ASUPRA METODEI APROXIMAŢIILOR SUCCESIVE PENTRU ECUAŢII OPERATORIALE

DE

ROMULUS CRISTESCU

Comunicare prezentată la Colocviul de analiză numerică din 8 — 13 decembrie 1960, Cluj

Metoda aproximaţiilor succesive în spaţii liniare complet reticulate sau, mai general, în spaţii liniare cu normă vectorială (B_K-spaţii), a fost studiată de L. V. K a n t o r o v i c i (a se vedea [1—3]). Convergenţa şirului de aproximaţii pentru o ecuaţie dată era stabilită prin folosirea unei ecuaţii majorante.

În această notă extindem noţiunea de ecuaţie majorantă pentru cazul ecuaţiilor operatoriale în grupuri ordonate în care orice şir majorat de elemente are o margine superioară, dar care nu sînt presupuse grupuri reticulate (şi deci nu sînt B_K-spaţii) [1]). Extindem apoi teoremele lui Kantorovici asupra existenţei şi unicităţii soluţiei, folosind aproximaţiile succesive (a se vedea [3], cap. XII, 2.22 şi 2.31).

Terminologia şi notaţiile utilizate în această notă sînt cele din [5].

*

Fie $\mathcal{X}$ un grup ordonat, adică un grup abelian în care este definită o relaţie de ordine (parţială) satisfăcînd condiţia:

$$x \leqslant y \quad \text{implică} \quad a + x \leqslant a + y$$

oricare ar fi $a \in \mathcal{X}$. Vom presupune în plus că $\mathcal{X}$ are proprietatea:

(N) Pentru orice şir majorat $\{x_n\}$ de elemente ale lui $\mathcal{X}$ există $\bigvee_{n=1}^{\infty} x_n$.

Cu această proprietate are loc şi proprietatea duală: pentru orice şir minorat $\{x_n\}$ de elemente ale lui $\mathcal{X}$ există $\bigwedge_{n=1}^{\infty} x_n$.

Fie acum P un operator definit pe intervalul $[-a, a] \subset \mathcal{X}$ şi cu valori în $\mathcal{X}$ şi să considerăm ecuaţia

$$x = P(x) \tag{1}$$

---

[1]) Şi nici ($G\,K$)-grupuri, în înţelesul dat în [4].

Fie de asemenea Q un operator definit pe intervalul $[0, a]$ şi cu valori în $\mathcal{X}$, astfel încît următoarele condiţii să fie îndeplinite :

i) $\pm P(\mathbf{0}) \leqslant Q(\mathbf{0})$,

ii) dacă[2] $\pm x \leqslant y$ iar $\pm h \leqslant k$, unde y şi k sînt elemente pozitive din $\mathcal{X}$ aşa ca $y + k \in [0, a]$, atunci

$$\pm\{P(x + h) - P(x)\} \leqslant Q(y + k) - Q(y).$$

În acest caz vom spune că ecuaţia

$$y = Q(y) \tag{2}$$

este o *ecuaţie majorantă* pentru ecuaţia (1).

Dacă valorile operatorului Q aparţin de asemenea intervalului $[0, a]$ şi dacă Q este monoton şi (o)-continuu, atunci punînd $y_0 = \mathbf{0}$ şi

$$y_{n+1} = Q(y_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

se verifică uşor că şirul $\{y_n\}$ este monoton crescător şi majorat. În baza proprietăţii (N) există elementul

$$y^*(\mathbf{0}) = \bigvee_{n=1}^{\infty} y_n = (o)\text{-lim } y_n,$$

care este evident o soluţie a ecuaţiai (2).

În acelaşi mod, punînd $y'_0 = a$ şi

$$y'_{n+1} = Q(y'_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

există elementul

$$y^*(a) = (o)\text{-lim } y'_n$$

şi acest element este de asemenea o soluţie a ecuaţiei (2).

Are loc inegalitatea

$$y^*(\mathbf{0}) \leqslant y^*(a).$$

Vom nota $E = [\mathbf{0}, a]$ şi $F = [-a, a]$. In teoremele care urmează vom presupune că P este un operator definit pe E iar Q este un operator definit pe F şi cu valori în F.

TEOREMA DE EXISTENŢĂ. *Dacă ecuaţia* (1) *este majorată de ecuaţia* (2), *iar Q este un operator monoton şi (o)-continuu, atunci ecuaţia* (1) *admite o soluţie x^* aşa ca*

$$-a \leqslant -y^*(\mathbf{0}) \leqslant x^* \leqslant y^*(\mathbf{0}) \leqslant a. \tag{3}$$

Această soluţie se poate obţine prin metoda aproximaţiilor succesive începînd cu elementul nul.

