dans l'équation différentielle transformée.

BIBLIOGRAFIE

1. И. С. Березин и Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, Том. 2. Москва, 1960, р. 286—311.
2. L. Bieberbach, *On the Remainder of the Runge-Kutta Formula in the Theory of Ordinary Differential Equations*. ZAMP, **II**, *4*, 233–248 (1951).
3. L. Collatz, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1951 (trad. în limba rusă, Moscova, 1953, 11–12).
4. A. Coţiu, *Stabilirea unor procedee de ordin înalt de exactitate, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Comunicare prezentată la Sesiunea ştiinţifică jubiliară a Univ. ,,Al. I. Cuza,, Iaşi, din 28–30 oct. 1960 (sub tipar).
5. E. Fehlberg, *Eine Methode zur Fehlerverkleinerung beim Runge-Kutta-Verfahren*. Z. angew. Math. Mech., **38**, 421 – 426 (1958).
6. A. Huťa, *Une amélioration de la méthode de Runge-Kutta-Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre*. Acta fac. rerum naturalium Univ. Comenianae, Mathematica (Bratislava), **I**, *4–6*, 201–224 (1956).
7. — *Contribution à la formule de sixième ordre dans la méthode de Runge-Kutta-Nyström*. Acta fac. rerum naturalium Univ. Comenianae, Mathematica (Bratislava), **II**, *1–2*, 21–24 (1957).
8. D. V. Ionescu, *O generalizare a unei proprietăţi ce intervine în metoda lui Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Bul. ştiinţ. –Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VI**, *2*, 229–241 (1954).
9. — *O generalizare a unei proprietăţi care intervine în metoda lui Runge şi Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Bul. ştiinţ. – Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VIII**, *1*, 67–100 (1956).
10. W. Kutta, *Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen*. Zeitschr. f. Math. u. Physik, **46**, 435–453 (1901).
11. E. Moldovan, *Asupra noţiunii de funcţie convexă faţă de o mulţime de funcţii interpolatoare*. Stud. şi cercet. de matem. (Cluj), **IX**, *1–4*, 161–224 (1958).
12. — *Maşinile de calcul şi devzoltarea matematicii*. Gazeta mat. şi fizică, A, **XI (LXIV)**, *4*, 193–201 (1959).
13. T. Popoviciu, *Certains aspects du problème de la précision dans les calcules numériques*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., **I (49)**, *4*, 473–478 (1957).
14. E. J. Nyström, *Über die numerische Integration von Differentialgleichungen*. Acta Soc. Sci. Fennicae, **L**, *13*, 1–55 (1926).
15. C. Runge, H. König, *Vorlesungen über Numerisches Rechnen*. Berlin, 1924.

Primit la 12. XII. 1960.