---

[2]) Inegalităţile $\pm x \leqslant y$ se mai pot scrie $-y \leqslant x \leqslant y$. Existenţa unui element y aşa ca $y \geqslant \pm x$, implică existenţa elementului $x \vee (-x)$. În grupurile s-închise (P. Lorenzen) acest element joacă rol de modul al elementului x.

Demonstraţie. Punînd $x_0 = \mathbf{0}$ şi

$$x_{n+1} = P(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

se verifică prin inducţie că

$$\pm(x_m - x_n) \leqslant y_m - y_n, \tag{4}$$

oricare ar fi n şi $m > n$. Deoarece şirul $\{y_n\}$ este (o)-convergent, rezultă că şirul $\{x_n\}$ este de asememea (o)-convergent[3]) către un element x^*. Inegalităţile (3) rezultă tot din (4) făcînd $n = 0$ şi trecînd la limită în raport cu m.

Elementul

$$x^* = (o)\text{-lim } x_n$$

este o soluţie a ecuaţiei (1), fapt care rezultă din inegalităţile

$$\pm\{P(x^*) - P(x_n)\} \leqslant Q(y^*) - Q(y_n).$$

TEOREMA DE UNICITATE. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile teoremei precedente şi dacă pentru ecuaţia majorantă* (2) *avem $y^*(\mathbf{0}) = y^*(a)$, atunci ecuaţia* (2) *are o singură soluţie în intervalul F. Această soluţie poate fi găsită prin metoda aproximaţiilor succesive începînd cu orice element $x'_0 \in F$.*

Demonstraţie. Fie $x'_0 \in F$ şi să punem

$$x'_{n+1} = P(x'_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Folosind şi notaţiile de mai înainte, putem scrie

$$\pm (x'_n - x_n) \leqslant y'_n - y_n$$

oricare ar fi n, după cum se poate verifica prin inducţie. Cum $y'_0 - y_n \overset{o}{\to} \mathbf{0}$, rezultă că $x'_n - x_n \overset{o}{\to} \mathbf{0}$, deci $x'_n \overset{o}{\to} x^*$. Dacă x'_0 ar fi fost o soluţie a ecuaţiei (1), atunci am fi avut $x'_n = x'_0$, oricare ar fi $n \geqslant 1$ deci $x^* = x'_0$.

Observaţie. Se poate de asemenea considera cazul particular al ecuaţiilor de forma

$$x = S(x) + p, \tag{5}$$

unde S este un operator aditiv şi (o)-continuu. Ecuaţia majorantă poate fi de forma

$$y = T(y) + q, \tag{6}$$

unde T este un operator aditiv, pozitiv şi (o)-continuu aşa ca $\pm S \leqslant T$, iar q este un element pozitiv aşa ca $\pm p \leqslant q$.

---

[3]) Datorită proprietăţii (N), în $\mathcal{X}$ are loc completitudinea faţă de (o)-convergenţa şirurilor.

Dacă ecuaţia (6) are o soluţie pozitivă y', atunci rolul elementului a de mai înainte este jucat de y' iar operatorii P, Q vor fi daţi de formulele

$$P(x) = S(x) + p,$$

$$Q(x) = T(y) + q.$$

Teorema de existenţă se poate deci aplica. Soluţia ecuaţiei (5) este unică în intervalul $[-y^*, y^*]$, elementul y^* fiind soluţia ecuaţiei (6) care se obţine prin metoda aproximaţiilor succesive începînd de la elementul nul.

К МЕТОДУ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей заметке метод последовательных приближений Л. В. Канторовича [1—3] распространяется к случаю полуупорядоченных групп, в которых любая сверху ограниченная последовательность элементов имеет верхнюю грань, но которые не предполагаются структурами (и, следовательно, не являются ни B_K-пространствами [3] ни G_K-группами [4]).

SUR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES POUR DES ÉQUATIONS AUX OPÉRATEURS

RÉSUMÉ

Dans la présente note, l'auteur étend la méthode des approximations successives de L. V. Kantorovitch [1—3] au cas des groupes ordonnés, où toute suite majorée d'éléments, a une borne supérieure, mais qui ne sont pas supposés être des groupes réticulés (et, par conséquent, ne sont ni des B_K-espaces [3] ni des G_K-groupes [4]).

BIBLIOGRAFIE

1. Л. В. Канторович, *Об одном классе функциональных уравнений.* Доклады Акад. Наук СССР, **4**, 211—216 (1936).
2. L. V. Kantorovici. *The method of successive approximations for functional equations.* Acta Math., **71**, 63—97 (1939).
3. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* Москва—Ленинград, 1950.
4. G. Marinescu, *Metoda aproximaţiilor succesive în grupuri cu normă abstractă.* Comunic. Acad. R.P.R., **I**, 547—550 (1951).
5. Romulus Cristescu, *Spaţii liniare ordonate.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1959.

Primit la 1. XII. 1960.